

บทที่ 3 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

เนื้อหาประกอบด้วย

- 3.1 อัตราดอกเบี้ยและค่าความผันผวน
- 3.2 การเดินสุ่ม
- 3.3 การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน
- 3.4 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง
- 3.5 การประมาณอัตราดอกเบี้ยและค่าความผันผวน

บทนำ

ในบทก่อนหน้านี้ เราได้ศึกษาแบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง เช่น แบบจำลองต้นไม้ทวิภาคและไตรภาค ซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ในช่วงเวลาที่แยกเป็นช่วง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม ราคาหลักทรัพย์ทางการเงินในโลกความเป็นจริง เช่น ราคาหุ้นหรือดัชนีตลาด มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามเวลา และตอบสนองต่อข้อมูลใหม่ได้แทบจะในทันที จึงจำเป็นต้องมีแบบจำลองที่สะท้อนพฤติกรรมดังกล่าวได้แม่นยำยิ่งขึ้น

บทที่ 3 นี้จึงมุ่งเน้นการศึกษา แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time Price Models) โดยเริ่มจากการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐาน ได้แก่

- อัตราดอกเบี้ย ซึ่งสะท้อนแนวโน้มเฉลี่ยของราคาหลักทรัพย์ในระยะยาว
- ค่าความผันผวน ที่บ่งชี้ระดับความไม่แน่นอนของการเคลื่อนไหวของราคา
- การเดินสุ่ม (Random Walk) ซึ่งเป็นแนวคิดเบื้องต้นของการเคลื่อนไหวแบบไม่สามารถทำนายได้
- และ การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน (Brownian Motion) ซึ่งเป็นกระบวนการสุ่มต่อเนื่องที่เป็นรากฐานสำคัญของแบบจำลองในตลาดการเงิน

เมื่อเข้าใจองค์ประกอบพื้นฐานเหล่านี้แล้ว เราจะสามารถพัฒนาแบบจำลองราคาในรูปแบบต่อเนื่องที่สะท้อนพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในเชิงเวลาได้อย่างสมจริงมากขึ้น เช่น การใช้ **Geometric Brownian Motion** ซึ่งเป็นแกนกลางของการจำลองราคาหุ้นในรูปแบบจำลองต่าง ๆ ที่ใช้จริงในตลาดทุน

สุดท้าย บทนี้ยังกล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำคัญ ได้แก่ อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน จากข้อมูลในอดีต เพื่อให้สามารถนำแบบจำลองไปใช้งานจริงได้ในการวิเคราะห์และตัดสินใจลงทุน เช่น การคาดการณ์ความเสี่ยงของสินทรัพย์ หรือการกำหนดกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยงในพอร์ตการลงทุน

3.1 อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน

แบบจำลองราคาในเชิงเวลาไม่ว่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง ต่างก็ต้องอาศัยพารามิเตอร์หลัก 2 ประการในการอธิบายพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ นั่นคือ **อัตราดริฟท์ (Drift Rate)** และ **ค่าความผันผวน (Volatility)** ซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวกำหนดทิศทางและระดับความไม่แน่นอนของการเคลื่อนไหวของราคาในอนาคต

- อัตราดริฟท์ สะท้อนแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์โดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหนึ่ง โดยสามารถมองได้ว่าเป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของนักลงทุน หากไม่มีความผันผวนเข้ามาเกี่ยวข้อง
- ค่าความผันผวน บ่งชี้ถึงความไม่แน่นอนหรือความแปรปรวนของราคาสินทรัพย์ในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการประเมินความเสี่ยงของการลงทุน

ความเข้าใจในสองพารามิเตอร์นี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาแบบจำลองเชิงเวลา เช่น Geometric Brownian Motion ซึ่งถูกนำไปใช้ในหลากหลายบริบทของตลาดการเงิน เช่น การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ การประเมินความเสี่ยงของพอร์ต และการสร้างกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยง ดังนั้น การศึกษาอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนจึงเป็นจุดเริ่มต้นของการสร้างแบบจำลองราคาที่มีประสิทธิภาพและสามารถใช้งานได้จริงในโลกการลงทุน

พิจารณาช่วงเวลา $[0,1]$ แบ่งช่วงเวลาออกเป็น N ช่วงเท่า ๆ กันจะได้ความกว้างหรือขนาดคาบเวลา $\tau = \frac{1}{N}$ จากแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค สมมติให้ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวราคาขึ้นเท่ากับ p ดังนั้นความน่าจะเป็นการเคลื่อนไหวราคาลงเท่ากับ $1-p$ จะได้อัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, \dots, N$

$$k(n) = \ln(1 + K(n)) = \begin{cases} \ln(1+u) & ; \text{probability } p \\ \ln(1+d) & ; \text{probability } 1-p \end{cases} \quad (3.1)$$

จากการแบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน ซึ่งจะทำให้เกิดจุดเวลา $t = 0, 1, 2, \dots, N$ (คาบ) โดยอัตราผลตอบแทนลอการิทึมทั้งหมดบนช่วง $[0,1]$ เท่ากับ $k(1) + k(2) + \dots + k(N)$ กำหนดสัญลักษณ์ให้ $\mu = E[k(0, N)]$ แทนค่าคาดหวัง และ $\sigma = \sqrt{\text{Var}(k(0, N))}$ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(1) + k(2) + \dots + k(N)$ โดยเรียก μ ว่า อัตราดริฟท์ (drift rate) ซึ่งเป็นค่าคาดหวังของการเปลี่ยนแปลงราคาของ $S(t)$ นั่นคือ μ เป็นค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมนั่นเอง และเรียก σ ว่า ค่าความผันผวน (volatility) ซึ่งเป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการเปลี่ยนแปลงราคาของ $S(t)$ เพราะว่า $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระและ $k(n) = \ln(1 + K(n))$ สำหรับทุก ๆ n ดังนั้น $k(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ สำหรับทุก ๆ n จะได้ว่า

$$\mu = E[k(1)] + E[k(2)] + \dots + E[k(N)] = NE[k(n)] \quad (3.2)$$

$$\text{และ} \quad \sigma^2 = \text{Var}[k(1)] + \text{Var}[k(2)] + \dots + \text{Var}[k(N)] = N\text{Var}[k(n)] \quad (3.3)$$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \dots, N$ จะได้ $E[k(n)] = \frac{\mu}{N} = \mu\tau$ และ $\text{Var}[k(n)] = \frac{\sigma^2}{N} = \sigma^2\tau$

$$\text{เพราะว่า} \quad E[k(n)] = p \ln(1+u) + (1-p) \ln(1+d) = \mu\tau \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \text{Var}[k(n)] &= p(\ln(1+u) - E[k(n)])^2 + (1-p)(\ln(1+d) - E[k(n)])^2 \\ &= p(\ln(1+u) - \mu\tau)^2 + (1-p)(\ln(1+d) - \mu\tau)^2 = \sigma^2\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

เมื่อแก้ระบบสมการ (3.4) และ (3.5) ได้

$$\ln(1+u) = \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right) \text{ และ } \ln(1+d) = \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}} \right) \quad (3.6)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p = 0.5$ (ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นและลงในแต่ละเวลาเท่ากัน) จะได้

$$\ln(1+u) = \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau} \text{ และ } \ln(1+d) = \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau} \quad (3.7)$$

