

บทที่ 2 แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง

เนื้อหาประกอบด้วย

- 2.1 บทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง
- 2.2 กลไกราคา
- 2.3 การวัดผลตอบแทน
- 2.4 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค
- 2.5 ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง
- 2.6 สมบัติมาร์ติงเกล
- 2.7 ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์
- 2.8 แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค

บทนำ

การเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ทางการเงิน เช่น หุ้น ตราสารหนี้ และสินค้าโภคภัณฑ์ มักมีลักษณะไม่แน่นอนและผันผวนตามปัจจัยภายนอกต่าง ๆ ซึ่งทำให้ไม่สามารถคาดการณ์ได้อย่างแม่นยำ (Hull, ค.ศ. 2017) เพื่อรับมือกับความไม่แน่นอนดังกล่าว นักวิจัยและนักลงทุนจึงพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการทำความเข้าใจพฤติกรรมของราคา และสนับสนุนการตัดสินใจลงทุนอย่างมีเหตุผล (Merton, ค.ศ.1973; Black & Scholes, ค.ศ.1973)

ในบทนี้มุ่งเน้นที่ **แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง** โดยเฉพาะแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model) ซึ่งเป็นแบบจำลองพื้นฐานที่ใช้อธิบายพฤติกรรมราคาของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยแสดงการเคลื่อนไหวของราคาภายใต้ความเป็นไปได้จำกัด เช่น ราคาอาจขึ้นหรือลงในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งสามารถใช้กำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และยังคงยึดถือรูปแบบจำลองที่มีความซับซ้อนและแม่นยำมากขึ้น เช่น แบบจำลองต้นไม้ไตรภาค (Trinomial Tree Model) ที่พัฒนาโดย Boyle (ค.ศ.1986)

นอกจากนี้ เนื้อหาในบทนี้ยังครอบคลุมถึงแนวคิดสำคัญหลายประการที่มีบทบาทโดยตรงในการประยุกต์ใช้กับการลงทุนจริง ได้แก่

- **กลไกราคา** ที่เป็นพื้นฐานในการอธิบายแรงผลักดันของราคาสินทรัพย์
- **ผลตอบแทนและความเสี่ยง** ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของการลงทุน
- **แนวคิดเรื่องความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Measure)** ที่ช่วยให้สามารถกำหนดราคาสินทรัพย์ในลักษณะที่เป็นธรรม
- **สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property)** ที่สะท้อนตลาดที่มีประสิทธิภาพและใช้ในการพัฒนาแบบจำลองคาดการณ์
- **ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ (Fundamental Theorem of Asset Pricing)** ซึ่งเป็นรากฐานของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์โดยไม่เกิดโอกาสค้ากำไร (arbitrage)

เนื้อหาในบทนี้จึงไม่เพียงแต่ให้ความรู้เครื่องมือเชิงทฤษฎี แต่ยังชี้ให้เห็นถึงการนำแนวคิดเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในโลกรลงทุนจริง เช่น การสร้างกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยง การกำหนดราคาสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูง และการออกแบบพอร์ตการลงทุนภายใต้ภาวะไม่แน่นอน ทั้งนี้เพื่อให้นักลงทุนสามารถตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพและรองรับความผันผวนของตลาดในระยะยาว

2.1 บทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง

ก่อนที่จะเข้าสู่การสร้างแบบจำลองราคาสำหรับสินทรัพย์ทางการเงิน จำเป็นต้องมีความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับแนวคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะเรื่องของตัวแปรสุ่ม กลไกความน่าจะเป็น และโครงสร้างของปริภูมิความน่าจะเป็น เพื่อให้การวิเคราะห์แบบจำลองมีรากฐานที่มั่นคง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามสำคัญและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นและตัวแปรสุ่ม โดยจะนำเสนอเฉพาะส่วนที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์แบบจำลองราคา โดยจะละการพิสูจน์เพื่อคงไว้ซึ่งความกระชับและเน้นความเข้าใจเชิงแนวคิด

บทนิยาม 2.1 (ปริภูมิความน่าจะเป็น: Probability Space) กำหนดให้ Ω เป็น ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) ซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม กำหนดให้ $\mathcal{F} = \{E \mid E \subseteq \Omega\}$ เป็นแฟมิลีของเหตุการณ์ (events) โดยที่ $\mathcal{F}$ ต้องมีสมบัติดังต่อไปนี้

- (f-1) ถ้า $E \in \mathcal{F}$ แล้วส่วนเติมเต็ม $E^c \in \mathcal{F}$
- (f-2) ถ้า $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ใน $\mathcal{F}$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

กล่าวคือ $\mathcal{F}$ ปิดภายใต้การยูเนียนนับได้

จากนั้น กำหนดฟังก์ชัน $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ ซึ่งเรียกว่า *มาตรวัดความน่าจะเป็น* (probability measure) โดยกำหนดให้

$$P(E) = \int_E p(\omega) d\omega \quad \text{สำหรับทุก } E \in \mathcal{F} \quad (2.1)$$

โดยที่ $p: \Omega \rightarrow [0,1]$ เป็น ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution function) และต้องมีเงื่อนไขว่า

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega = 1 \quad (2.2)$$

เราจึงเรียกอันดับสาม $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ว่า *ปริภูมิความน่าจะเป็น* (probability space) และเพื่อความสะดวก บางครั้งเขียนย่อเพียง Ω

หมายเหตุ: ในกรณีที่ p เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องจะใช้ผลรวมแทนการอินทิเกรต

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \quad (2.3)$$

และหากพิจารณากรณีที่ตัวแปรสุ่ม $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_X(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริง จะสามารถนิยามความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E \subseteq \mathbb{R}$ ได้เป็น

$$P(X \in E) = \int_E f_X(x) dx \quad (2.4)$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของการอินทิเกรตบน Ω เมื่อผลลัพธ์ของการทดลองเป็นค่าจริง (real-valued outcomes)

บทนิยาม 2.2 (ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข) ให้ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B เขียนแทนด้วย $p(A|B)$ นิยามโดย

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2.5)$$

บทนิยาม 2.3 ให้ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ จะกล่าวว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกัน ก็ต่อเมื่อ

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad (2.6)$$

โดยสูตร (2.5) และ (2.6) จะได้ว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกัน ก็ต่อเมื่อ

$$p(A|B) = p(A) \quad (2.7)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$p(B|A) = p(B) \quad (2.8)$$

บทนิยาม 2.4 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะกล่าวว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ถ้า

$$p(X = x \wedge Y = y) = p(X = x) \cdot p(Y = y) \quad (2.9)$$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.5 (สมบัติเชิงเส้นของค่าคาดหวัง) ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \quad (2.10)$$

บทนิยาม 2.6 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ A เป็นเหตุการณ์ ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย $E[X|A]$ นิยามโดย

$$E[X | A] = \int_{\Omega} \omega \cdot p(X = \omega | A) d\omega \quad (2.11)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง $E[X | A] = \sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot p(X = \omega | A)$

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม, A เป็นเหตุการณ์ และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$E[aX + bY | A] = aE[X | A] + bE[Y | A] \quad (2.12)$$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ X และ A_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $A_i \cap A_j = \phi$ ทุก ๆ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$E[X] = \sum_i E[X | A_i] \cdot p(A_i) \quad (2.13)$$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \quad (2.14)$$

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้ว่า

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (2.15)$$

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X] \quad (2.16)$$

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งทุกคู่ใด ๆ อิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$Var[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] \quad (2.17)$$

2.2 กลไกราคา

กำหนดให้เวลา $t = n\tau$ มีหน่วยเป็นคาบหรืองวด (period) ซึ่งอาจจะเป็นวินาที นาที ชั่วโมง วัน สัปดาห์ เดือน ไตรมาส ครึ่งปี ปี เป็นต้น นั่นคือ $t = n\tau$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ และ τ เป็นขนาดของคาบเวลาที่กำหนด (fixed time step) ซึ่งจะเขียน $t = n$ แทน $t = n\tau$ ในหน่วยคาบขนาด τ กำหนดให้ $S(t)$ แทนราคาของหุ้นที่ราคาในเวลา t ใด ๆ โดยที่ $S(0)$ เป็นราคาปัจจุบันของหุ้น ราคาปัจจุบันของหุ้นจะเป็นราคาที่นักลงทุนทุกคนทราบ ราคา $S(t)$ สำหรับ $t > 0$ จะเป็นราคาหุ้นใน

อนาคตซึ่งเป็นราคาที่ยังไม่ทราบ ในที่นี้กำหนดให้ $S(t)$ สำหรับ $t > 0$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) บนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω

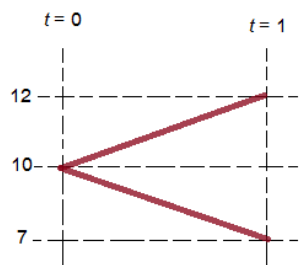
ต่อไปจะกำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นเหตุการณ์ของการเคลื่อนไหวราคาที่เป็นไปได้ทั้งหมด (feasible price movement) ซึ่งจะเรียก แต่ละเหตุการณ์ของการเคลื่อนไหวราคา ว่า สถานการณ์ หรือ ซีนา리오ส์ (scenarios) และในที่นี้จะกำหนดให้ $S(t)$ เป็น ตัวแปรเชิงสุ่ม บนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω นั่นคือ $S(t): \Omega \rightarrow (0, \infty)$

กำหนดสัญลักษณ์ $S(t, \omega)$ แทนราคาหุ้นที่เวลา t เป็นไปตามสถานการณ์ $\omega \in \Omega$ โดยที่ราคาปัจจุบัน $S(0)$ สามารถพิจารณาเป็น ตัวแปรเชิงสุ่มคงที่ (constant random variable) ในขณะที่ ราคาในอนาคต $S(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่คงที่ (non-constant random variable) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $t > 0$ จะมีอย่างน้อย 2 สถานการณ์ $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ซึ่ง $S(t, \omega_1) \neq S(t, \omega_2)$

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาตลาดซึ่งมี 2 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น (boom) และ ตลาดขาลง (recession) แทนด้วย ω_1 และ ω_2 ตามลำดับ สมมติให้ราคาปัจจุบันของหุ้น เท่ากับ 10 บาทต่อหุ้น ซึ่งถ้าตลาดขาขึ้น ราคาอาจจะขึ้นเป็น 12 บาท และถ้าตลาดขาลงราคาอาจจะลงเป็น 7 บาท ดังนั้นในที่นี้ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ กำหนดให้ $t=1$ สามารถเขียนตารางราคาและสถานการณ์ได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	10	12
ω_2	10	7

และเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาได้เป็น



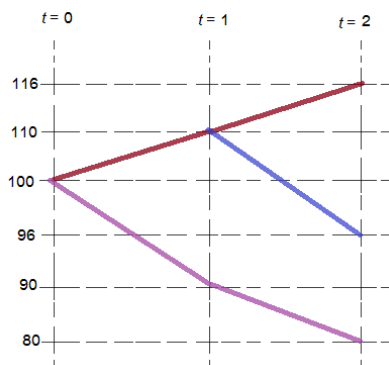
รูปที่ 2.1 ต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาในตัวอย่างที่ 2.1

□

ตัวอย่างที่ 2.2 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	116
ω_2	100	90	80
ω_3	100	110	96

จากสถานการณ์ที่กำหนดให้เขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาได้ดังนี้



รูปที่ 2.2 ต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาในตัวอย่างที่ 2.2

□

2.3 การวัดผลตอบแทน

ในการวิเคราะห์การลงทุนในหลักทรัพย์ ผลตอบแทน (Return) ถือเป็นตัวแปรสำคัญที่ใช้วัดความคุ้มค่าและประสิทธิภาพของการลงทุน โดยผลตอบแทนสามารถสะท้อนการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง รวมถึงรายได้อื่น ๆ เช่น เงินปันผล ในเบื้องต้น เพื่อให้ง่ายต่อการนิยามและวิเคราะห์ จะพิจารณากรณีที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งช่วยให้สามารถมุ่งเน้นไปที่ส่วนต่างของราคาหุ้นเป็นหลัก

หัวข้อนี้จะเริ่มต้นจากการนิยามอัตราผลตอบแทน (Rate of Return) และอธิบายความสัมพันธ์กับมูลค่าเงินสะสม พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างเพื่อให้เห็นถึงลักษณะของผลตอบแทนในสถานะตลาดที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ ยังจะกล่าวถึงอัตราผลตอบแทนลอการิทึม (Logarithmic

