

บทที่ 4 แบบจำลองราคายุโรปียนออปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

- 4.1 ยุโรปียนออปชัน
- 4.2 ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน
- 4.3 เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน
- 4.4 ราคาของออปชันตามตัวแปร
- 4.5 มูลค่าตามเวลาของออปชัน
- 4.6 การกำหนดราคายุโรปียนออปชัน
- 4.7 สูตรของแบล็ก-โชลส์

บทนำ

การบริหารความเสี่ยงทางการเงินและการออกแบบผลิตภัณฑ์การลงทุนในยุคปัจจุบันจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถจำลองพฤติกรรมของราคาหลักทรัพย์และตราสารอนุพันธ์ได้อย่างแม่นยำ หนึ่งในเครื่องมือพื้นฐานที่มีบทบาทสำคัญในตลาดการเงินคือ **ตราสารออปชัน (Option)** ซึ่งให้สิทธิแก่ผู้ถือในการซื้อหรือขายหลักทรัพย์อ้างอิงภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

ในบทนี้ เราจะศึกษาออปชันประเภทหนึ่งที่เรียกว่า **ยุโรปียนออปชัน (European Option)** ซึ่งเป็นสัญญาที่สามารถใช้สิทธิได้เพียง “ณ วันครบกำหนดอายุของสัญญา (Expiry Date)” เท่านั้น แตกต่างจากอเมริกันออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้ตลอดช่วงอายุของสัญญาซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป การกำหนดราคาของยุโรปียนออปชันจึงสามารถวิเคราะห์ได้อย่างเป็นระบบโดยใช้แบบจำลองเชิงเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง แกนหลักของบทนี้คือการใช้ **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model)** โดยเริ่มจากกรณีง่ายในหนึ่งคาบเวลา และขยายไปสู่หลายคาบเวลา ซึ่งนำไปสู่ **สูตรของคอกซ์-รอสส์-โรบินสไตน์ (Cox-Ross-Rubinstein: CRR Model)** ที่ใช้จำลอง

เส้นทางราคาสินทรัพย์อย่างเป็นระบบภายใต้สมมติฐานของการไม่สามารถทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition)

เนื้อหาครอบคลุมหัวข้อสำคัญ ได้แก่ ความหมายและคุณสมบัติของยูโรปียนคอลและพุทอปชัน ความสัมพันธ์ระหว่างราคาคอลและพุท (Put-Call Parity) ขอบเขตราคาออปชันที่เหมาะสมตามทฤษฎี (Option Bounds) ผลของตัวแปรต่าง ๆ เช่น ราคาใช้สิทธิ เวลา และความผันผวนที่มีต่อราคาของออปชัน การวิเคราะห์มูลค่าตามเวลา (Time Value) การคำนวณราคายูโรปียนออปชันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา โดยที่จุดเด่นของบทนี้คือการสรุปสู่แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องโดยใช้ สูตรของแบล็ก-โชลส์ (Black-Scholes Formula) ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของการกำหนดราคาออปชันในสภาวะตลาดที่ไม่มีโอกาสทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition) และมีคุณสมบัติตลาดที่สมบูรณ์ สูตรนี้ได้รับการยอมรับในระดับสากลและเป็นเครื่องมือสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ในตลาดจริง

การเข้าใจแบบจำลองเหล่านี้ช่วยให้ผู้อ่านสามารถออกแบบผลิตภัณฑ์การเงิน เช่น สัญญาอนุพันธ์ที่มีโครงสร้างซับซ้อน และวางกลยุทธ์การลงทุนหรือการป้องกันความเสี่ยงที่ตอบสนองต่อความไม่แน่นอนของตลาดได้อย่างมีประสิทธิภาพ

4.1 ยูโรปียนออปชัน

การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาตลาดอย่างง่าย หรือแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบ ในที่นี้ที่เวลา $t=1$ ในแบบจำลองจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบ จะหมายถึงเวลา ณ เวลาครบกำหนด T นั่นเอง ดังนั้น ผลประโยชน์ของยูโรปียนคอลออปชันจึงสามารถเขียนได้ในรูป

$$\max \{S(T) - K, 0\} = \begin{cases} S(T) - K & ; S(T) > K \\ 0 & ; S(T) \leq K \end{cases} \quad (4.1)$$