จากการแก้ระบบสมการ (3.7) จะได้

$$\mu = \frac{1}{2\tau} \ln((1+u)(1+d)) \text{ และ } \sigma = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right) \quad (3.8)$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหา $E[k(n)]$, $Var[k(n)]$, μ และ σ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, \dots, 12$ เมื่อกำหนด

$u = 0.02$, $d = -0.01$ และ $p = 0.5$

วิธีทำ เพราะว่า $\tau = \frac{1}{12} = 0.0833$, $E[k(n)] = 0.5(\ln(1+u) + \ln(1+d))$ และ

$$Var[k(n)] = 0.5(\ln(1+u) - E[k(n)])^2 + 0.5(\ln(1+d) - E[k(n)])^2$$

ดังนั้น $E[k(n)] = 0.5(\ln(1+0.02) + \ln(1-0.01)) \approx 0.0049$

$$Var[k(n)] \approx 0.5(\ln(1+0.02) - 0.0049)^2 + 0.5(\ln(1-0.01) - 0.0049)^2 \approx 0.00022280$$

$$\text{และ } \mu = \frac{1}{2\tau} \ln((1+u)(1+d)) = \frac{1}{2(0.0833)} \ln(1.02(0.99)) \approx 0.0585$$

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right) = \frac{1}{2\sqrt{0.0833}} \ln\left(\frac{1.02}{0.99}\right) = 0.0517$$

□

จากนิยามของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม

$$k(n) = \begin{cases} \ln(1+u) & ; \text{probability } p \\ \ln(1+d) & ; \text{probability } 1-p \end{cases}$$

จากสมการ (3.7) เราสามารถเขียน $k(n)$ ในเทอมของ μ และ σ ได้เป็น

$$k(n) = \begin{cases} \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right) & ; \text{probability } p \\ \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}} \right) & ; \text{probability } 1-p \end{cases} = \mu\tau + \sigma\lambda(n) \quad (3.9)$$

$$\text{ดังนั้น } k(n) = \mu\tau + \sigma\lambda(n) \quad (3.10)$$

$$\text{เมื่อ } \lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right) & ; \text{probability } p \\ -\sqrt{\tau} \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}} \right) & ; \text{probability } 1-p \end{cases} \quad \text{เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม สำหรับทุก ๆ } n=1,2,\dots$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p=0.5$ จะได้ $\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ; \text{probability } p \\ -\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 1-p \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงเขียน $S(1)$ และ $S(2)$ ในเทอมของ $\mu, \sigma, \lambda(1)$ และ $\lambda(2)$ เมื่อกำหนดให้ $p=0.5$

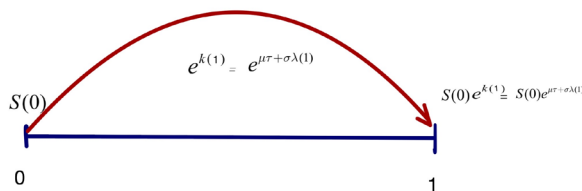
วิธีทำ เพราะว่า $k(n) = \begin{cases} \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \\ \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases} = \mu\tau + \sigma\lambda(n)$ และ

$$1 + K(n) = e^{k(n)} = \begin{cases} e^{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}} & ; \text{probability } 0.5 \\ e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases}$$

จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาคได้

$$S(1) = \begin{cases} e^{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}} S(0) & ; \text{probability } p \\ e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}} S(0) & ; \text{probability } 1-p \end{cases} = S(0)e^{\mu\tau + \sigma\lambda(1)}$$

เมื่อ $\lambda(1) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \\ -\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases}$



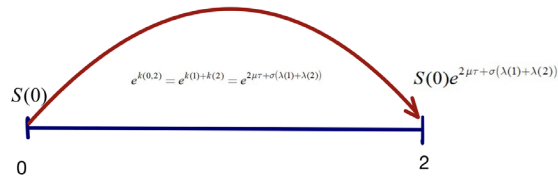
รูปที่ 3.13 $S(1) = S(0)e^{\mu\tau + \sigma\lambda(1)}$ เป็นมูลค่าสะสมของ $S(0)$ ด้วยฟังก์ชันสะสม $e^{k(1)} = e^{\mu\tau + \sigma\lambda(1)}$

และ $S(2) = \begin{cases} e^{2(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau})} S(0) & ; \text{probability } 0.25 \\ e^{(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau})} e^{(\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau})} S(0) = e^{2\mu\tau} S(0) & ; \text{probability } 0.5 \\ e^{2(\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau})} S(0) & ; \text{probability } 0.25 \end{cases}$

$$= \begin{cases} e^{2(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau})} S(0) & ; \text{probability } 0.25 \\ e^{(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau})} e^{(\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau})} S(0) = e^{2\mu\tau} S(0) & ; \text{probability } 0.5 \\ e^{2(\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau})} S(0) & ; \text{probability } 0.25 \end{cases}$$

$$= S(0)e^{2\mu\tau + \sigma(\lambda(1) + \lambda(2))}$$

$$\text{เมื่อ } \lambda(2) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \\ -\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases} \text{ และ } \lambda(1) + \lambda(2) = \begin{cases} 2\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.25 \\ 0 & ; \text{probability } 0.5 \\ -2\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.25 \end{cases}$$



รูปที่ 3.14 $S(2) = S(0)e^{2\mu\tau + \sigma(\lambda(1) + \lambda(2))}$ เป็นมูลค่าสะสมของ $S(0)$ ด้วยฟังก์ชันสะสม

$$e^{k(1)+k(2)} = e^{2\mu\tau + \sigma(\lambda(1) + \lambda(2))}$$

□

3.2 การเดินสุ่ม

กำหนดให้ $w(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มนินยาม โดย

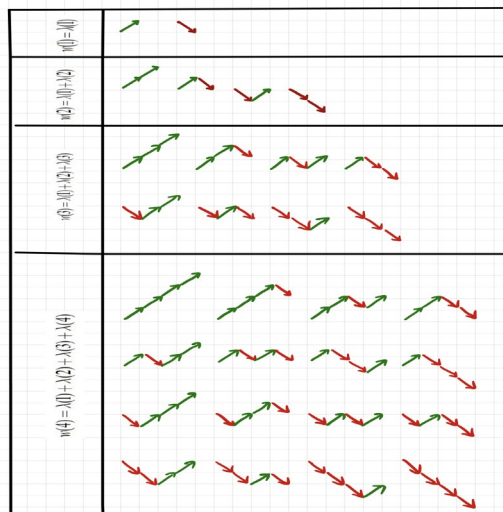
$$w(n) = \lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(n) \quad \text{สำหรับทุก } n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

และ $w(0) = 0$ เราเรียก $w(n)$ ว่า การเดินสุ่ม (random walk) และเรียก $w(n)$ ว่า การเดินสุ่ม