Return) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในการวิเคราะห์ผลตอบแทนในรอบของคณิตศาสตร์การเงิน เนื่องจากมีสมบัติการบวกที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในแบบจำลองต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น

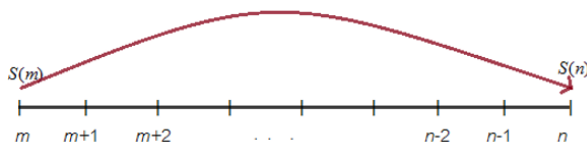
เนื้อหาในหัวข้อนี้จึงครอบคลุมทั้งแนวคิดพื้นฐาน สูตรคำนวณ ความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ และตัวอย่างประกอบที่ช่วยให้เข้าใจผลตอบแทนจากการลงทุนอย่างลึกซึ้งยิ่งขึ้น ทั้งในรูปแบบปกติ และแบบลอการิทึม พร้อมการคำนวณค่าคาดหวังที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ ความเสี่ยงและผลตอบแทนในตลาดการเงินอย่างเป็นระบบ

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาต่อหุ้นที่ราคา t อัตราผลตอบแทน (rate of return) บน ช่วงเวลา $[m, n]$ (หน่วย เป็น คาบเวลา) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $K(m, n)$ ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม นิยามโดย

$$K(m, n) = \frac{S(n) - S(m)}{S(m)} \quad (2.18)$$

จากรูป (2.18) สามารถเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n) = (1 + K(m, n))S(m) \quad (2.19)$$



รูปที่ 2.3 $S(n)$ เป็นมูลค่าสะสมของเงิน $S(m)$ ด้วยฟังก์ชันสะสม $1 + K(m, n)$

อัตราผลตอบแทนบน 1 ช่วงเวลา $[n-1, n]$ คือ $K(n-1, n)$ จะเขียนแทนด้วย $K(n)$

ดังนั้น

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)} \quad (2.20)$$

ซึ่งเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n) = (1 + K(n))S(n-1) \quad (2.21)$$

หมายเหตุ หากนำเงินปันผลเข้ามาพิจารณาด้วย จะได้อัตราผลตอบแทนเป็น

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1) + \text{div}(n)}{S(n-1)} \quad (2.22)$$

เมื่อ $\text{div}(n)$ เป็นเงินปันผลต่อหุ้นที่จ่ายในคาบที่ n

ตัวอย่างที่ 2.3 พิจารณาตลาดซึ่งมี 2 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น และ ตลาดขาลง แทนด้วย ω_1 และ ω_2 ตามลำดับ ในตัวอย่างที่ 2.1 สามารถเขียนตารางอัตราผลตอบแทน $K(1)$ ได้ดังนี้

สถานการณ์	$K(1)$
ω_1	0.2
ω_2	-0.3

□

ตัวอย่างที่ 2.4 สมมติตลาดแห่งหนึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.2 จะได้ว่า อัตราผลตอบแทนตามแต่ละสถานการณ์แสดงในตารางดังต่อไปนี้

สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$	$K(0,2)$	$K(0,1) + K(1,2)$
ω_1	0.1	0.0545	0.16	0.1545
ω_2	-0.1	-0.1111	-0.2	-0.2111
ω_3	0.1	-0.0127	-0.04	-0.0973

□

จากตัวอย่างที่ 2.4 จะเห็นว่า $K(0,1) + K(1,2) \neq K(0,2)$ ดังนั้น อัตราผลตอบแทน $K(m,n)$ ไม่มีสมบัติการบวก (non-additivity) อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ระหว่าง $K(m,n)$ กับ $K(n)$ ก็ยังเป็นสิ่งที่น่าสนใจ

ตัวอย่างที่ 2.5 สมมติตลาดแห่งหนึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.2 ถ้ากำหนดปันผล 1 บาทต่อหุ้น จะได้ว่า อัตราผลตอบแทนตามแต่ละสถานการณ์แสดงในตารางดังต่อไปนี้

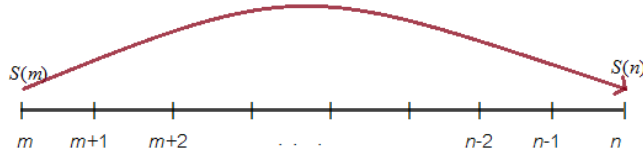
สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$	$K(0,2)$
ω_1	0.1100	0.0636	0.1800
ω_2	-0.0900	-0.1000	-0.1800
ω_3	0.1100	-0.0273	-0.0200

□

ทฤษฎีบท 2.14 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทน $K(m, n)$ กับ $K(n)$ อยู่ในรูป

$$1 + K(m, n) = [1 + K(m+1)][1 + K(m+2)] \dots [1 + K(n)] \quad (2.23)$$

พิสูจน์ พิจารณาแผนภาพกระแสเงิน



จากแผนภาพจะเห็นว่า $S(n)$ เป็นเงินสะสมของการลงทุน ที่เวลา m ด้วยเงินลงทุน $S(m)$ ด้วยฟังก์ชันเงินสะสม $[1 + K(m+1)][1 + K(m+2)] \dots [1 + K(n)]$ นั่นคือ

$$S(n) = [1 + K(m+1)][1 + K(m+2)] \dots [1 + K(n)] S(m)$$

และจากบทนิยามของ $K(m, n)$ ตามสูตร (2.2),

$$S(n) = [1 + K(m, n)] S(m)$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $1 + K(m, n) = [1 + K(m+1)][1 + K(m+2)] \dots [1 + K(n)]$ □

เนื่องจากอัตราผลตอบแทน $K(m, n)$ ไม่มี สมบัติการบวก ทำให้ยากต่อการนำไปใช้งาน จึงเป็นสาเหตุที่จำเป็นต้องนิยามของอัตราผลตอบแทนใหม่เพื่อให้มีสมบัติการบวก อัตราผลตอบแทนที่นิยามใหม่นี้เรียกว่า อัตราผลตอบแทนลอการิทึม หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งคือ อัตราผลตอบแทนทบต้นต่อเนื่อง โดยนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.15 กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาต่อหุ้นที่เวลา t อัตราผลตอบแทนลอการิทึม (logarithmic return) บนช่วงเวลา $[m, n]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $k(m, n)$ ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มนิยามโดย

$$k(m, n) = \ln S(n) - \ln S(m) = \ln \frac{S(n)}{S(m)} \quad (2.24)$$

เขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n) = e^{k(m, n)} S(m) \quad (2.25)$$

และอัตราผลตอบแทนลอการิทึมบน 1 ช่วงเวลา $[n-1, n]$ คือ $k(n-1, n)$ เขียนโดยย่อด้วย $k(n)$

ดังนั้น $k(n) = \ln S(n) - \ln S(n-1) = \ln \frac{S(n)}{S(n-1)}$ (2.26)

หมายเหตุ 1) หากนำเงินปันผลเข้ามาพิจารณาด้วย จะได้อัตราผลตอบแทนลอการิทึมเป็น

$$k(n) = \ln \frac{S(n) + \text{div}(n)}{S(n-1)} \quad (2.27)$$

เมื่อ $\text{div}(n)$ เป็นเงินปันผลต่อหุ้นที่จ่ายในคาบที่ n

2) โดยการเปรียบเทียบจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทนกับอัตราผลตอบแทนลอการิทึม จะได้

$$1 + K(m, n) = e^{k(m, n)} \quad (2.28)$$

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนในตารางได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	10	11	11.6	12
ω_2	10	9	8	7
ω_3	10	11	9.6	10

และตาราง อัตราผลตอบแทนลอการิทึมและสถานการณ์เป็นดังนี้

สถานการณ์	$k(1)$	$k(2)$	$k(3)$	$k(1) + k(2) + k(3)$	$k(0, 3)$
ω_1	0.0953	0.0531	0.0339	0.1823	0.1823
ω_2	-0.1054	-0.1178	-0.1335	-0.3567	-0.3567
ω_3	0.0953	-0.1361	0.0408	0	0

□

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นได้ว่า $k(0, 3) = k(1) + k(2) + k(3)$ ซึ่งเป็นผลที่ได้จากสมบัติการบวกที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.16 ถ้าไม่มีการจ่ายเงินปันผล แล้ว อัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(m, n)$ มีสมบัติการบวก นั่นคือ ถ้า $m \leq q \leq n$ แล้ว

$$k(m, q) + k(q, n) = k(m, n) \quad (2.29)$$

พิสูจน์ จากนิยามของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม จะได้

$$k(m, n) = \ln \frac{S(n)}{S(m)} = \ln \left(\frac{S(q)}{S(m)} \cdot \frac{S(n)}{S(q)} \right) = \ln \left(\frac{S(q)}{S(m)} \right) + \ln \left(\frac{S(n)}{S(q)} \right) = k(m, q) + k(q, n) \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.17 ถ้าไม่มีการจ่ายเงินปันผลแล้ว

$$k(m, n) = k(m+1) + k(m+2) + \dots + k(n) \quad (2.30)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงโดยใช้สมบัติการบวกตามทฤษฎีบท 2.16

□

บทนิยาม 2.18 กำหนดให้ $K(t)$ เป็นอัตราผลตอบแทนซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่เวลา t และกำหนดให้ p เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น เรียก $E[K(t)]$ ว่า อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง (expected return) ที่เวลา t

ตัวอย่างที่ 2.7 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.4 โดยสมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ เป็น 0.5, 0.25 และ 0.25 ตามลำดับ จงคำนวณหา $E[K(t)]$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.4 ได้ว่า

สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$
ω_1	0.1	0.0545
ω_2	-0.1	-0.1111
ω_3	0.1	-0.0127

ดังนั้น $E[K(1)] = \sum_{\omega} \omega p(\omega) = 0.1(0.5) - 0.1(0.25) + 0.1(0.25) = 0.05$

และ $E[K(2)] = 0.0545(0.5) - 0.1111(0.25) - 0.0127(0.25) = -0.0037$ □

ทฤษฎีบท 2.19 ถ้า $K(m+1)$, $K(m+2)$, $\dots$, $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ แล้ว จะได้ว่า

$$1 + E[K(m, n)] = (1 + E[K(m+1)])(1 + E[K(m+2)]) \dots (1 + E[K(n)]) \quad (2.31)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.14 ,

$$1 + K(m, n) = (1 + K(m+1))(1 + K(m+2)) \dots (1 + K(n))$$

โดยทฤษฎีบท 2.11 และ ทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 1 + E[K(m, n)] &= E[1 + K(m, n)] = E[(1 + K(m+1))(1 + K(m+2)) \dots (1 + K(n))] \\
 &= E[1 + K(m+1)] E[1 + K(m+2)] \dots E[1 + K(n)] \\
 &= (1 + E[K(m+1)])(1 + E[K(m+2)]) \dots (1 + E[K(n)])
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $1 + E[K(m, n)] = (1 + E[K(m+1)])(1 + E[K(m+2)]) \dots (1 + E[K(n)])$ □

ทฤษฎีบท 2.20 ถ้าหุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผลแล้ว

$$E[k(m, n)] = E[k(m+1)] + E[k(m+2)] + \dots + E[k(n)] \quad (2.32)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงโดยใช้โดยทฤษฎีบท 2.11

□

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.19 จะเห็นว่าการคำนวณค่าคาดหวังอัตราผลตอบแทนลอการิทึม $E[k(m, n)]$ ไม่ต้องใช้สมบัติความเป็นอิสระของตัวแปรเชิงสุ่ม $k(m+1), k(m+2), \dots, k(n)$ แตกต่างจาก ทฤษฎีบท 2.18 ซึ่งการคำนวณค่าคาดหวังอัตราผลตอบแทน $E[K(m, n)]$ จะต้องอาศัยความเป็นอิสระของตัวแปรเชิงสุ่ม $K(m+1), K(m+2), \dots, K(n)$

2.4 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค

แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Price Model) เป็นแบบจำลองพื้นฐานที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในการอธิบายพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ โดยเฉพาะราคาของหุ้นในตลาดการเงิน แบบจำลองนี้มีข้อดีคือ เข้าใจได้ง่าย มีโครงสร้างชัดเจน และสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ราคาของตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชั่น ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสมบางประการ โดยเน้นการนำเสนอแนวคิดหลัก โครงสร้างของแบบจำลอง และการคำนวณราคาภายใต้กรอบของการเคลื่อนไหวราคาที่ไม่ต่อเนื่อง

เงื่อนไข bt-1 อัตราผลตอบแทนต่อคาบเวลา (one-step return) $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน นิยามโดย

$$K(n) = \begin{cases} u & ; \text{probability } p \\ d & ; \text{probability } 1-p \end{cases} \quad (2.33)$$