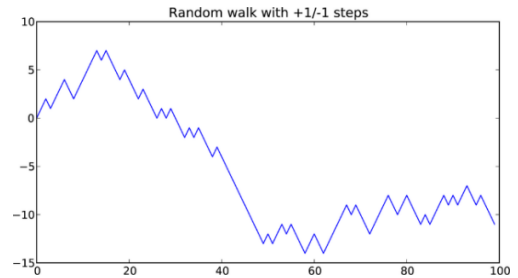
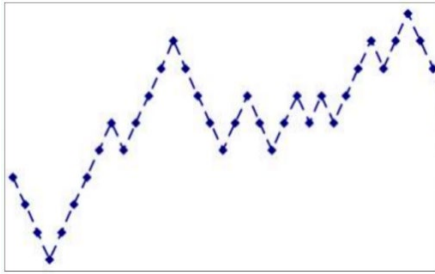
สมมาตร (symmetric random walk) ถ้า $\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \\ -\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases}$

จะได้ว่า

$$\lambda(n) = w(n) - w(n-1) \quad (3.12)$$



รูปที่ 3.1 รูปแบบการเดินสุ่มสมมาตร $w(n)$



รูปที่ 3.2 การอธิบายเคลื่อนไหวของราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่ม

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับเวลา $t = \tau n$, $n = 1, 2, \dots$ จะได้ว่า ราคาหุ้น $S(t)$ อยู่ในรูป

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma w(t)} \quad (3.13)$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$S(t) = S(\tau n) = S(0)e^{k(0, \tau n)} = S(0)e^{k(1\tau) + k(2\tau) + \dots + k(n\tau)} = S(0)e^{\sum_{i=1}^n k(i\tau)} \quad (3.14)$$

จากสูตร (3.10), $k(i\tau) = \mu\tau + \sigma\lambda(i\tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$ เมื่อแทนใน (3.14) จะได้

$$S(t) = S(0)e^{\sum_{i=1}^n (\mu\tau + \sigma\lambda(i\tau))} = S(0)e^{\mu\tau + \sigma \sum_{i=1}^n \lambda(i\tau)} = S(0)e^{\mu n\tau + \sigma \sum_{i=1}^n \lambda(i\tau)} = S(0)e^{\mu n\tau + \sigma w(n\tau)} = S(0)e^{\mu t + \sigma w(t)} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.3 (การจำลองราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่ม) กำหนดเงื่อนไขของการจำลอง ดังนี้ ราคาเริ่มต้นของหุ้น $S(0) = 100$, อัตราดอกเบี้ย $\mu = 0.02$, ความผันผวน $\sigma = 0.1$ และความกว้างของช่วงเวลา $\tau = 1$ จงจำลองราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่มที่เวลา $t = 3$

วิธีทำ จากสูตรการคำนวณราคาหุ้น $S(t) = S(0) \cdot e^{\mu t + \sigma w(t)}$ โดยที่

$$w(t) = \lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3)$$

กรณีตัวอย่าง: สุ่มได้ $\lambda(1) = +1$, $\lambda(2) = -1$, $\lambda(3) = +1$ จะได้ $w(3) = +1 + (-1) + (+1) = 1$

และ
$$\mu t + \sigma w(3) = 0.02 \cdot 3 + 0.1 \cdot 1 = 0.06 + 0.1 = 0.16$$

ดังนั้น
$$S(3) = 100 \cdot e^{0.16} \approx 100 \cdot 1.1735 = 117.35$$

สำหรับการสุ่ม $\lambda(n)$ กรณีอื่น ๆ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางเปรียบเทียบผลลัพธ์ของทุกกรณีของ $\lambda(n)$

ลำดับ	$\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3)$	$w(3)$	$\mu t + \sigma w(3)$	$e^{\mu t + \sigma w(3)}$	$S(3)$
1	+1, +1, +1	3	$0.06 + 0.3 = 0.36$	1.4330	143.30
2	+1, +1, -1	1	0.16	1.1735	117.35
3	+1, -1, +1	1	0.16	1.1735	117.35
4	+1, -1, -1	-1	$0.06 - 0.1 = -0.04$	0.9608	96.08
5	-1, +1, +1	1	0.16	1.1735	117.35
6	-1, +1, -1	-1	-0.04	0.9608	96.08
7	-1, -1, +1	-1	-0.04	0.9608	96.08
8	-1, -1, -1	-3	$0.06 - 0.3 = -0.24$	0.7866	78.66

จะเห็นว่า ถึงแม้ว่า $\mu > 0$ จะบ่งชี้แนวโน้มการเพิ่มขึ้นของราคา แต่เนื่องจาก $\lambda(n)$ เป็นการสุ่มแบบสมมาตร (symmetric random walk) ราคาหุ้นจึงสามารถผันผวนขึ้นหรือลงได้ในระยะสั้น $S(t)$ เป็นผลลัพธ์ที่สะท้อนถึงความไม่แน่นอนของตลาดการเงินในระยะสั้น $\square$

3.3 การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน

นิยามตัวแปรเชิงสุ่ม $x(n)$ โดย

$$x(n) = \frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

เนื่องจาก $k(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ ดังนั้น $x(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระด้วย

เพราะว่า $E[k(n)] = \mu\tau$ และ $Var[k(n)] = \sigma^2\tau$

ดังนั้น จะได้

$$E[x(n)] = \frac{E[k(n)] - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = 0 \quad (3.16)$$

และ

$$Var[x(n)] = Var\left[\frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] = \frac{1}{\sigma^2\tau} Var[k(n)] = 1 \quad (3.17)$$

โดยทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ศูนย์กลาง (the central limit theorem) จะได้ว่า

$$\frac{x(1) + x(2) + \dots + x(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow X \quad \text{เมื่อ } n \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

โดยที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน* ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$)

เนื่องจาก $k(n) = \mu\tau + \sigma\lambda(n)$ ทำให้ได้

$$\lambda(n) = \frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma} = \sqrt{\tau} \frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \sqrt{\tau}x(n) \quad (3.19)$$

นิยามเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง พิจารณาช่วงเวลา $[0,1]$ แบ่งช่วง $[0,1]$ เป็น N ช่วงเท่า ๆ กัน กำหนดให้

$$\tau = \frac{1}{N}, \quad t_n = n\tau = \frac{n}{N} \in [0,1] \quad \text{จะได้ } \lambda(n) = \frac{x(n)}{\sqrt{N}} \quad \text{เนื่องจาก } w(n) = \lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(n)$$

ดังนั้นได้

$$w(n) = \frac{x(1) + x(2) + \dots + x(n)}{\sqrt{N}} \quad (3.20)$$

นั่นคือ สำหรับ $t_N = \tau n$, สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, \dots, N$ (โดยที่ $\tau = \frac{1}{N}$) จะได้ว่า

$$w_N(t_N) := w(Nt_N) = \sqrt{t_N} \frac{x(1) + x(2) + \dots + x(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}} = \sqrt{t_N} \frac{x(1) + x(2) + \dots + x(n)}{\sqrt{n}} \quad (3.21)$$

เมื่อให้ $N \rightarrow \infty$ จะได้ $t_N = \frac{n}{N} \rightarrow t \in [0,1]$ ผลที่ตามมา คือ

$$w_N(t_N) \rightarrow \sqrt{t}X \equiv W(t) \quad (3.22)$$

เนื่องจาก $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ ดังนั้น $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$ สำหรับทุก ๆ $t > 0$ นั่นคือ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน t และเราเรียกค่าลิมิต $W(t)$ สำหรับทุก ๆ $t \geq 0$ นี้ว่า การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน (Brownian motion) หรือ กระบวนการวีเนอร์ (Wiener process)

หมายเหตุ *ถ้า $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

บทนิยาม 3.32 เรียกเซตของตัวแปรเชิงสุ่ม $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ ว่า การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน ถ้าสำหรับทุก ๆ $t \geq 0$, $W(t)$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) $W(0) = 0$
- 2) $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t) \quad (E[W(t)] = 0, Var[W(t)] = t)$

3) สำหรับทุก ๆ s, t, u ซึ่ง $0 \leq s \leq t \leq u$ ส่วนเพิ่ม $W(t) - W(s)$ และ $W(u) - W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ

4) สำหรับทุก ๆ s, t ซึ่ง $0 \leq s \leq t$ ส่วนเพิ่ม (increment) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

หมายเหตุ 1) ความแตกต่างระหว่าง $W(t)$ และ $w_N(t)$ คือ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มสำหรับทุก ๆ ตัวแปรเวลาต่อเนื่อง $t \geq 0$ แต่ $w_N(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม สำหรับทุก ๆ ตัวแปรเวลาไม่ต่อเนื่อง $t = n\tau$, $n = 1, 2, \dots$ โดยที่ $\tau = \frac{1}{N}$

2) สมบัติข้อ (4) แสดงว่า $W(t)$ มีคุณสมบัติของส่วนเพิ่มนิ่ง (stationary increments) คือ ส่วนเพิ่ม $W(t) - W(s)$ มีการแจกแจงที่ขึ้นอยู่กับเพียงความยาวของช่วงเวลา $t - s$ โดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของเวลา s หรือ t

คุณสมบัตินี้มีความสำคัญอย่างยิ่ง เนื่องจาก

- ทำให้กระบวนการมีความสม่ำเสมอในเชิงเวลา (time-homogeneous) ซึ่งเป็นพื้นฐานในการสร้างแบบจำลองทางการเงินและฟิสิกส์
- เอื้อให้สามารถคำนวณค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และฟังก์ชันความหนาแน่นได้อย่างเป็นระบบ
- ใช้ในการพิสูจน์และวิเคราะห์สมบัติของตัวแบบ เช่น สมการอิโต้และแบบจำลองแบล็ก-โชลส์
- หากขาดคุณสมบัตินี้ แบบจำลองจะไม่เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์โดยสมบูรณ์ และอาจต้องพิจารณากระบวนการอื่น เช่น Fractional Brownian motion ที่มีโครงสร้างความจำ (memory) และพฤติกรรมที่ซับซ้อนกว่า

ตัวอย่างที่ 3.4 (การจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่อง) กำหนดพารามิเตอร์ อัตราดริฟท์ $\mu = 0.01$, ความผันผวน $\sigma = 0.2$, ความกว้างของคาบเวลา $\tau = 0.1$ และจำนวนขั้นการเดินสุ่ม $n = 100$ จงจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่อง

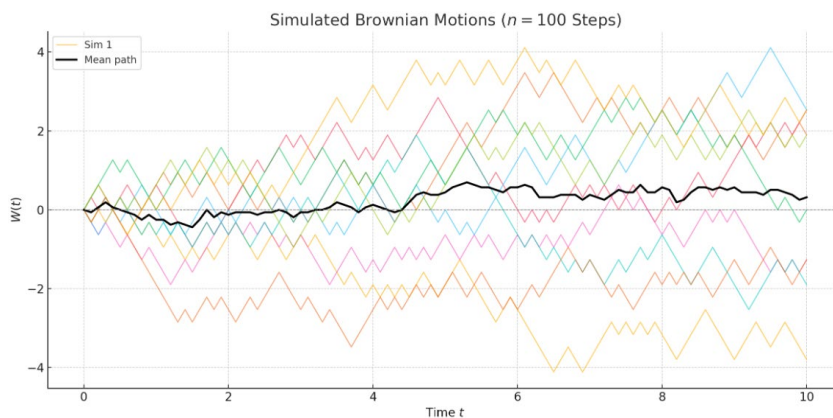
วิธีทำ จากนิยามกระบวนการสุ่ม กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแต่ละช่วงเป็น

$$k(n) = \mu\tau + \sigma\lambda(n) \text{ โดยที่ } \lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \\ -\sqrt{\tau} & ; \text{probability } 0.5 \end{cases}$$

จากนั้นหาผลรวมสะสมของ $k(n)$ ได้ $\sum_{i=1}^n k(i) \equiv K(t)$ โดยที่ $t = n\tau$ เพื่อแปลงเป็นกระบวนการแบบบราวน์ กำหนดให้

$$W(t) = \frac{K(t) - \mu t}{\sigma} \Rightarrow W(t) \sim N(0, t)$$

ผลการจำลองเชิงตัวเลข จากการสุ่มค่า $\lambda(n)$ จำนวน 100 ค่า และคำนวณตามนิยามข้างต้น พบว่า ได้กราฟของ $W(t)$ ดังภาพ



รูปที่ 3.3 กราฟแสดงกระบวนการ $W(t)$ จากการจำลองแบบเดินสุ่ม

กราฟด้านบนแสดงการจำลองกระบวนการบราวน์เนียน $W(t)$ จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่องจำนวน $n = 100$ ขั้นตอนเวลา (steps) โดย

- แต่ละเส้นแสดงผลของการสุ่ม $W(t)$ จำนวน 10 เส้นทาง

เส้นสีดำหนาเป็น ค่าเฉลี่ยของทุกเส้นทาง ณแต่ละช่วงเวลา t

□

3.4 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

ต่อไปจะสร้างแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องโดยการพิจารณา $\tau = \frac{1}{N}$ เมื่อ $N \rightarrow \infty$ จะได้ว่าจุดเวลา $t = \tau n$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots$ เหมือนหนึ่งเป็นจุดเวลาที่ต่อเนื่องกัน สมมติให้ $w(n)$ เป็นการเดินสุ่มสมมาตร พิจารณา $S(t + \tau) - S(t)$ สำหรับ $t = \tau n$, $n = 1, 2, \dots$ เมื่อ $\tau = \frac{1}{N}$ และ $N \rightarrow \infty$ ในที่นี้ประมาณ $S(t + \tau) - S(t)$ ในเทอมของ τ ซึ่งมีดีกรีไม่เกินดีกรี 1 จากทฤษฎีบท 3.31 จะได้ว่า

$$S(t + \tau) - S(t) = S(0)e^{\mu(t+\tau) + \sigma W(t+\tau)} - S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}$$

$$= S(0)e^{\mu t + \sigma w(t)} \left(e^{\mu \tau + \sigma w(t+\tau) - \sigma w(t)} - 1 \right) = S(t) \left(e^{\mu \tau + \sigma (w(t+\tau) - w(t))} - 1 \right) \quad (3.23)$$

โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด 0 ซึ่ง $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} S(t+\tau) - S(t) &\approx S(t) \left[1 + \mu\tau + \sigma(w(t+\tau) - w(t)) + \frac{(\mu\tau + \sigma(w(t+\tau) - w(t)))^2}{2} - 1 \right] \\ &\approx S(t) \left[\mu\tau + \sigma(w(t+\tau) - w(t)) + \sigma\mu\tau(w(t+\tau) - w(t)) + \frac{\sigma^2(w(t+\tau) - w(t))^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