สำหรับแต่ละคาบเวลาที่ n เมื่อ $-1 < d < u$ และ $0 < p < 1$

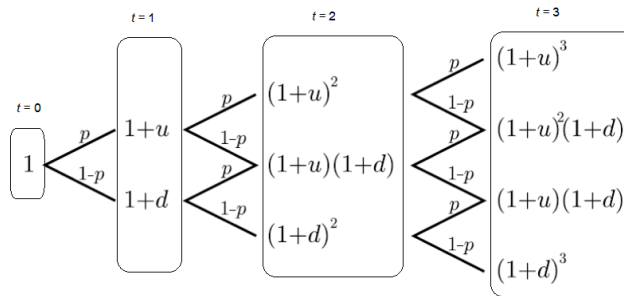
เงื่อนไข bt-2 อัตราผลตอบแทน r ต่อคาบ ของการลงทุนโดยปราศจากความเสี่ยง (risk-free investment) คงที่ทุกคาบเวลา และ

$$d < r < u$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่สมมูลกับ r แล้ว

$$\ln(1+d) < \delta < \ln(1+u)$$

เงื่อนไข bt-1 ทำให้ทราบว่าราคา $S(n)$ จะเคลื่อนไหวขึ้นหรือลงด้วยตัวประกอบ $1+u$ และ $1+d$ สำหรับแต่ละคาบเวลาที่ n ส่วนอสมการ $-1 < d < u$ จะเป็นสิ่งยืนยันว่า $S(n)$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอเมื่อ $S(0)$ เป็นบวก ตัวอย่างแผนภาพต้นไม้ของตัวประกอบของ $S(n)$ สำหรับ $n=1,2,3$ แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.4 ต้นไม้ของตัวประกอบของ $S(n)$ สำหรับ $n=1,2,3$

จากแผนภาพต้นไม้สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม $S(1)$, $S(2)$ และ $S(3)$ จะได้ว่า

$$S(1) = \begin{cases} (1+u)S(0); & \text{probability } p \\ (1+d)S(0); & \text{probability } 1-p \end{cases} \quad (2.34)$$

$$S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) & ; \text{probability } p^2 \\ (1+u)(1+d)S(0); & \text{probability } 2p(1-p) \\ (1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^2 \end{cases} \quad (2.35)$$

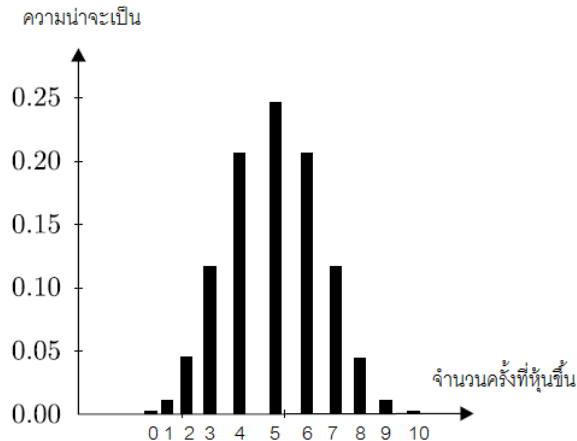
$$S(3) = \begin{cases} (1+u)^3 S(0) & ; \text{probability } p^3 \\ (1+u)^2 (1+d) S(0) & ; \text{probability } 3p^2(1-p) \\ (1+u)(1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } 3p(1-p)^2 \\ (1+d)^3 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^3 \end{cases} \quad (2.36)$$

จากแนวคิดนี้ถ้ากำหนดให้ i สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นจำนวนครั้งหรือจำนวนคาบเวลาที่ราคาหุ้นขึ้น โดยที่ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ p และ $n-i$ เป็นจำนวนครั้งที่ราคาหุ้นลง โดยที่ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ $1-p$ จะได้ว่า i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้น i ครั้งจากทั้งหมด n ครั้ง เท่ากับ

$$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{เมื่อ} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (2.37)$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาจำนวนครั้งที่ราคาหุ้นขึ้น i ครั้ง จากการพิจารณาการลงทุน $n=10$ คาบ โดยกำหนดความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ 0.5 จะได้ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นจำนวน i ครั้ง สำหรับ $i = 0, 1, \dots, 10$ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนครั้งที่หุ้นขึ้น i	ความน่าจะเป็น $p(i)$
0	0.0009765625
1	0.0097656250
2	0.0439453125
3	0.1171875000
4	0.2050781250
5	0.2460937500
6	0.2050781250
7	0.1171875000
8	0.0439453125
9	0.0097656250
10	0.0009765625



รูปที่ 2.5 ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นจำนวน i ครั้ง $i = 0, 1, \dots, 10$

จาก (2.37) ทำให้ได้ ราคาหุ้น $S(n)$ ณ เวลา n เท่ากับ

$$S(n) = (1+u)^i (1+d)^{n-i} S(0) \quad (2.38)$$

ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ สำหรับ $i = 0, 1, \dots, n$

ตัวอย่างที่ 2.8 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ

d ที่ทำให้ $S(1) = \begin{cases} 87 & ; \uparrow \\ 76 & ; \downarrow \end{cases}$ และ $S(2) = 92$; $\uparrow\uparrow$

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้ $S(1) = \begin{cases} (1+u)S(0) \\ (1+d)S(0) \end{cases} = \begin{cases} 87 \\ 76 \end{cases}$

และ $S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) \\ (1+u)(1+d)S(0) \\ (1+d)^2 S(0) \end{cases} = \begin{cases} 92 \\ ? \\ ? \end{cases}$

นั่นคือ $(1+u)S(0) = 87 \quad (1)$

$(1+d)S(0) = 76 \quad (2)$

$(1+u)^2 S(0) = 92 \quad (3)$

$\frac{(3)}{(1)}; \quad 1+u = \frac{92}{87} \Rightarrow u \approx 0.0575$

$\frac{(2)}{(1)}; \quad \frac{1+d}{1+u} = \frac{76}{87} \Rightarrow 1+d = \frac{76}{87} \left(\frac{92}{87} \right) \Rightarrow d \approx -0.0762$

ดังนั้น $u \approx 0.0575$ และ $d \approx -0.0762$ □

ตัวอย่างที่ 2.9 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ

$$d \text{ ที่ทำให้ } S(2) = \begin{cases} 121 & ; \uparrow\uparrow \\ 110 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 100 & ; \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ เมื่อกำหนดให้ } S(0) = 100$$

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 100 & ; \uparrow\uparrow \\ (1+u)(1+d)100 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2 100 & ; \downarrow\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 121 & ; \uparrow\uparrow \\ 110 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 100 & ; \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad (1+u)^2 100 = 121 \quad (1)$$

$$(1+u)(1+d)100 = 110 \quad (2)$$

$$(1+d)^2 100 = 100 \quad (3)$$

แก้สมการ (3) จะได้ $d = 0$ ($\because d > -1$)

แก้สมการ (1) จะได้ $u = 0.1$ ($\because u > d$)

ดังนั้น $u = 0.1$ และ $d = 0$

□

ตัวอย่างที่ 2.10 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค โดยที่

$$S(2) = \begin{cases} 32 & ; \uparrow\uparrow \\ 28 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ x & ; \downarrow\downarrow \end{cases} \text{ จงคำนวณค่าของ } x \text{ และตรวจสอบว่าสามารถสร้างต้นไม้ทวิภาคของราคา}$$

ได้สมบูรณ์หรือไม่ ถ้าสร้างได้ สร้างได้แบบเดียวหรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) & ; \uparrow\uparrow \\ (1+u)(1+d)S(0) & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2 S(0) & ; \downarrow\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 32 & ; \uparrow\uparrow \\ 28 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ x & ; \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad (1+u)^2 S(0) = 32 \quad (1)$$

$$(1+u)(1+d)S(0) = 28 \quad (2)$$

$$(1+d)^2 S(0) = x \quad (3)$$

$$(1) \times (3); \text{ จะได้} \quad [(1+u)(1+d)S(0)]^2 = 32x \quad (4)$$

$$\text{แทน (2) ใน (4) จะได้} \quad 28^2 = 32x \Rightarrow x = \frac{28^2}{32} = 24.50$$

$$\text{จากสมการ (1) และ (3) ได้} \quad u = -1 \pm \sqrt{\frac{32}{S(0)}} \text{ และ } d = -1 \pm \sqrt{\frac{24.50}{S(0)}} \text{ ตามลำดับ}$$

$$\because -1 < d < u \text{ จะได้ } d = -1 + \sqrt{\frac{24.50}{S(0)}} \text{ และ } u = -1 + \sqrt{\frac{32}{S(0)}}$$

นั่นแสดงว่า เมื่อกำหนด $S(0) > 0$ จะสามารถสร้างต้นไม้ทวิภาคของราคาได้สมบูรณ์และสร้างได้แบบเดียว โดยที่

$$K(n) = \begin{cases} -1 + \sqrt{\frac{24.50}{S(0)}} & ; \text{probability } p \\ -1 + \sqrt{\frac{32}{S(0)}} & ; \text{probability } 1 - p \end{cases} \quad \square$$

เงื่อนไข bt-1 และ bt-2 ทำให้ได้ว่ากลไกราคาของหุ้นจะเคลื่อนไหวสัมพันธ์กับราคาของสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง และ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไปนี้

2.5 ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

คำว่า **ความเสี่ยง** ในที่นี้จะหมายถึงโอกาสที่การลงทุนนั้นได้ผลตอบแทนไม่ได้เป็นไปตามที่คาดหวังไว้หรือสูญเสียเงินต้นจากการลงทุน หรือเสี่ยงที่จะเสียโอกาสในการลงทุนกับโครงการลงทุนอื่นที่ได้ผลตอบแทนที่ดีกว่า เป็นต้น โดยในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้กล่าวถึงการใช้ส่วนเบี่ยงมาตรฐานเป็นดัชนีวัดความเสี่ยง ในหัวข้อนี้จะแบ่งพฤติกรรมของนักลงทุนที่มีต่อความเสี่ยงโดยใช้ค่าคาดหวังของผลตอบแทนเป็นเกณฑ์ในการแบ่ง

ตามพจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถานได้จำแนกพฤติกรรมของที่คนต่อความเสี่ยงได้เป็น 3 ประเภท คือ

1) การไม่ชอบความเสี่ยง หรือ การหลีกเลี่ยงความเสี่ยง (risk aversion) นักลงทุนที่อยู่ในกลุ่มไม่ชอบความเสี่ยงจะมองหาระดับการลงทุนที่ต้องมั่นใจว่า อัตราผลตอบแทนคาดหวังของการลงทุนใด ๆ จะต้องมากกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาด

2) การชอบความเสี่ยงหรือการค้นหาความเสี่ยง (risk seeking) นักลงทุนที่อยู่ในกลุ่มชอบความเสี่ยงจะมองหาระดับการลงทุนที่มีโอกาสทำกำไรได้สูงถึงแม้ว่าอัตราผลตอบแทนคาดหวังของการลงทุนใด ๆ จะต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดก็ตาม เช่น นักเสี่ยงโชคจากการซื้อลอตเตอรี่ นักเก็งกำไรในหุ้นที่มีความผันผวนของราคาสูง

3) การเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutral) ซึ่งเป็นประเภทของพฤติกรรมต่อความเสี่ยงที่ไม่ได้เป็นทั้งกลุ่มที่ไม่ชอบความเสี่ยงและกลุ่มที่ชอบความเสี่ยง

เมื่อพิจารณาถึงราคาของหุ้นในอนาคตซึ่งแน่นอนว่าเป็นสิ่งที่เราไม่มีทางรู้ได้ แต่เป็นไปได้ที่จะคาดเดาจากค่าคาดหวังของราคาจากแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค ดังนั้นแนวทางหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์ความเสี่ยงคือการเปรียบเทียบค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้นกับค่าคาดหวังของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งแนวคิดนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้อย่างมากในทฤษฎีของอนุพันธ์ทางการเงิน (เช่น ออปชัน ฟอว์เวิร์ด พิวเจอร์ส) ซึ่งปรากฏในหนังสือเกี่ยวกับการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ทั่วไปรวมถึงในตำราเล่มนี้ด้วย

พิจารณาค่าคาดหวังของราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับที่เวลา $t=1$ ก่อน จากแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(1) = \begin{cases} S(0)(1+u) & ; \text{probability } p \\ S(0)(1+d) & ; \text{probability } 1-p \end{cases}$$