เพราะว่า $(w(t+\tau) - w(t))^2 = \lambda^2(t+\tau) = \tau$ ดังนั้น

$$S(t+\tau) - S(t) \approx S(t) \left[\mu\tau + \sigma(w(t+\tau) - w(t)) + \sigma\mu\tau(w(t+\tau) - w(t)) + \frac{\sigma^2\tau}{2} \right] \quad (3.25)$$

เพราะว่า $\sigma\mu\tau(w(t+\tau) - w(t)) = \sigma\mu\tau\lambda(t+\tau)$ ซึ่งเป็นนิพจน์ของ τ ดิกลีเกิน 1

$$\text{ดังนั้น} \quad S(t+\tau) - S(t) \approx \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t)\tau + \sigma(w(t+\tau) - w(t))S(t) \quad (3.26)$$

เนื่องจาก $t = n\tau$ เมื่อ $\tau = \frac{1}{N}$ ดังนั้น ราคาและการเดินเชิงสุ่มเชิงสมมาตรที่เวลา t จึงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ N เพื่อให้สอดคล้องกันจะเขียนแทนราคาและการเดินเชิงสุ่มเชิงสมมาตรที่เวลา t สำหรับ $N = 1, 2, \dots$ ด้วย $S_N(t)$ และ $w_N(t)$ ตามลำดับ ดังนั้น สมการ (3.26) สามารถเขียนได้ในรูป

$$S_N(t + \frac{1}{N}) - S_N(t) \approx \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_N(t) \frac{1}{N} + \sigma(w_N(t + \frac{1}{N}) - w_N(t))S_N(t) \quad (3.27)$$

ถ้ากำหนดให้ $N \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $S_N(t) \rightarrow S(t)$ สำหรับบางตัวแปรเชิงสุ่ม $S(t)$

ดังนั้น จากสมการ (3.27) แบบจำลองราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับเวลาต่อเนื่องจึงอยู่ในรูป

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (3.28)$$

หรืออีกรูปหนึ่งคือ

$$\frac{dS(t)}{dt} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t) + \sigma S(t) \frac{dW(t)}{dt} \quad (3.29)$$

เมื่อ $dS(t) = S(t+dt) - S(t)$ และ $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ เป็นส่วนเพิ่มของตัวแปรเชิงสุ่ม $S(t)$ และ $W(t)$ เหนือช่วงเวลาเล็ก ๆ dt และในทำนองเดียวกัน จาก(3.29) สำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง $t = n\tau$

เมื่อ $\tau = \frac{1}{N}$ จะได้ว่า

$$S_N(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W_N(t)} \quad (3.30)$$

และถ้าให้ $N \rightarrow \infty$ จะได้ว่า สำหรับเวลาต่อเนื่อง $t \geq 0$,

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)} \quad (3.31)$$

หากดำเนินการด้วยลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้าง จะได้

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \mu t + \sigma W(t) \quad (3.32)$$

เพราะว่า $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ ดังนั้น $\ln S(t) \sim \mathcal{N}(\ln S(0) + \mu t, \sigma^2 t)$

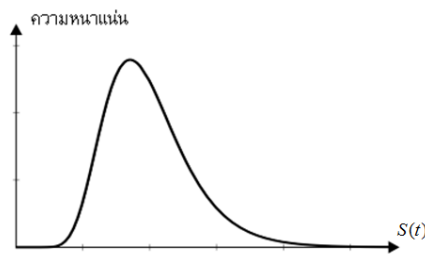
จาก (3.32) และเขียนในอีกรูปหนึ่งได้

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \mu t + \sigma W(t) \quad (3.33)$$

และได้ว่า

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t) \quad (3.34)$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า **กระบวนการราคาแบบเวลาต่อเนื่อง** (continuous-time price process) หรือ **การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียนเชิงเรขาคณิต** (Geometric Brownian Motion: GBM) ซึ่งแทนด้วย $S(t)$ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบ**ล็อกนอร์มอล** (lognormal distribution) กล่าวคือ ค่าของ $S(t)$ มีลักษณะเป็นเลขยกกำลังของค่าที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งหมายความว่า อัตราผลตอบแทนต่อเนื่องของราคาในรูป $\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right)$ มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution) นั่นคือ $\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ ดังนั้น ราคาสินทรัพย์ $S(t)$ เองจึงมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล ซึ่งสามารถใช้ในการวิเคราะห์ความเสี่ยงของราคาในอนาคต และการประเมินความน่าจะเป็นของระดับราคาต่าง ๆ ตามฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังแสดงในรูปด้านล่าง



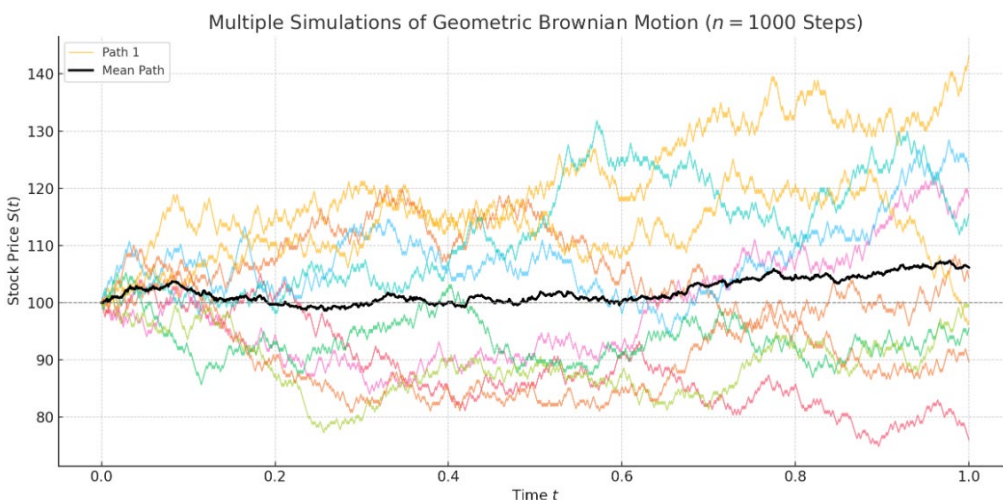
รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $S(t)$

ตัวอย่างที่ 3.5 (การจำลองราคาหุ้นด้วยกระบวนการเวลาเชิงต่อเนื่อง) สมมติว่า บริษัทวิจัยการเงินต้องการประเมินความเสี่ยงของราคาหุ้นบริษัท A ซึ่งมีแนวโน้มเติบโตเฉลี่ยปีละ 5% และมีความผันผวนของราคาอยู่ที่ 20% ต่อปี ผู้วิเคราะห์ต้องการศึกษาพฤติกรรมราคาหุ้นในช่วงเวลา 1 ปี โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถสะท้อนความไม่แน่นอนของตลาดได้ จึงจำลองเส้นทางของราคาหุ้น $S(t)$ จากกระบวนการราคาแบบเวลาต่อเนื่อง จำนวน 10 เส้นทาง และวิเคราะห์แนวโน้มค่าเฉลี่ยของราคาในช่วงเวลา $t \in [0,1]$

วิธีทำ จากข้อมูล สมมติฐานของแบบจำลอง มีดังนี้ ราคาเริ่มต้นของหุ้น $S(0) = 100$, อัตราดอกเบี้ย $\mu = 0.05$, ความผันผวนของราคา $\sigma = 0.2$, ช่วงเวลาจำลอง $T = 1$ ปี และจำนวนขั้นเวลา $n = 1000$ และ สูตรที่ใช้ในการจำลองการเปลี่ยนแปลงของราคาในแบบจำลอง GBM มีรูปแบบ

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right]$$

โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์เนียน ซึ่งสร้างจากการสะสมค่าการเปลี่ยนแปลงสุ่ม ตัวอย่างผลลัพธ์จากการจำลองเป็น ดังกราฟ ต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 ผลการจำลองราคาหุ้น $S(t)$ จำนวน 10 เส้นทางจากแบบจำลอง GBM เส้นสีดำที่บคือเส้นค่าเฉลี่ยของแต่ละจุดเวลา

จากกราฟสามารถวิเคราะห์ผลลัพธ์ ได้ดังนี้

- 1) แต่ละเส้นทางแสดงพฤติกรรมราคาหุ้นในสถานะตลาดที่ต่างกัน
- 2) ค่าเฉลี่ยของเส้นทางราคาในแต่ละช่วงเวลาเข้าใกล้เส้นแนวโน้ม (เส้นสีดำ) ที่สะท้อนอัตรา $\mu = 0.05$

$\mu = 0.05$

3) ความผันผวนของราคาสูงขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ซึ่งสะท้อนผ่านการแผ่กระจายของแต่ละเส้น โดยแบบจำลองนี้จะช่วยให้นักวิเคราะห์เข้าใจความเสี่ยงด้านราคาในอนาคต สามารถใช้ต่อยอดเพื่อคำนวณค่าความเสี่ยงทางการเงิน เช่นมูลค่าที่ความเสี่ยง (Value at Risk : VaR) และ เป็นพื้นฐานสำคัญของแบบจำลองแบล็กโชลส์ (Black-Scholes model) สำหรับการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัด ๆ ไป □

หมายเหตุ: ตัวอย่างโค้ดในการจำลองในตัวอย่าง

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Parameters

```
S0 = 100      # Initial stock price
```

```
mu = 0.05     # Drift
```

```
sigma = 0.2   # Volatility
```

```
T = 1         # Total time (in years)
```

```
n = 1000     # Number of steps
```

```
dt = T / n    # Time increment
```

```
t = np.linspace(0, T, n + 1) # Time vector
```

Number of simulated paths

```
num_paths = 10
```

```
S_paths = []
```

Simulate paths

```
for _ in range(num_paths):
```

```
    W = np.cumsum(np.sqrt(dt) * np.random.choice([1, -1], size=n)) # Brownian path approximation
```

```
    W = np.insert(W, 0, 0) # W(0) = 0
```

```
    S = S0 * np.exp((mu - 0.5 * sigma**2) * t + sigma * W) # GBM formula
```

```
    S_paths.append(S)
```

```
S_paths = np.array(S_paths)
```

```
mean_S = np.mean(S_paths, axis=0)
```

Plot

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
for i in range(num_paths):
```

```
plt.plot(t, S_paths[i], lw=1, alpha=0.6, label=f'Path {i+1}' if i == 0 else None)
plt.plot(t, mean_S, color='black', linewidth=2, label='Mean Path')
plt.axhline(S0, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.8)
plt.xlabel('Time $t$')
plt.ylabel('Stock Price $S(t)$')
plt.title('Multiple Simulations of Geometric Brownian Motion ($n=1000$ Steps)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

3.5 การประมาณอัตราดอกเบี้ยและค่าความผันผวน

จากแบบจำลองราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับเวลาต่อเนื่อง

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (3.35)$$

จะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ย μ และค่าความผันผวน σ เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญมากอย่างยิ่ง อีกทั้งสำหรับในแบบจำลองต้นไม้ ยังเป็นพารามิเตอร์ที่สามารถช่วยในการคำนวณอัตราผลตอบแทนลอการิทึม

$$k(n) = \begin{cases} \ln(1+u) ; \text{prob} = 0.5 \\ \ln(1+d) ; \text{prob} = 0.5 \end{cases}$$

และเราทราบว่า $E[k(n)] = \mu\tau$ และ $Var[k(n)] = \sigma^2\tau$

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $\tau = \frac{1}{N}$ จะได้ว่า

$$\mu = E[k(0, N)] = NE[k(n)] \text{ และ } \sigma^2 = Var(k(0, N)) = NVar(k(n)) \quad (3.36)$$

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการประมาณอัตราดอกเบี้ยและค่าความผันผวนของ $S(t)$ โดยใช้ข้อมูลราคาในอดีต สมมติให้ $\{S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_N)\}$ เป็นราคาหุ้นในอดีต จากสมการ (3.36) จะเห็นว่าเราสามารถคำนวณ อัตราดอกเบี้ย μ และค่าความผันผวน σ จากอัตราผลตอบแทนลอการิทึม และ

เนื่องจาก $S(t)$ มีการแจกแจงแบบ ลอการนอร์มอล ดังนั้นจะให้ r_k เป็นอัตราผลตอบแทนลอการิทึม กำหนดโดย

$$r_k := \ln \left(\frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})} \right) = \ln S(t_k) - \ln S(t_{k-1}) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (3.38)$$

โดยความเป็นอิสระและกระจายเหมือนกัน (independent identically distributed: iid) ของตัวแปรเชิงสุ่ม r_k จะได้

$$E[r_k] = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) (\Delta t) \quad \text{และ} \quad Var[r_k] = \sigma^2 (\Delta t) \quad (3.39)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sigma^2 = \frac{Var[r_k]}{\Delta t} \quad \text{และ} \quad \mu = \frac{E[r_k]}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2}$$

โดยสำหรับค่าความแปรปรวนของตัวอย่างคำนวณได้จาก

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (r_k - \bar{r})^2 \quad (3.40)$$

ดังนั้นถ้า $Var(r_k) \approx s^2$ และ $E[r_k] \approx \bar{r}$ จะได้

$$\sigma \approx \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \equiv \hat{\sigma} \quad \text{และ} \quad \mu \approx \frac{\bar{r}}{\Delta t} - \frac{s^2}{2\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) \equiv \hat{\mu} \quad (3.41)$$

ยิ่งไปกว่านั้น,

$$k(n) \approx \hat{\mu} \Delta t + \hat{\sigma} \lambda(n) = \left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) + s \delta(n) \quad (3.42)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & ; \text{prob} = 0.5 \\ -1 & ; \text{prob} = 0.5 \end{cases} \quad \text{และเนื่องจาก} \quad K(n) = e^{k(n)} - 1 = e^{\left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) + s \delta(n)} - 1$$

ผลที่ตามมาคือ

$$u = e^{\left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) + s} - 1 \quad \text{และ} \quad d = e^{\left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) - s} - 1 \quad (3.43)$$