ดังนั้น $E[S(1)] = pS(0)(1+u) + (1-p)S(0)(1+d) = S(0)(1 + E[K(1)])$

เมื่อ $E[K(1)] = pu + (1-p)d$ โดยจะขยายแนวคิดนี้ไปยัง ค่าคาดหวังของราคา สำหรับที่เวลา $t=n$ จะได้ผลลัพธ์ ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.21 ภายใต้เงื่อนไข bt-1 จะได้ว่า ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน

$$E[K(n)] = pu + (1-p)d$$

สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

พิสูจน์ จากเงื่อนไข bt-1 เราทราบว่า $K(n) = \begin{cases} u & ; \text{probability } p \\ d & ; \text{probability } 1-p \end{cases}$ สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

โดยนิยามของค่าคาดหวัง จะได้ $E[K(n)] = pu + (1-p)d$ □

ทฤษฎีบท 2.22 ให้ $S(n)$ เป็นราคาหุ้นที่เวลา $t=n$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \dots$ จะได้ว่า

$$E[S(n)] = S(0)(1 + E[K(1)])^n \quad (2.39)$$

เมื่อ $E[K(1)] = pu + (1-p)d$

พิสูจน์ เพราะว่า $S(n)$ เป็นมูลค่าอนาคตที่ถูกสะสมจากเงินต้น $S(0)$ ด้วยตัวประกอบเงินสะสม

$$1 + K(0, n)$$

นั่นคือ

$$S(n) = S(0)[1 + K(0, n)]$$

ผลที่ตามมาคือ

$$E[S(n)] = S(0)E[1 + K(0, n)] = S(0)(1 + E[K(0, n)])$$

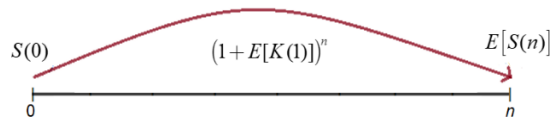
โดยทฤษฎีบท 2.18, $1 + E[K(0, n)] = (1 + E[K(1)])(1 + E[K(2)]) \cdots (1 + E[K(n)])$

และจาก $E[K(n)] = E[K(1)]$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, \dots$

จึงได้ว่า

$$E[S(n)] = S(0)(1 + E[K(1)])^n$$

□



รูปที่ 2.6 $E[S(n)]$ เป็นมูลค่าสะสมของเงิน $S(0)$ สะสมด้วยฟังก์ชันสะสม $(1 + E[K(1)])^n$

สำหรับการลงทุนกับสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงด้วยเงินต้น $S(0)$ เท่ากัน โดยมีอัตราดอกเบี้ยทบต้น r ต่อคาบซึ่งสมมูลกับอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ จะได้เงินสะสมจากการลงทุนเป็นระยะเวลา n คาบ เท่ากับ $S(0)(1+r)^n$ นั่นคือราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงที่เวลา $t = n$ เท่ากับ

$$S(0)(1+r)^n = S(0)e^{\delta n} \quad (2.40)$$

และค่าคาดหวังของราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงนี้ จะเท่ากับ

$$E[S(0)(1+r)^n] = S(0)(1+r)^n \quad (2.41)$$

จาก (2.39) และ (2.41) ทำให้ได้ว่าถ้าต้องการเปรียบเทียบค่าคาดหวังของราคาหุ้นกับราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (เช่น ตราสารหนี้) นั้น เพียงพอที่จะเปรียบเทียบเฉพาะระหว่างอัตราดอกเบี้ย r กับ $E[K(n)]$ และในที่นี้จะแบ่งประเภทนักลงทุนโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง r กับ $E[K(n)]$ ได้ดังนี้

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] > r$ ว่า นักลงทุนประเภทไม่ชอบความเสี่ยง

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] < r$ ว่า นักลงทุนประเภทชอบความเสี่ยง

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] = r$ ว่า นักลงทุนประเภทเป็นกลางต่อความเสี่ยง

สำหรับในทางคณิตศาสตร์การเงินจะศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง นั่นคือ หาความน่าจะเป็น p^* ซึ่งทำให้ $E^*[K(n)] = r$

โดยเรียก p^* ดังกล่าวไว้ว่า **ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง** (risk-neutral probability) และเรียก E^* ว่า **การคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง** (risk-neutral expectation)

โดยนิยามของค่าคาดหวังและ $K(n)$ จะได้

$$E^*[K(n)] = p^*u + (1 - p^*)d = r \quad (2.42)$$

เมื่อแก้สมการเพื่อหา p^* จะได้

$$p^* = \frac{r - d}{u - d} = \frac{e^{\delta} - d - 1}{u - d} \quad (2.43)$$

หมายเหตุ ในที่นี้นักลงทุนจะต้องจำไว้เสมอว่าความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* คำนวณได้ในเชิงทฤษฎี ดังนั้นในทางปฏิบัติ p^* อาจจะเท่าหรือไม่เท่ากับความน่าจะเป็นที่แท้จริง p ก็ได้ สำหรับตลาดการลงทุนที่ $p^* = p$ จะเรียกว่า **ตลาดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง** (risk-neutral market) และถึงแม้ว่า p^* กับ p จะไม่มีความสัมพันธ์กันซึ่งหมายถึงถ้าเราทราบค่า p^* ก็ไม่สามารถใช้ p^* เพื่อคำนวณหา p แต่ p^* มีประโยชน์ในแง่ของการนำไปใช้ในการศึกษาเชิงทฤษฎี การนำไปใช้ประโยชน์ในเรื่องของการประเมินมูลค่าและการกำหนดราคาสินทรัพย์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสินทรัพย์ที่เป็นตราสารอนุพันธ์ ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.11 กำหนดให้ $u = 0.2$ และ $r = 0.1$ จงหา p^* ในเทอมของ d

วิธีทำ เพราะว่า $p^* = \frac{r - d}{u - d}$ ดังนั้น $p^* = \frac{0.1 - d}{0.2 - d}$

□

ตัวอย่างที่ 2.12 จงแสดงว่า $d < r < u$ ก็ต่อเมื่อ $0 < p^* < 1$

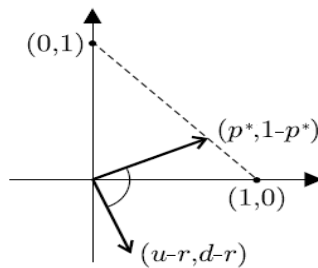
วิธีทำ เพราะว่า $0 < p^* = \frac{r - d}{u - d} < 1 \Leftrightarrow 0 < r - d < u - d \quad (\because u - d > 0) \Leftrightarrow d < r < u$

□

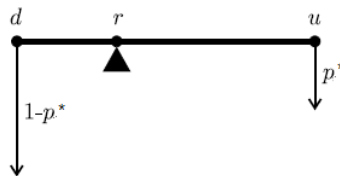
ความหมายในเชิงเรขาคณิตของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* สามารถอธิบายได้ตามรูปที่ 2.5 คือ หากพิจารณา $(p^*, 1-p^*)$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ $\mathbb{R}^2$ จะได้ว่าเวกเตอร์ $(p^*, 1-p^*)$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(u-r, d-r)$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}(p^*, 1-p^*) \cdot (u-r, d-r) &= p^*(u-r) + (1-p^*)(d-r) \\ &= \underbrace{p^*u + (1-p^*)d}_{=r} - p^*r - (1-p^*)r = r - r = 0\end{aligned}$$

นอกจากนี้ยังได้ว่า $(p^*, 1-p^*)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(0,1)$ และ จุด $(1,0)$ ดังรูป



รูปที่ 2.7 ความหมายเชิงเรขาคณิตของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^*



รูปที่ 2.8 ความหมายเชิงเปรียบเทียบ p^* กับค่าเฉลี่ย

หากพิจารณาอัตราดอกเบี้ย r ของการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยงเป็นจุดหมุนของคานจะได้ว่า p^* และ $1-p^*$ เปรียบเสมือนแรงที่มีทิศทางตรงข้ามกันมากกระทำต่อปลายคานที่มีมวล u และ d ตามลำดับเพื่อให้คานอยู่ในสถานการณ์สมดุล

ตัวอย่างที่ 2.13 การประยุกต์ใช้ "ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง" ในเชิงการตัดสินใจลงทุนและวิเคราะห์กลยุทธ์ ในโลกจริง เช่น การจัดพอร์ตลงทุน มีดังนี้ ในการวิเคราะห์กลยุทธ์ลงทุนโดยเปรียบเทียบกับสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง สมมติผู้จัดการกองทุนรายหนึ่งมีตัวเลือกในการลงทุน

ระหว่าง

- หุ้น A ที่มีลักษณะไม่แน่นอน (ความเสี่ยงสูง)
- หรือเลือกลงทุนในพันธบัตรรัฐบาล (Risk-Free Asset) ที่ให้ผลตอบแทน $r = 3\%$ ต่อปี

จากการวิเคราะห์สถานการณ์เศรษฐกิจ ผู้จัดการกองทุนประเมินว่าในปีหน้าหุ้น A จะมีผลตอบแทนเป็นไปได้ 2 กรณี

สถานการณ์	ผลตอบแทนจากหุ้น A ($K(n)$)	ความน่าจะเป็นจริง (p)
ตลาดดี (Up)	+12%	60%
ตลาดแย่ (Down)	-4%	40%

การวิเคราะห์ด้วยแนวคิดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

1) คำนวณค่าคาดหวังจริงของหุ้น A

$$E[K(n)] = 0.6 \cdot 0.12 + 0.4 \cdot (-0.04) = 0.072 - 0.016 = 0.056 = 5.6\%$$

จากค่าคาดหวังนี้ ผู้จัดการกองทุนทราบว่า หุ้น A มีผลตอบแทนคาดหวังสูงกว่าสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง ($r = 3\%$)

2) ใช้แนวคิด "Risk Neutral Benchmarking" เพื่อตัดสินใจ

กำหนดให้ต้องการทราบว่า ในความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (คือ $E^*[K(n)] = r = 3\%$) นักลงทุนควรประเมินว่า หุ้นนี้มีความ "น่าสนใจ" หรือไม่ โดยดูว่าค่าคาดหวังจริงสูงกว่า benchmark หรือไม่

- ถ้า $E[K(n)] > E^*[K(n)] = r \rightarrow$ นักลงทุนจะมีแรงจูงใจลงทุนในหุ้น
- ถ้า $E[K(n)] < r \rightarrow$ นักลงทุนควรหลีกเลี่ยง (แม้บางสถานการณ์จะได้กำไรสูง)

ดังนั้น ข้อสรุปเชิงกลยุทธ์ คือ

- หุ้น A มีผลตอบแทนคาดหวังสูงกว่าอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง ($5.6\% > 3\%$)
- แม้มีความเสี่ยง แต่ผู้จัดการกองทุนอาจเลือกลงทุนในหุ้น A ได้ หากเขา ไม่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (เช่น ชอบความเสี่ยง หรือมีการกระจายความเสี่ยงดี)

□

จากตัวอย่างจะเห็นว่าแนวคิด "Risk Neutral Benchmarking" เพื่อตัดสินใจ มีประโยชน์ คือ

- 1) ช่วยประเมินว่าอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง "คุ้มค่า" กับความเสี่ยงหรือไม่
- 2) ใช้เป็นเกณฑ์เปรียบเทียบระหว่างสินทรัพย์เสี่ยงกับสินทรัพย์ปลอดภัย
- 3) ใช้จัดอันดับสินทรัพย์เพื่อตัดสินใจลงทุนตามพฤติกรรมของนักลงทุนแต่ละประเภท (risk-averse, risk-seeking, risk-neutral)

2.6 สมบัติมาร์ติงเกล

แนวคิดของมาร์ติงเกล (Martingale) มีจุดเริ่มต้นจากการศึกษาพฤติกรรมของเกมที่ยุติธรรม ซึ่งหมายถึงเกมที่ค่าคาดหวังของกำไรหรือขาดทุนในแต่ละครั้งมีค่าเป็นศูนย์ โดยที่ผลของการเดิมพันในอดีตไม่สามารถนำมาใช้ทำนายผลในอนาคตได้อย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ หากให้ X_i แทนมูลค่าของพอร์ตหรือเงินลงทุนหลังการเดิมพันครั้งที่ i และ $Z_1, Z_2, \dots, Z_i$ แทนผลลัพธ์ก่อนหน้า สมบัติมาร์ติงเกลจะกำหนดว่า

$$E[X_{i+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_i] = X_i$$

ซึ่งหมายความว่า ค่าคาดหวังของเงินลงทุนในรอบถัดไป เมื่อพิจารณาข้อมูลในอดีตทั้งหมด จะเท่ากับมูลค่าปัจจุบัน ซึ่งสะท้อนถึงแนวคิด "ตลาดที่มีประสิทธิภาพ" โดยข้อมูลในอดีตไม่สามารถใช้สร้างผลกำไรอย่างสม่ำเสมอในอนาคตได้

การนำแนวคิดมาร์ติงเกลไปใช้ในโลกรการลงทุน

ในเชิงการเงิน สมบัติมาร์ติงเกลถูกนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองราคาสินทรัพย์ เช่น ในแบบจำลองราคาทางการเงินแบบไร้อาร์บิทราจ (No-Arbitrage Pricing Theory) ซึ่งถือเป็นแกนหลักของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ โดยเฉพาะในแบบจำลองเวลาต่อเนื่อง เช่น แบบจำลอง Black-Scholes และแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (binomial tree model)

ตัวอย่างการประยุกต์

- **การประเมินราคาหุ้น:** หากราคาหุ้น S_t ปรับตัวตามกระบวนการมาร์ติงเกลภายใต้มาตรฐานความเสี่ยงเป็นกลาง (risk-neutral measure) จะได้ว่า ราคาของสินทรัพย์ในอนาคตมีค่าคาดหวังเท่ากับราคาปัจจุบันที่ปรับด้วยอัตราคิดลด (discount factor)

- **การบริหารพอร์ต:** นักลงทุนสามารถใช้มาร์ติงเกลเป็นเกณฑ์เพื่อตรวจสอบว่าพอร์ตของตนไม่มีแนวโน้มคาดหวังที่จะเพิ่มหรือลด ซึ่งสอดคล้องกับสถานะที่ถูกป้องกันความเสี่ยงอย่างเหมาะสม
- **การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์:** แบบจำลองราคาทั้งหลายที่อิงมาร์ติงเกล เช่น การใช้ความน่าจะเป็นแบบเสมือน (equivalent martingale measure) ช่วยให้สามารถตีราคาสินทรัพย์ที่มีความไม่แน่นอนได้อย่างเป็นระบบและหลีกเลี่ยงโอกาสการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

แนวคิดมาร์ติงเกลไม่เพียงแต่เป็นพื้นฐานสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็น แต่ยังมีบทบาทหลักในโลกการเงิน โดยเฉพาะในการสร้างแบบจำลองราคา การประเมินมูลค่า การบริหารพอร์ต และการออกแบบกลยุทธ์การลงทุนที่ตั้งอยู่บนสมมติฐานของตลาดที่มีประสิทธิภาพ การทำความเข้าใจสมบัตินี้จึงช่วยให้นักลงทุนและนักวิเคราะห์สามารถตีความพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในบริบทที่สอดคล้องกับหลักเศรษฐศาสตร์การเงินสมัยใหม่ได้อย่างลึกซึ้ง

บทนิยาม 2.23 ให้ $\{Z_i\}_{i=1}^n$ และ $\{X_i\}_{i=1}^n$ เป็นลำดับของตัวแปรเชิงสุ่มบนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω จะเรียก $\{X_i\}_{i=1}^n$ ว่า มาร์ติงเกล ที่เกี่ยวข้องกับ $\{Z_i\}_{i=1}^n$ ถ้า $E[X_{i+1} | Z_1 \dots Z_i] = X_i$ และเรียกลำดับ $\{Y_{i+1} = X_{i+1} - X_i\}$ ว่า ลำดับของผลต่างมาร์ติงเกล (martingale difference sequence) ซึ่ง $E[Y_{i+1} | Z_1 \dots Z_i] = 0$

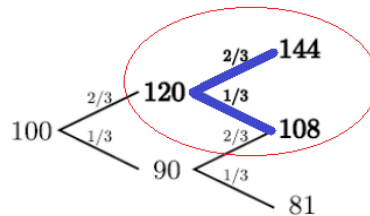
ต่อไปจะอธิบายมาร์ติงเกลสำหรับราคาหุ้น $S(n)$ จากทฤษฎีบท 2.22 ถ้าให้ p^* เป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะได้ว่าค่าคาดหวังของราคา $S(n)$ เท่ากับมูลค่าสะสมของเงิน $S(0)$ บาทสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง r เป็นเวลา n คาบ

$$\text{นั่นคือ} \quad E^*[S(n)] = S(0)(1+r)^n = S(0)e^{\delta n} \quad (2.44)$$

โดยที่ $r = E^*[K(n)]$ และ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสมมูลกับ r

เพื่อให้สามารถเข้าใจแนวคิดของมาร์ติงเกลได้ง่ายขึ้นขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.14 พิจารณาแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา เมื่อกำหนด $S(0)=100$ บาท, $u=0.2$, $d=-0.1$ และ $r=0.1$ โดยสูตร (2.43) คำนวณ $p^*=\frac{2}{3}$ ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จากข้อมูลที่กำหนดให้เขียนเป็นต้นไม้ทวิภาค ได้ดังแผนภาพ



เมื่อพิจารณาค่าของ $E^*[S(2)|S(1)]$ เมื่อกำหนด $S(1)=120$ หรือ $S(1)=90$ จากรูปที่ 2.9 และจากบทนิยามของค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข จะได้ $E^*[S(2)|S(1)]$ ดังนี้

ถ้า $S(1)=120$ จะได้ว่า

$$E^*[S(2)|S(1)=120] = \sum_{\omega} \omega p(S(2)=\omega | S(1)=120) = 144\left(\frac{2}{3}\right) + 108\left(\frac{1}{3}\right) = 132 = S(1)(1+r) \quad (1)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $S(1)=90$ จะได้ว่า

$$E^*[S(2)|S(1)=90] = \sum_{\omega} \omega p(S(2)=\omega | S(1)=90) = 108\left(\frac{2}{3}\right) + 81\left(\frac{1}{3}\right) = 99 = S(1)(1+r) \quad (2)$$

โดย (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$$E^*[S(2)|S(1)] = S(1)(1+r) \quad (3)$$

เมื่อคูณ $(1+r)^{-2}$ ตลอด (3) จะได้

$$E^*[S(2)(1+r)^{-2} | S(1)] = S(1)(1+r)^{-1} \quad (4)$$

นั่นคือ

$$E^*[\tilde{S}(2)|S(1)] = \tilde{S}(1) \quad (5)$$

เมื่อ $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$

เรียกความสัมพันธ์ตามสมการ (5) ว่า สมบัติมาร์ติงเกลของราคาหุ้น □

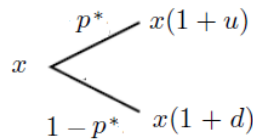
แนวคิดจากตัวอย่างข้างต้น ทำให้ทราบว่าเมื่อ คาบเวลาที่ 1 ได้ผ่านไปแล้ว และทราบราคาของหุ้นเท่ากับ $S(1)$ แล้ว ณ คาบเวลาที่ 2 ซึ่งเป็นเวลาในอนาคต (ราคาคาหุ้น $S(2)$ ยังไม่ทราบค่า) ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคาคาหุ้น $S(2)$ จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับราคาคาหุ้น $S(1)$ ภายใต้แบบจำลองราคาทวิภาค

แนวคิดดังกล่าวนำไปสู่ทฤษฎีบท 2.24 และสมบัติมาร์ติงเกลของราคาหุ้น นั่นคือ สำหรับคาบเวลาที่ n ใด ๆ หากสมมติว่า คาบเวลาที่ n ได้ผ่านไป แล้ว และทราบราคาของหุ้น $S(n)$ เราต้องการทราบว่าค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคา $S(n+1)$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับราคาหุ้น $S(n)$

ทฤษฎีบท 2.24 กำหนดให้ $S(n)$ เป็นราคาหุ้น ซึ่งเป็นราคาที่ทราบ ที่เวลา $t = n$ ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของ $S(n+1)$ จะเท่ากับ

$$E^*[S(n+1) | S(n)] = S(n)(1+r) \quad (2.45)$$

พิสูจน์ สมมติให้ $S(n) = x$ เมื่อเวลาผ่านไป n คาบ



รูปที่ 2.9 ต้นไม้ทวิภาคราคาหลังจากทราบราคาเป็นเวลา n

จะได้

$$E^*[S(n+1) | S(n) = x] = p^*x(1+u) + (1-p^*)x(1+d) = x \left(1 + \frac{p^*u + p^*(1+d)}{r} \right) \quad (2.46)$$

เนื่องจาก

$$E^*[K(1)] = p^*u + (1-p^*)d = r$$

ดังนั้น

$$E^*[S(n+1) | S(n) = x] = x(1+r) = S(n)(1+r) \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.24 ทำให้ทราบว่าค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคา $S(n+1)$ เมื่อเวลา n ได้ผ่านไป แล้ว (ทราบราคา $S(n)$ แล้ว) เท่ากับมูลค่าสะสมของราคา $S(n)$ ด้วยอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง r เป็นเวลา 1 คาบ

จากสมการ (2.45) ถ้าคูณด้วย $(1+r)^{-(n+1)}$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$E^*[S(n+1)(1+r)^{-(n+1)} | S(n)] = S(n)(1+r)^{-n} \quad (2.47)$$

กำหนดให้ $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ จะได้

$$E^*[\tilde{S}(n+1) | S(n)] = \tilde{S}(n) \quad (2.48)$$

ในที่นี้เรียก $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ ว่า ราคาหุ้นส่วนลด (discounted stock prices)

บทแทรก 2.25 (สมบัติของมาร์ติงเกล) กำหนดให้ $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ เป็นราคาหุ้นส่วนลด

จะได้ว่า $E^*[\tilde{S}(n+1) | S(n)] = \tilde{S}(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

จากบทแทรก 2.25 จะเห็นว่า ค่าคาดหวังของราคาหุ้นส่วนลดของคาบถัดไป (คาบเวลาที่ $n+1$) เมื่อทราบราคาในปัจจุบัน (คาบเวลาที่ n) จะเท่ากับราคาหุ้นส่วนลดในปัจจุบัน ซึ่งจะกล่าวได้ว่า ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ ก่อกำเนิดมาร์ติงเกล ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* และ กล่าวว่า p^* เป็น ความน่าจะเป็นมาร์ติงเกล

ตัวอย่างที่ 2.15 กำหนดอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้เท่ากับ 0.2 ต่อปี จงหาค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2) = 110$ บาท

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.23, $E^*[S(n+1) | S(n)] = S(n)(1+r)$

จะได้ $E^*[S(3) | S(2)] = S(2)(1+r) = 110(1+0.2) = 132$

ดังนั้น ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2) = 110$ บาท เท่ากับ 132 บาท □

ตัวอย่างที่ 2.16 (การตรวจสอบสถานะพอร์ตด้วยสมบัติมาร์ติงเกล) สมมตินักลงทุนถือหุ้น $S(0) = 100$ บาท โดยคาดว่าอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยราคาหุ้นเคลื่อนไหวตามตัวแบบต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลาและหากราคาหุ้นขึ้นจะขึ้นด้วยอัตรา $u = 0.2$ ต่อคาบและหากราคาหุ้นลงจะลงด้วยอัตรา $d = -0.1$ ต่อคาบ สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 4% ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน จงตรวจสอบสถานะพอร์ตด้วยสมบัติมาร์ติงเกล

วิธีทำ 1) คำนวณความน่าจะเป็นแบบความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

ในที่นี้ $u = 0.2$, $d = -0.1$, $r = 0.04 / 4 = 0.01$

จะได้ $p^* = \frac{r-d}{u-d} = \frac{0.01 - (-0.1)}{0.2 - (-0.1)} = \frac{0.11}{0.3} \approx 0.3667$ และ $1-p^* \approx 0.6333$

2) ราคาหุ้นและราคาหุ้นส่วนลดในตัวแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา

จากข้อมูลราคาของหุ้นเคลื่อนไหวตามตัวแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา เป็นดังตารางต่อไปนี้

$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
t=0	t=1	t=2
100	120	144
	90	108
		81

ต่อไปจะคำนวณราคาหุ้นส่วนลดในตัวเองแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$

$$\tilde{S}(0) = S(0)(1.01)^{-0} = S(0) = 100, \quad \tilde{S}(1) = S(1)(1.01)^{-1} \quad \text{และ} \quad \tilde{S}(2) = S(2)(1.01)^{-2}$$

ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังตารางต่อไปนี้

$\tilde{S}(0)$	$\tilde{S}(1)$	$\tilde{S}(2)$
t=0	t=1	t=2
100	118.81	141.16
	89.11	105.87
		79.40