ตัวอย่างที่ 3.6 สมมติว่าราคาปิดหุ้นตัวหนึ่ง ณ เริ่มวันเก็บข้อมูล ($t = 0$) เท่ากับ 90 บาท และราคาของหุ้นที่เวลาต่าง ๆ ในอดีตย้อนหลัง 10 วัน เป็นไปดังตารางต่อไปนี้ (ในที่นี้จำนวนจุดเวลา ใน 1 ปี กำหนดให้เท่า 250 วันทำการใน 1 ปี)

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	90	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21

จงประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนของหุ้นตัวนี้ และหากต้องการจำลองราคาหุ้นด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงใช้อัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่ประมาณได้หา $k(n)$ และเมื่อสมมติว่าความน่าจะเป็นที่หุ้นจะเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u และเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา d เท่ากัน

วิธีทำ โดยใช้สูตร (3.41), (3.43) สามารถคำนวณค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรม excel ช่วยคำนวณได้

ดังตาราง $r_k = \ln S(t_k) - \ln S(t_{k-1})$ และ $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (r_k - \bar{r})^2}$ (ใน excel ใช้คำสั่ง s=stdev.s())

และ $\bar{r} = \text{average}()$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(t)$	90.00	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21
$\ln S(t)$	4.4998	4.5331	4.5330	4.5683	4.5758	4.5858	4.6087	4.6013	4.6500	4.6670	4.6748
r_k		0.0333	-0.0001	0.0353	0.0075	0.0099	0.0229	-0.0074	0.0487	0.0171	0.0078
s	0.017478										
$\bar{r}$	0.017498										

ในที่นี้ $\Delta t = \frac{1}{250}$ ดังนั้น ค่าความผันผวนโดยประมาณ $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{0.017478}{\sqrt{1/250}} = 0.27634468$

และอัตราดริฟท์โดยประมาณ $\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) = \frac{1}{1/250} \left(0.017498 - \frac{0.017478^2}{2} \right) = 4.3363$

และ $k(n) \approx \left(\bar{r} - \frac{s^2}{2} \right) + s\delta(n) = \left(0.017498 - \frac{0.017478^2}{2} \right) + 0.017478\delta(n) = \begin{cases} 0.03482 & ; prob = 0.5 \\ -0.00013 & ; prob = 0.5 \end{cases}$

และ $K(n) = e^{k(n)} - 1 = \begin{cases} e^{0.03482} - 1 & ; prob = 0.5 \\ e^{-0.00013} - 1 & ; prob = 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0.03543 & ; prob = 0.5 \\ -0.00013 & ; prob = 0.5 \end{cases}$ □

บทสรุปท้ายบทที่ 3

บทที่ 3 ได้นำเสนอแนวคิดของแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของการวิเคราะห์ทางการเงินสมัยใหม่ โดยเริ่มจากการทำความเข้าใจอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนในฐานพารามิเตอร์หลักที่กำหนดแนวโน้มและความไม่แน่นอนของราคาสินทรัพย์ จากนั้นจึงพัฒนา

แนวคิดผ่านกระบวนการเดินสุ่มและการเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน ไปสู่แบบจำลองที่สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของราคาในลักษณะต่อเนื่องได้อย่างสมจริงมากขึ้น

แบบจำลองเหล่านี้ เช่น Geometric Brownian Motion (GBM) ถูกนำไปใช้จริงอย่างแพร่หลายในวงการการเงิน เช่น

- การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์: แบบจำลอง GBM เป็นแกนกลางของสูตร Black-Scholes ซึ่งใช้ประเมินมูลค่าของออปชันในตลาด เช่น การกำหนดราคาคอลออปชันของหุ้น A ที่มีอายุ 30 วัน โดยใช้ค่าอัตราดอกเบี้ยและค่าความผันผวนจากข้อมูลย้อนหลัง 1 ปี
- การจัดการความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน: นักลงทุนสามารถใช้ค่าความผันผวนที่ได้จากแบบจำลองเพื่อคำนวณมูลค่าที่ความเสี่ยง (Value at Risk: VaR) และวางกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยง เช่น การซื้อฟุตออปชันของหุ้น B เพื่อป้องกันความเสียหายจากการปรับตัวลงของราคา
- การคาดการณ์ช่วงราคาสินทรัพย์: ด้วยการใช้การแจกแจงแบบปกติร่วมกับพารามิเตอร์ของ GBM นักลงทุนสามารถประมาณช่วงราคาที่หุ้นน่าจะอยู่ในอีก 10 วันข้างหน้า เช่น มีโอกาส 95% ที่ราคาหุ้นจะอยู่ระหว่าง 68 ถึง 74 บาท

ดังนั้น ความเข้าใจในแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องไม่เพียงแต่เป็นเครื่องมือเชิงทฤษฎี แต่ยังเป็นสะพานเชื่อมสำคัญที่นำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ไปสู่การประยุกต์ใช้จริงในการกำหนดกลยุทธ์การลงทุน การประเมินมูลค่าทางการเงิน และการจัดการความเสี่ยงได้อย่างมีประสิทธิภาพในโลกแห่งความเป็นจริง

เอกสารอ้างอิง

- [1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Boyle, P. P. (1986). Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal*, 3(1), 7–12.

- [3] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263.
[https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)
- [4] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(1), 463–520.
<https://doi.org/10.1007/BF01450498>
- [5] Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3), 381–408.
[https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90043-3](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-3)
- [6] Hull, J. C. (2017). *Options, futures, and other derivatives* (9th ed.). Pearson.
- [7] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183.
<https://doi.org/10.2307/3003143>
- [8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b97490>

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1) สมมติว่าราคาหุ้น S เป็นไปตามแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค และ $S(0)=100$ โดยที่ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวราคาขึ้นเท่ากับการเคลื่อนไหวราคาลง และกำหนดให้แบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น 100 ช่วงเท่า ๆ กัน ด้วยขนาดคาบเวลา τ และกำหนดให้

$$E[k(1)] + E[k(2)] + \dots + E[k(100)] = 0.5$$

และ $Var[k(1)] + Var[k(2)] + \dots + Var[k(100)] = 0.01$

จงคำนวณหาราคาหุ้น $S(2)$

2) จากแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง กำหนดให้ $E[k(n)] = 0.0049$ และ $Var[k(n)] = 0.0002$

สำหรับทุก ๆ $n=1,2,\dots,12$ จงคำนวณหา $K(n)$

3) จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปีและอัตราดอกเบี้ย μ พร้อมทั้งคำนวณอัตราผลตอบแทน $k(n)$ และ $K(n)$ ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 22 วันทำการ ดังนี้

วันที่	ราคา	วันที่	ราคา
0	50	11	51.08
1	50.00	12	51.84
2	50.00	13	50.88
3	50.41	14	50.88
4	51.10	15	50.58
5	51.01	16	49.75
6	50.89	17	48.90
7	51.08	18	48.67
8	51.08	19	48.31
9	51.08	20	47.51
10	51.08	21	47.51

4) กำหนดให้ $u = 0.015$, $d = -0.01$, $p = 0.5$, และแบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น 20 ช่วงย่อย