3) การตรวจสอบสมบัติมาร์ติงเกล $E^*[\tilde{S}(n+1) | S(n)] = \tilde{S}(n)$

$$E^*[\tilde{S}(1) | S(0) = 100] = 0.3667(118.81) + 0.6333(89.11) = 100.00 = \tilde{S}(0)$$

$$E^*[\tilde{S}(2) | S(1) = 120] = 0.3667(141.16) + 0.6333(105.87) = 118.81 = \tilde{S}(1)$$

$$E^*[\tilde{S}(2) | S(1) = 90] = 0.3667(105.87) + 0.6333(79.40) = 89.11 = \tilde{S}(1)$$

จากผลการคำนวณจะเห็นว่า $E^*[\tilde{S}(n+1) | S(n)] = \tilde{S}(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2$

ดังนั้น ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ จึงมี สมบัติมาร์ติงเกล ภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง (p^*) ซึ่งแปลความได้ว่า

- 1) พอร์ตการลงทุนที่อิงจากหุ้นนี้ ไม่ได้มีแนวโน้มว่าจะมีกำไรหรือขาดทุนโดยเฉลี่ยในอนาคต — กล่าวคือ ค่าคาดหวังของมูลค่าพอร์ตในอนาคตจะเท่ากับค่าปัจจุบัน
- 2) เราสามารถใช้ ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ เป็น เครื่องมือวิเคราะห์ ว่า พอร์ตของเรามีการป้องกันความเสี่ยงอย่างสมบูรณ์หรือไม่
 - ถ้า $\tilde{S}(n)$ เป็นมาร์ติงเกล $\rightarrow$ พอร์ตมีสถานะป้องกันความเสี่ยงสมดุล
 - ถ้าไม่เป็น $\rightarrow$ อาจมีช่องว่างหรือความเสี่ยงที่ยังไม่ได้ถูกป้องกัน
- 3) สามารถใช้ สมบัติมาร์ติงเกลของ $\tilde{S}(n)$ เป็น พื้นฐานในการสร้างกลยุทธ์ลงทุนแบบ Delta-

Neutral หรือ Portfolio Immunization

- เพราะกลยุทธ์เหล่านี้ต้องการให้พอร์ตไม่ตอบสนองเชิงกำไร/ขาดทุนต่อการเคลื่อนไหวของราคาในอนาคต
- การที่ราคาหุ้นส่วนลดมีสมบัติมาร์ติงเกลช่วยยืนยันว่า พอร์ตจะไม่คาดหวังผลตอบแทนเกินกว่าความเป็นจริงในเชิงสถิติ □

หมายเหตุ: การลงทุนแบบ Delta-Neutral เป็นกลยุทธ์ที่ปรับพอร์ตให้ไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ในระยะสั้น โดยกำหนดให้ค่า Δ ของพอร์ตโดยรวมเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่า Δ ของพอร์ต คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าพอร์ตเมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงเปลี่ยนแปลงไป 1 หน่วย กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ เมื่อ V คือมูลค่าพอร์ต และ S คือราคาสินทรัพย์อ้างอิง เช่น หุ้น หากพอร์ตมีค่า $\Delta = 0$ แสดงว่ามูลค่าพอร์ตไม่เปลี่ยนแปลงหากราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

2.7 ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์

ในการกำหนดราคาสินทรัพย์ทางการเงิน เช่น หุ้น ตราสารหนี้ หรือออปชัน หลักการสำคัญที่รับรองความสมเหตุสมผลของราคา คือ “การไม่มีช่องทางในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง” หรือที่เรียกว่า หลักการปราศจากการค้ากำไร (no-arbitrage principle)

ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ เป็นเสาหลักสำคัญของการเงินเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการกำหนดราคาสินทรัพย์อย่างเหมาะสมภายใต้แบบจำลองความน่าจะเป็น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ทฤษฎีบทนี้แสดงให้เห็นว่า การไม่มีอาร์บิทราจมีความสมมูลกับการมีอยู่ของความน่าจะเป็นที่เรียกว่า “ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง” (risk-neutral probability) ซึ่งสามารถนำมาใช้ประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ในแบบจำลองต่าง ๆ

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงแนวคิดนี้ผ่านกรอบของ แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นสำคัญในการพัฒนาสู่แบบจำลองที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น เช่น แบบจำลอง Black-Scholes ที่ใช้ในตลาด

การเงินจริง ทฤษฎีบทนี้ไม่เพียงแต่มีความสำคัญในเชิงทฤษฎีเท่านั้น แต่ยังมี บทบาทในการพัฒนาเครื่องมือกำหนดราคาและบริหารความเสี่ยงในตลาดทุนทั่วโลก

พิจารณาแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคที่มี $K(n) = \begin{cases} u; \uparrow \\ d; \downarrow \end{cases}$ และ r เป็นอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยง (ตราสารหนี้) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างหลักการปราศจากการค้ากำไร กับ d, u และ r ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.26 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคจะสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรก็ต่อเมื่อ $d < r < u$

พิสูจน์ เนื่องจากต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา ก่อกำเนิด ต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา ดังนั้นเพียงพอที่จะพิจารณาเพียงต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เท่านั้น

($\Rightarrow$) สมมติว่าแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร และสมมติโดยให้เกิดข้อขัดแย้งว่า $r \leq d$ หรือ $r \geq u$

ถ้า $r \leq d$ ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้ ยืมเงินจำนวน $S(0)$ บาท อัตราดอกเบี้ย r จากนั้นนำเงินที่ได้ ไปซื้อหุ้น 1 หุ้น ซึ่งจะทำให้ได้ $V(0)=0$ รอจนถึงเวลา $t=1$ ให้ทำธุรกรรมได้ดังนี้ ขายหุ้นที่มีอยู่ 1 หุ้น รับเงิน $S(1)$ บาทและคืนเงินที่ยืมมาเป็นเงิน $S(0)(1+r)$ บาท

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นจะได้ } V(1) &= S(1) - S(0)(1+r) = \begin{cases} (1+u)S(0) - S(0)(1+r); \uparrow \\ (1+d)S(0) - S(0)(1+r); \downarrow \end{cases} \\ &= S(0) \begin{cases} u-r; \uparrow \\ d-r; \downarrow \end{cases} > 0 \quad (\because r \leq d < u \Rightarrow 0 \leq d-r < u-r) \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

ถ้า $r \geq u$ ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้ ยืมหุ้น 1 หุ้นมาขาย รับเงิน $S(0)$ บาท นำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ย r ซึ่งจะทำให้ได้ $V(0)=0$ รอจนถึงเวลา $t=1$ ให้ทำธุรกรรมได้ดังนี้ ขายตราสารหนี้รับเงิน $S(0)(1+r)$ บาท ซื้อหุ้นคืน 1 หุ้นจ่ายเงิน $S(1)$ บาท

$$\text{ดังนั้น } V(1) = S(0)(1+r) - S(1) = S(0) \begin{cases} r-u; \uparrow \\ r-d; \downarrow \end{cases} > 0 \quad (\because d < u \leq r \Rightarrow 0 \leq r-u < r-d)$$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้งสองกรณีจึงทำให้สรุปได้ว่า $d < r < u$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $d < r < u$ จะแสดงว่า แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ให้ $[x, y]$ เป็นพอร์ตการลงทุน ซึ่ง $V(0) = 0$ จะได้

$$xS(0) + yA(0) = 0 \quad (1)$$

จากสมการ (1) ทำให้ $[x, y] = [x, -\frac{S(0)}{A(0)}x]$ และเนื่องจาก $V(1) = xS(1) + yA(1)$ และ $V(1) \geq 0$

(เงื่อนไข solvency) ทำให้ได้

$$V(1) = \begin{cases} x(1+u)S(0) + \left(-\frac{S(0)}{A(0)}x\right)A(0)(1+r) & ; \uparrow \\ x(1+d)S(0) + \left(-\frac{S(0)}{A(0)}x\right)A(0)(1+r) & ; \downarrow \end{cases} = xS(0) \begin{cases} u-r & ; \uparrow \\ d-r & ; \downarrow \end{cases} \geq 0 \quad (2)$$

เนื่องจาก $d < r < u \Rightarrow d-r < 0 < u-r$ ส่งผลให้ $x = 0$ ดังนั้นได้ $V(1) = 0$

จึงสามารถสรุปได้ว่า แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร $\square$

ทฤษฎีบท 2.27 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคจะสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ก็ต่อเมื่อ มีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* ซึ่ง $0 < p^* < 1$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก ตัวอย่างที่ 2.12 และ ทฤษฎีบท 2.26 $\square$

ทฤษฎีบท 2.28 (ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์)

หลักการปราศจากการค้ากำไร สมมูลกับ การมีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง P^* บนปริภูมิความน่าจะเป็นของสถานการณ์ Ω ซึ่ง $P^*(\omega) > 0$ สำหรับแต่ละสถานการณ์ $\omega \in \Omega$ และราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$E^*[\tilde{S}(n+1) | S(n)] = \tilde{S}(n)$$

สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

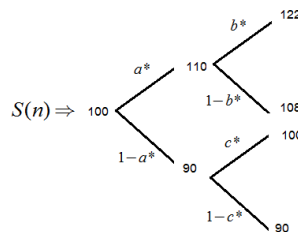
โดย บทแทรก 2.25 และทฤษฎีบท 2.28 ทำให้ได้ว่าทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์เป็นทฤษฎีที่แสดงความสมมูลระหว่างหลักการปราศจากการค้ากำไรกับสมบัติมาร์ติงเกล นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2.17 กำหนดอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้เท่ากับ 8 % ต่อปี และสมมติว่า ราคาหุ้นมีการเคลื่อนไหวตามสถานการณ์ที่เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	122
ω_2	100	110	108
ω_3	100	90	100
ω_4	100	90	90

จงตรวจสอบว่าการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นตามสถานการณ์ดังกล่าวสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรหรือไม่

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $r = 0.1$ และจากตารางแสดงการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามารถเขียนแทนด้วยแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



เมื่อ a^* , b^* และ c^* เป็นความน่าจะเป็นความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงแต่ละช่วงของต้นไม้ดังรูป จากแผนภาพคำนวณ a^* , b^* และ c^* ได้ดังนี้

$$a^* = \frac{0.08 - (-10/100)}{10/100 - (-10/100)} = 0.9, \quad b^* = \frac{0.08 - (-2/110)}{(12/110) - (-2/110)} \approx 0.7714 \text{ และ}$$

$$c^* = \frac{0.08 - 0}{(10/90) - 0} = 0.72$$

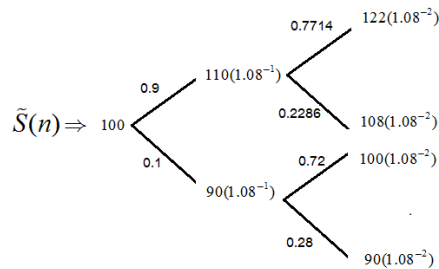
จะได้ $P^*(\omega_1) = (a^*)(b^*) = 0.9(0.7714) = 0.69426$

$$P^*(\omega_2) = (a^*)(1 - b^*) = 0.9(0.2286) = 0.20574$$

$$P^*(\omega_3) = (1 - a^*)(c^*) = 0.1(0.72) = 0.072$$

$$P^*(\omega_4) = (1 - a^*)(1 - c^*) = 0.1(0.28) = 0.028$$

ดังนั้น มีความน่าจะเป็นความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง P^* ซึ่ง $P^*(\omega) > 0$ สำหรับทุก ๆ $\omega \in \Omega$ ต่อไปคำนวณราคาหุ้นส่วนลดจาก $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1$ ซึ่งจะได้แผนภาพต้นไม้ของราคาส่วนลด $\tilde{S}(n)$ ดังนี้



จากแผนภาพคำนวณ $E^*[\tilde{S}(n+1)|S(n)]$ สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1$ ได้ดังนี้

$$E^*[\tilde{S}(1)|S(0) = 100] = 0.9(110)(1.08^{-1}) + 0.1(90)(1.08^{-1}) = 100 = \tilde{S}(0)$$

$$E^*[\tilde{S}(2)|S(1) = 110] = 0.7714(122)(1.08^{-2}) + 0.2286(108)(1.08^{-2})$$

$$= 101.8515 = 108(1.08^{-1}) = \tilde{S}(1)$$

$$E^*[\tilde{S}(2)|S(1) = 90] = 0.72(100)(1.08^{-2}) + 0.28(80)(1.08^{-2})$$

$$= 83.33 = 90(1.08^{-1}) = \tilde{S}(1)$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ การเคลื่อนไหวของราคาหุ้นตามสถานการณ์ดังกล่าวสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร □

2.8 แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค

แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค (Trinomial Tree Price Model) เป็นการขยายแนวคิดจากแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคของ Cox, Ross และ Rubinstein โดยเพิ่มจำนวนกิ่งในแต่ละช่วงเวลาจากเดิมที่ราคาสามารถ "เพิ่มขึ้น" หรือ "ลดลง" เท่านั้น ให้สามารถ "เพิ่มขึ้น" "ลดลง" หรือ "ทรงตัว" ได้ นั่นหมายความว่า การเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ในแต่ละช่วงเวลาสามารถเกิดขึ้นได้ 3 ทางเลือก ทำให้แบบจำลองมีความยืดหยุ่นและสามารถสะท้อนพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในโลกจริงได้ดียิ่งขึ้น แบบจำลองนี้ได้รับความนิยมในวงการการเงิน โดยเฉพาะในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชัน ซึ่งมีลักษณะซับซ้อนหรือมีเงื่อนไขเฉพาะ เช่น ออปชันแบบอเมริกัน หรือออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้หลายช่วงเวลา การใช้แบบจำลองต้นไม้ไตรภาคช่วยให้การประมาณค่ามีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อเทียบกับแบบจำลองสองกิ่ง โดยเฉพาะเมื่อจำนวนช่วงเวลาในแบบจำลองมีจำกัด

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงโครงสร้างของแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค พร้อมทั้งเงื่อนไขที่ใช้ในการสร้างโมเดล ตลอดจนการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการนำไปใช้ในการกำหนดราคาสินทรัพย์ทางการเงิน

แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค เป็นแบบจำลองที่ขยายแนวความคิดของแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคของ $K(n)$ จากต้นไม้ 2 กิ่ง ไปยังต้นไม้ 3 กิ่ง ดังนั้นการเคลื่อนไหวของราคาจะไม่ได้มีเฉพาะแค่ขึ้นกับลงเท่านั้น แต่จะมีการเคลื่อนไหวของราคาที่อยู่ระหว่าง 2 กิ่งนั้น คือมีการเคลื่อนไหวของราคาเป็นไปได้ 3 ทาง โดยแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค มีเงื่อนไขดังนี้

เงื่อนไข tt-1 กำหนดให้อัตราผลตอบแทนต่อคาบ $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน นิยามในรูป

$$K(n) = \begin{cases} u & ; \text{probability } p \\ m & ; \text{probability } q \\ d & ; \text{probability } 1 - p - q \end{cases} \quad (2.49)$$

เมื่อ $d < m < u$ และ $0 < p, q, p + q < 1$

เช่นเดียวกับในแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค u และ d แทนการเคลื่อนไหวของราคาขึ้นและลงตามลำดับ ในขณะที่ m แทนการเคลื่อนไหวของราคาที่อยู่ระหว่างราคาที่เคลื่อนไหวขึ้นและลง ถ้า $m = 0$ จะเรียกว่า *ศูนย์กลางหลัก* (typical neutral)

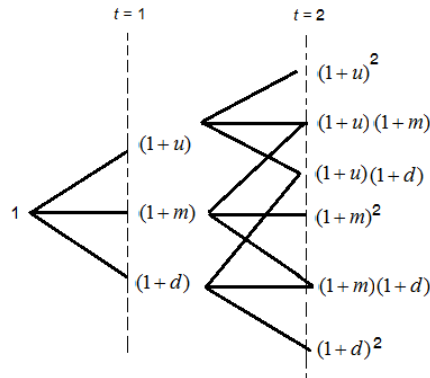
เงื่อนไข tt-2 กำหนดให้ r เป็นอัตราผลตอบแทนต่อคาบของสินทรัพย์ไม่มีความเสี่ยงซึ่งคงที่ทุกคาบเวลาและ $d < r < u$

เนื่องจาก $S(1) = (1 + K(1))S(0)$ โดยเงื่อนไข tt-1 จะได้ $S(1)$ ดังนี้

$$S(1) = \begin{cases} S(0)(1 + u) & ; \text{probability } p \\ S(0)(1 + m) & ; \text{probability } q \\ S(0)(1 + d) & ; \text{probability } 1 - p - q \end{cases} \quad (2.50)$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงเขียนต้นไม้ไตรภาคสำหรับ $S(2)$ เมื่อสมมติว่าตลาดสอดคล้องตามเงื่อนไข tt-1 และ tt-2

วิธีทำ จากเงื่อนไข tt-1 เขียนแผนภาพต้นไม้ไตรภาคสำหรับตัวประกอบเงินสะสมได้ดังนี้



รูปที่ 2.10 ต้นไม้ไตรภาคตัวประกอบเงินสะสมของราคาในเวลา $t = 2$

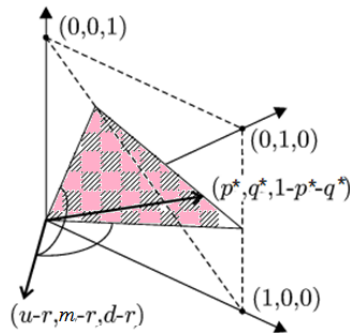
จากแผนภาพ ได้

$$S(2) = \begin{cases} S(0)(1+u)^2 & ; \text{probability } p^2 \\ S(0)(1+u)(1+m) & ; \text{probability } 2pq \\ S(0)(1+u)(1+d) & ; \text{probability } 2p(1-p-q) \\ S(0)(1+m)^2 & ; \text{probability } q^2 \\ S(0)(1+m)(1+d) & ; \text{probability } 2(1-p-q)q \\ S(0)(1+d)^2 & ; \text{probability } (1-p-q)^2 \end{cases} \quad \square$$

จากเงื่อนไข สำหรับค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง $E^*[K(n)] = r$ จะได้ว่าความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* และ q^* สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

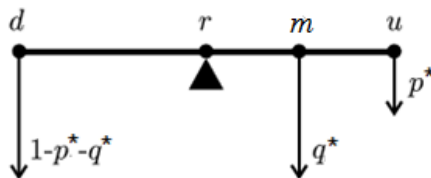
$$p^*(u-r) + q^*(m-r) + (1-p^*-q^*)(d-r) = 0 \quad (2.51)$$

เราสามารถพิจารณาสามสิ่งอันดับ $(p^*, q^*, 1-p^*-q^*)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(u-r, m-r, d-r)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของกำไร(ขาดทุน) ต่อหุ้นต่อคาบเวลา นั้นหมายความว่า $(p^*, q^*, 1-p^*-q^*)$ เป็นจุดบนรอยตัดระนาบระหว่างระนาบ $\{(a, b, c) \mid a, b, c \geq 0, a+b+c=1\}$ กับระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ของกำไร $(u-r, m-r, d-r)$ ตามรูป ดังนี้



รูปที่ 2.11 เรขาคณิตของความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง

เงื่อนไข tt-2 ยืนยันได้ว่ารอยตัดระหว่างระนาบสามเหลี่ยมกับระนาบซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ของกำไร $(u-r, m-r, d-r)$ ไม่เป็นเซตว่าง เนื่องจากเวกเตอร์ $(u-r, m-r, d-r)$ ไม่ผ่านอวกาศที่เป็นบวก (positive octant) จะได้ว่ามีความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงเป็นจำนวนอนันต์ค่าอยู่บนเส้นตรงซึ่งเป็นรอยตัดตามรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.12 อธิบายความหมายของความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงเชิงกลศาสตร์

นอกจากการพิจารณาความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงในเชิงเรขาคณิตตามรูปที่ 2.10 แล้ว ยังสามารถพิจารณาความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงในเชิงกลศาสตร์ บนคานสมดุล ซึ่งมี r เป็นจุดหมุน โดยที่ q^* เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m ซึ่งอยู่ระหว่างวัตถุปลายคานทั้งสองมวล d และ u และมีแรง $1-p^*-q^*$ และ p^* ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.12

ตัวอย่างที่ 2.19 กำหนดให้ $u = 0.2$, $m = 0$, $d = -0.1$ และ $r = 0$ จงหาความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ จากสมการ (2.51), $p^*(u-r) + q^*(m-r) + (1-p^*-q^*)(d-r) = 0$

โดยการแทนค่า ได้ $p^*(0.2-0) + q^*(0-0) + (1-p^*-0)(-0.1-0) = 0$

โดยการแก้สมการ ได้ $p^* = 1/3$ และ $q^* = s$ สำหรับทุก ๆ $0 < s < 1$

เนื่องจาก $0 < p^* + q^* < 1$ ดังนั้น $0 < s < \frac{2}{3}$ ดังนั้นความน่าจะเป็นจะเป็นค่ากลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $\left\{ (p^*, q^*) = \left(\frac{1}{3}, s \right) \mid s \in (0, 2/3) \right\}$

การวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์

ผลลัพธ์ข้างต้นแสดงให้เห็นว่า มีชุดความน่าจะเป็นค่ากลางต่อความเสี่ยง (p^*, q^*) เป็นจำนวนอนันต์ โดยมีลักษณะเป็นเส้นตรงบนระนาบ ซึ่งสามารถวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์ได้ดังนี้

- แบบจำลองมีความยืดหยุ่นสูงในการประมาณพฤติกรรมของตลาดจริง

ความน่าจะเป็น q^* สามารถปรับค่าได้ในช่วง $(0, \frac{2}{3})$ เพื่อให้สอดคล้องกับสถานการณ์ของสินทรัพย์ เช่น หากสินทรัพย์มีแนวโน้มทรงตัวน้อยกว่าขึ้นหรือลง ผู้ใช้แบบจำลองสามารถเลือก q^* ที่สูงขึ้นเพื่อสะท้อนลักษณะนี้

- เป็นเครื่องมือสนับสนุนการตัดสินใจลงทุนแบบ *hedging* หรือ *delta-neutral*

ความยืดหยุ่นของ p^* และ q^* ช่วยให้นักวิเคราะห์สามารถกำหนด hedge ratio ได้อย่างเหมาะสมกับลักษณะของราคาสินทรัพย์ในตลาดจริง

- สนับสนุนแนวคิดที่ว่า ตลาดไม่จำเป็นต้องมี *risk-neutral probability* เดียว

ในกรณีนี้มีชุดค่าความน่าจะเป็นที่ทำให้มาร์ติงเกลเป็นจริงได้หลายค่า ซึ่งชี้ให้เห็นว่าการประเมินราคาตราสารอาจอยู่ในช่วง ไม่ใช่เพียงค่าเดียวแบบ deterministic

- ใช้วิเคราะห์ *best-case / worst-case* ของพอร์ตได้

การเลือก q^* ใกล้ 0 หรือ $2/3$ สามารถใช้เป็นกรณีศึกษาสำหรับวิเคราะห์ผลกระทบสูงสุดและต่ำสุดต่อพอร์ตในสถานการณ์ต่าง ๆ

ดังนั้น จะเห็นว่าชุดความน่าจะเป็นค่ากลางต่อความเสี่ยง

$$\left\{ (p^*, q^*) = \left(\frac{1}{3}, s \right) \mid s \in (0, 2/3) \right\}$$

แสดงให้เห็นถึงความยืดหยุ่นในการกำหนดความน่าจะเป็นภายใต้แบบจำลองต้นไม้ไตรภาค และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดกลยุทธ์ลงทุน การป้องกันความเสี่ยง และการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นของราคาสินทรัพย์ในระยะสั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ □

หมายเหตุ: การลงทุนแบบ Hedging หมายถึง การจัดพอร์ตหรือทำธุรกรรมเพื่อลดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ เช่น การซื้อออปชันหรือใช้ตราสารอนุพันธ์เพื่อชดเชยการเปลี่ยนแปลงราคาของสินทรัพย์หลัก

บทสรุปท้ายบทที่ 2

บทที่ 2 ได้อธิบายแบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการอธิบายพฤติกรรมราคาของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริบทของตลาดทุนและตราสารอนุพันธ์ เนื้อหาในบทนี้ครอบคลุมตั้งแต่กลไกราคาและผลตอบแทน ไปจนถึงแบบจำลองโครงสร้างต้นไม้ การวัดความเสี่ยง และทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการกำหนดราคาสินทรัพย์

- **กลไกราคาและผลตอบแทน:** ราคาสินทรัพย์มีลักษณะไม่แน่นอนและเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรสุ่ม เช่น ขาวเศรษฐกิจ หรือพฤติกรรมนักลงทุน ตัวอย่างเช่น เมื่อมีข่าวดีเกี่ยวกับการขยายสนามบินของ A ราคาหุ้นจะมีแนวโน้มปรับขึ้น และสามารถจำลองสถานการณ์นี้ด้วยแบบจำลองต้นไม้ เพื่อพิจารณาความน่าจะเป็นของผลตอบแทนที่เปลี่ยนไปตามสถานการณ์ต่าง ๆ
- **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาคและไตรภาค:** เป็นเครื่องมือสำคัญในการกำหนดราคาสินทรัพย์ โดยสามารถนำไปใช้ในการประเมินราคาออปชัน เช่น ในกรณีศึกษาของหุ้น A นักวิเคราะห์สามารถใช้ **Binomial Tree Model** เพื่อประเมินมูลค่าออปชันที่มีอายุ 3 เดือน ราคาหุ้นปัจจุบัน 70 บาท และราคาใช้สิทธิ 72 บาท เพื่อพิจารณาว่าจะลงทุนในออปชันหรือไม่ภายใต้สถานการณ์ราคาที่อาจ “ขึ้น” หรือ “ลง” ในแต่ละช่วงเวลา
- **ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง และ สมบัติมาร์ติงเกล:** แนวคิดเหล่านี้ช่วยให้นักลงทุนสามารถใช้ "มาตรวัดราคายุติธรรม" โดยไม่ขึ้นกับทัศนคติส่วนตัว ตัวอย่างเช่น ในการลงทุนหุ้น B ที่มีความผันผวนต่ำ นักลงทุนอาจประเมินว่าราคาในอนาคตภายใต้ risk-neutral measure จะเท่ากับราคาปัจจุบันที่ถูกคิดลด ซึ่งช่วยให้สามารถวางกลยุทธ์การลงทุนแบบ hedge หรือปรับน้ำหนักพอร์ตตามมูลค่าที่แท้จริง

- **ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์:** เป็นกรอบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ตรวจสอบว่าแบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถใช้ได้จริงหรือไม่ โดยตรวจสอบว่าไม่มีโอกาสค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage) ตัวอย่างเช่น หากราคาคอลอปชันที่คำนวณได้จากแบบจำลอง Binomial Tree ไม่สอดคล้องกับราคาตลาด อาจเป็นสัญญาณว่ามีโอกาสทำกำไรหรือแบบจำลองยังไม่สมบูรณ์

การประยุกต์ใช้จริงในวงการการเงิน

- **ธนาคารเพื่อการลงทุน** ใช้แบบจำลองเหล่านี้เพื่อสร้างผลิตภัณฑ์อนุพันธ์ที่ซับซ้อน เช่น Barrier Options หรือ Asian Options
- **ผู้จัดการกองทุน** ใช้ Martingale property เพื่อตรวจสอบกลยุทธ์ Dynamic Hedging และทำให้แน่ใจว่าผลตอบแทนที่คาดหวังไม่เบี่ยงเบนจากสมมติฐานพื้นฐาน
- **นักลงทุนรายย่อย** สามารถใช้แบบจำลองต้นไม่ร่วมกับการวิเคราะห์ปัจจัยพื้นฐานและเทคนิค เช่น MACD หรือ RSI เพื่อประเมินโอกาสการซื้อขายในช่วงเวลาสั้น

แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่องจึงเป็นเครื่องมือที่มีความยืดหยุ่นและทรงพลัง ไม่เพียงแต่ในเชิงทฤษฎีแต่ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้จริงได้ในหลากหลายบริบท ทั้งในการวางแผนการลงทุน การกำหนดราคาสินทรัพย์ และการบริหารความเสี่ยง ทำให้ผู้เรียนมีพื้นฐานที่มั่นคงในการวิเคราะห์ตลาดและตัดสินใจลงทุนอย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities.

Journal of Political Economy, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>

[2] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.

[https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)

[3] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(1), 463–520.

<https://doi.org/10.1007/BF01450498>

[4] Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3), 381–408.

[https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90043-3](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-3)

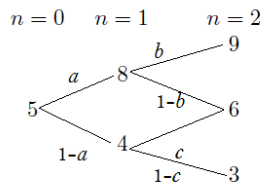
[5] Hull, J. C. (2017). *Options, futures, and other derivatives* (9th ed.). Pearson.

[6] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.

<https://doi.org/10.2307/3003143>

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1) พิจารณาแบบจำลองราคาแบบเวลาไม่ต่อเนื่องของหุ้น S ที่ประกอบด้วย 2 คาบเวลา ดังแผนภาพ



และกำหนดให้ r เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อคาบของตราสารหนี้ A จงหา a , b และ c ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงในเทอมของ r พร้อมทั้งตรวจสอบว่าแบบจำลองราคาสอดคล้องกับทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์หรือไม่

2) พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	100	120	120	125
ω_2	100	90	120	110
ω_3	100	90	110	120

2.1) จากสถานการณ์ที่กำหนดให้จงเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคา

2.2) จงคำนวณหา $K(n)$

2.3) จงคำนวณหา $k(n)$ เมื่อกำหนดจ่ายเงินปันผล 2 บาทต่อหุ้นต่อคาบ

2.4) สมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ ω_1 , ω_2 และ ω_3 เป็น 0.5, 0.3 และ

0.2 ตามลำดับ จงหาค่าคาดหวังของ $K(1,3)$

3) สมมติว่าราคาหุ้น S เป็นไปตามแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค และ กำหนดให้

$$K(n) = \begin{cases} 0.2 & \text{; probability } p \\ 0.05 & \text{; probability } 1-p \end{cases}$$

กำหนดให้ $S(0) = 100$ ถ้าความน่าจะเป็นจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงเท่ากับ 0.6 จงหาค่าคาดหวัง
ความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2)$ บาท

4) จากโจทย์ข้อ 3) จงหาราคาหุ้นส่วนลด (discounted stock prices) ของคาบเวลาที่ 3

5) พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1 , ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	110
ω_2	90	80	90
ω_3	90	110	99

จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ จงเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาดังกล่าว

6) จากข้อ 5) โดยสมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ เป็น 0.5, 0.2 และ 0.3
ตามลำดับ จงคำนวณค่าของ $E[K(t)]$ และ $E[k(t)]$ ในกรณีต่อไปนี้

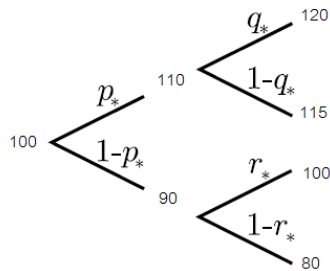
6.1) ไม่มีการจ่ายเงินปันผล

6.2) มีการจ่ายเงินปันผล 1.50 บาทต่อหุ้น

7) กำหนดให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ A ซึ่ง $100A(2) - A(0) = 5,568$, $A(0) = 50$
และสมมติว่าราคาของหุ้น S เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ คือ ω_1 , ω_2 , ω_3 และ ω_4 ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	120
ω_2	100	110	115
ω_3	100	90	100
ω_4	100	90	80

ให้ p^* , q^* และ r^* ความน่าจะเป็นจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงในกิ่งราคาของแต่ละช่วงดังรูป



จงแสดงว่าการกำหนดราคาของหุ้นสอดคล้องหลักการปราศจากการค้ากำไร หรือไม่

8) สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ d ที่ทำให้

$$S(1) = \begin{cases} 90 & ; \uparrow \\ 73 & ; \downarrow \end{cases} \text{ และ } S(2) = 89 & ; \downarrow \downarrow$$

9) สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค และ $K(n) = \begin{cases} u & ; \uparrow \\ d & ; \downarrow \end{cases}$ ซึ่งทำให้

$$S(2) = \begin{cases} 112 & ; \uparrow \uparrow \\ 104 & ; \uparrow \downarrow \text{ or } \downarrow \uparrow \\ 96 & ; \downarrow \downarrow \end{cases} \text{ ถ้า } S(0) = 100 \text{ แล้ว จงหา } S(3)$$

10) สำหรับแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค กำหนดให้ $u = 0.12$, $m = 0.05$, $d = 0$ และ $r = 0.1$ จงหาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

11) สมมติให้อัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 3.5 % ต่อปี และราคาปัจจุบันของหุ้นบริษัทหนึ่ง $S(0) = 20$ บาท และอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นแต่ละชั่ววินาทีเท่ากับ

$$K(n) = \begin{cases} 0.08 & ; \uparrow \\ -0.02 & ; \downarrow \end{cases} \text{ สำหรับทุก ๆ } n = 1, 2, 3, \dots \text{ จงแสดงว่า สำหรับทุก ๆ } n = 0, 1, 2, 3 \text{ การ}$$

เคลื่อนไหวของราคาหุ้น $S(n)$ สอดคล้องกับสมบัติมาร์ติงเกล

12) กำหนดให้ A เป็นราคาของตราสารหนี้ ซึ่ง $A(0) = 50$ บาท และอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นของตราสารหนี้ เท่ากับ 4% ต่อปี สมมติว่าราคาของหุ้น S เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ คือ ω_1 , ω_2 , ω_3 และ ω_4 ดังนี้ สำหรับ $t = 0, 1, 2$ (ปี)

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	120
ω_2	90	100	102
ω_3	90	80	100
ω_4	90	80	75

12.1) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง $P^*(\omega_k)$ สำหรับทุกๆ

$k = 1, 2, 3, 4$

12.2) จงวิเคราะห์แนวโน้มของราคาหุ้นจาก $E[S(2)]$

12.3) จากการวิเคราะห์แนวโน้มของราคาหุ้นในข้อ 12.2) หากนักลงทุนลงทุนในหุ้นควรเลือกเปิดสถานะชอร์ต หรือ สถานะลอง กำหนดให้วงเงินในการทำชอร์ตหรือลองเท่ากับ 100,000 บาท พร้อมทั้งหาค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงจากการลงทุน (ของพอร์ตการลงทุน)

13) (การตรวจสอบสมบัติมาร์ติงเกลของราคาหุ้น) ราคาหุ้นตัวหนึ่งมีมูลค่าเริ่มต้นที่ $S_0 = 100$ บาท โดยมีการเคลื่อนไหวตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบ ดังนี้ หากราคาหุ้นขึ้น จะเพิ่มขึ้น 20% ต่อคาบ หากราคาหุ้นลง จะลดลง 10% ต่อคาบ กำหนดอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง $r = 0.05$ ต่อคาบ

13.1) เขียนแผนภาพต้นไม้ของราคาหุ้น S_t สำหรับ $t = 0, 1, 2$

13.2) คำนวณความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^*

13.3) เขียนแผนภาพต้นไม้ของราคาหุ้นส่วนลดและตรวจสอบว่าตรวจสอบสมบัติมาร์ติงเกลของราคาหุ้นส่วนลด

14) (วิเคราะห์พอร์ต Delta-Neutral ด้วยการลงทุนสองสินทรัพย์) สมมติว่าคุณลงทุนในหุ้นสองตัว คือ A และ B โดยข้อมูลมีดังนี้

- หุ้น A มีราคาปัจจุบัน $S_A = 100$ และค่า Delta ต่อการเปลี่ยนแปลง +1
- หุ้น B มีราคาปัจจุบัน $S_B = 200$ และ ค่า Delta ต่อการเปลี่ยนแปลง -0.5

14.1) ถ้าคุณต้องการสร้างพอร์ตที่มีค่า Delta รวมเป็นศูนย์ (Delta-Neutral) ควรลงทุนในหุ้น A และ B ในสัดส่วนเท่าใด

14.2) หากราคาหุ้น A เพิ่มขึ้น 10 บาท ค่าพอร์ตจะเปลี่ยนแปลงเท่าใด

14.3) วิเคราะห์ว่า Delta-Neutral มีประโยชน์เช่นไรในการบริหารความเสี่ยง

15) (ตรวจสอบการไม่เกิด Arbitrage ด้วยสมบัติมาร์ติงเกล) พิจารณาราคาหุ้นที่เปลี่ยนแปลงได้ 4 สถานการณ์ใน 2 คาบแรก ดังนี้

สถานการณ์	S_0	S_1	S_2
1	100	110	122
2	100	110	108
3	100	90	100
4	100	90	90

15.1) สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยงคือ $r = 0.05$ ต่อคาบ จงตรวจสอบว่ามีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่ทำให้ราคาหุ้นส่วนลดมีสมบัติมาร์ติงเกลหรือไม่

15.2) คำนวณ $\mathbb{E}[\tilde{S}_2 | S_1 = 110]$ และเปรียบเทียบกับ $\tilde{S}_1$ ว่าตรงตามสมบัติมาร์ติงเกลหรือไม่

15.3) วิเคราะห์ผลลัพธ์ในแง่ของหลักการปราศจากการค้ากำไร