4.1) จงคำนวณค่า μ , σ , $\mathbb{E}[k(n)]$, $\text{Var}[k(n)]$ สำหรับ $n = 20$

4.2) จงเขียน $S(1)$ และ $S(2)$ ในรูปของ μ , σ , และ $\lambda(1), \lambda(2)$

5) จงพิสูจน์ว่า $k(n) = \mu\tau n + \sigma\lambda(n)\tau$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ $\lambda(n)$

6) สมมติว่าอัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นมีการแจกแจงเป็นอิสระและเหมือนกัน (iid) จง

พิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^n x(i) \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

7) จงแสดงว่า หากราคาหุ้น $S(t)$ เปลี่ยนแปลงตามสมการ $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$

แล้ว $\ln S(t) \sim \mathcal{N}(\ln S(0) + \mu t, \sigma^2 t)$

8) ให้เลือกหุ้นที่สนใจ นำเข้าข้อมูลราคาหุ้นที่สนใจย้อนหลัง 11 วันจาก Yahoo Finance หรือเว็บไซต์อื่น แล้วใช้ Excel คำนวณค่าต่อไปนี้

8.1) อัตราผลตอบแทนลอการิทึม r_k

8.2) ค่าประมาณ μ และ σ

8.3) คำนวณค่า u และ d

9) ให้เลือกหุ้นที่สนใจ นำเข้าข้อมูลราคาหุ้นรายวันย้อนหลัง 252 วัน และดำเนินการวิเคราะห์ เช่น คำนวณ μ , σ รายปี อธิบายขั้นตอนการคำนวณโดยละเอียด

10) นักวิเคราะห์ต้องการใช้แบบจำลอง Brownian motion ทำนายความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นจะเกิน 10% จากราคาปัจจุบันในอีก 1 เดือน หาก $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$ ต่อปี จงหาความน่าจะเป็นดังกล่าว

11) สมมติว่าหุ้นบริษัท A มีราคาปัจจุบัน 50 บาท อนาคต 6 เดือน ราคาจะอยู่ในช่วง 48–55 บาท ด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด หาก $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.25$

12. บริษัทประกันแห่งหนึ่งกำลังพัฒนากรมธรรม์ประเภท "ประกันความเสี่ยงการลงทุนในหุ้น" โดยให้ความคุ้มครองในกรณีที่ราคาหุ้นของบริษัท A ลดลงต่ำกว่าระดับที่กำหนดภายในระยะเวลา 1 ปีข้างหน้า เพื่อกำหนดเบี้ยประกันที่เหมาะสม บริษัทประกันต้องการประมาณความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นจะลดลงต่ำกว่า 90 บาทในอีก 1 ปีข้างหน้า โดยใช้แบบจำลองการแจกแจงแบบลอกลอนอร์มอล (log-normal distribution) ของราคาหุ้นที่เปลี่ยนแปลงตามแบบจำลองเวลา (Geometric Brownian Motion) โดย กำหนดให้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0) = 100$, อัตราดอกเบี้ยรายปี $\mu = 0.08$ ค่าความผันผวนรายปี $\sigma = 0.25$ สำหรับระยะเวลา $t = 1$ ปี จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1) คำนวณความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น $S(1)$ จะน้อยกว่า 90 บาทในอีก 1 ปีข้างหน้า

12.2) หากบริษัทต้องการคุ้มครองความเสี่ยงนี้ด้วยอัตราดอกเบี้ยประกันเท่ากับมูลค่าคาดหวังของความเสียหาย (Expected Loss) ให้คำนวณเบี้ยประกันที่ควรเรียกเก็บ

12.3) อธิบายข้อสมมติของแบบจำลอง และความเหมาะสมในการนำไปใช้ในบริบทของการประกันราคา

(แนะนำ: ใช้สมการลอกลอนอร์มอล $\ln S(t) \sim \mathcal{N}\left(\ln S(0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ คำนวณ

$\mathbb{P}(S(1) < 90)$ โดยเปลี่ยนไปใช้ standard normal และคำนวณมูลค่าคาดหวังของส่วนต่างระหว่างราคาที่คุณคุ้มครองกับราคาจริง หากราคาจริงต่ำกว่าระดับนั้น

13) แบบจำลอง Brownian motion แบบต่อเนื่อง (เช่น Geometric Brownian Motion) ถือว่าราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องและไม่มีการกระโดดของราคาในช่วงเวลาใด ๆ สมมติว่าคุณกำลังวิเคราะห์ราคาหุ้นของบริษัท B และพบว่า

- ราคาหุ้นกระโดดขึ้นทันที 5% ภายในไม่กี่วินาทีหลังจากการประกาศข่าวเชิงบวกอย่างมีนัยสำคัญ (เช่น การควบรวมกิจการ หรือผลประกอบการดีกว่าคาดมาก)
- เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นซ้ำได้ในลักษณะ "ก๊าวกระโดด" แบบไม่ต่อเนื่องหลายครั้งในช่วงสั้น ๆ

จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1) คุณยังสามารถใช้แบบจำลอง Brownian motion ได้หรือไม่ในกรณีนี้ เพราะเหตุใด

13.2) อธิบายข้อจำกัดของ Geometric Brownian Motion ในการอธิบายพฤติกรรมราคาที่มี การกระโดด

13.3) เสนอแบบจำลองทางเลือกที่สามารถนำมาใช้ได้ สถานการณ์นี้ พร้อมอธิบายสมการหรือ แนวคิดโดยสังเขป (เช่น Merton Jump-Diffusion Model หรือ Poisson Jump Process)

13.4) ยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่อาจเกิดการ “jump” ของราคาหุ้น และอธิบายว่าเหตุใด แบบจำลองที่มีส่วน jump จึงเหมาะสมกว่าแบบจำลองต่อเนื่อง

14) สมมติว่าราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงตามแบบจำลอง Geometric Brownian Motion (GBM) ซึ่งมี สมการ $S(t) = S(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$ โดยที่ $S(t)$ แทน ราคาหุ้น ณ เวลา t , $S(0) = 100$ แทน ราคาปัจจุบัน กำหนดให้ $\mu = 0.12$ แทน อัตราผลตอบแทนคาดหวังต่อปี $\sigma = 0.3$ แทนความผันผวนของราคาหุ้นต่อปี, $W(t)$ เป็นกระบวนการ Wiener หรือ Brownian motion มาตรฐาน สำหรับ $t \in [0,1]$ ซึ่งคือช่วงเวลาจำลองเป็น 1 ปี (เช่น 252 วันทำการ)

14.1) จงเขียนโปรแกรมภาษา Python หรือ ใช้ Microsoft Excel / Google Sheets เพื่อ

- สร้างชุดข้อมูลการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นจำนวน 252 จุด (วันทำการใน 1 ปี)
- สุ่มค่าจากกระบวนการ Wiener, $W(t)$ หรือจำลองจากผลรวมของ Normal distribution
- วาดกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นในช่วงเวลา $t \in [0,1]$

14.2) ทดลองจำลองอย่างน้อย 3 ครั้ง และสังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงของเส้นกราฟแตกต่างกันอย่างไรบ้าง

14.3) วิเคราะห์ความหมายของพารามิเตอร์ μ และ σ และอธิบายว่าหากเปลี่ยนค่าเหล่านี้แล้วจะส่งผลต่อกราฟอย่างไร