เพื่อความสะดวกจะแทน $\max \{S(T) - K, 0\}$ ด้วย $[S(T) - K]^+$ เมื่อ $[x]^+ = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$ (เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนบวก)

เนื่องจากผลประโยชน์มีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้น ค่าพรีเมียมจึงมีค่ามากกว่าศูนย์และถูกจ่ายเพื่อซื้อออปชันหรือซื้อสิทธิในการซื้อหรือการขายสินค้าอ้างอิง หากไม่มีการจ่ายพรีเมียมเพื่อซื้อออปชัน

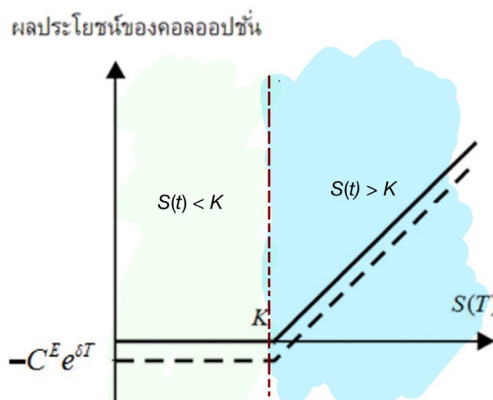
จะเกิดการค้ำกำไร (arbitrage) โดยนักลงทุนสามารถทำกำไรได้โดยถือสัญญาออปชันและใช้สิทธิเมื่อผลประโยชน์มีค่าเป็นบวก ซึ่งหากเกิดเหตุการณ์เช่นนี้แล้วจะขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ำกำไร ในที่นี้ค่าพรีเมียมจะเป็นราคาตลาดของออปชัน เพื่อความสะดวกต่อไปจะแทน ค่าพรีเมียมของยุโรปแบบอเมริกันด้วย C^E โดยที่ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่สมมูลกับอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อคาบ r นั่นคือ $e^\delta = 1+r$

สำหรับผู้ซื้อออปชัน (buyer) สมมติว่านักลงทุนยืมเงินจำนวน C^E บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ เพื่อซื้อออปชันจำนวน 1 สัญญา ดังนั้นที่เวลา T นักลงทุนจะได้ กำไรจากการซื้อออปชัน คำนวณได้จาก

$$\text{กำไรของผู้ซื้อออปชัน} = \text{ผลประโยชน์ที่รับ} - \text{หนี้ชำระคืน} = [S(T) - K]^+ - C^E e^{\delta T} \quad (4.2)$$

และในทางตรงกันข้ามสำหรับผู้ขายออปชัน (writer) จะได้รับเงินจำนวน C^E บาทจากการขายออปชันจำนวน 1 สัญญาและสมมติว่านำเงินที่ได้ไปลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ ดังนั้น กำไรจากการขายออปชันที่ผู้ออกจะได้รับ คำนวณได้จาก

$$\text{กำไรของผู้ขายออปชัน} = \text{เงินสะสมที่ได้รับ} - \text{ผลประโยชน์จ่าย} = C^E e^{\delta T} - [S(T) - K]^+ \quad (4.3)$$



รูปที่ 4.1 ผลประโยชน์ (เส้นทึบ) และ กำไร (เส้นประ) ของคอลอปชัน

ในทำนองเดียวกันสำหรับพหุออปชัน จะแทนค่าพรีเมียมของยุโรปแบบพหุออปชันด้วย P^E โดยผลประโยชน์ของยุโรปแบบพหุออปชัน คือ

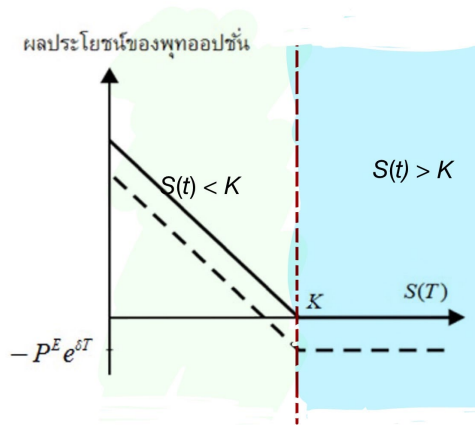
$$[K - S(T)]^+ \quad (4.3)$$

สำหรับผู้ซื้อพหุอปชั่น สมมติว่า นักลงทุนยืมเงินจำนวน P^E บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ เพื่อซื้อพหุอปชั่นจำนวน 1 สัญญา ดังนั้นที่เวลา T นักลงทุนจะได้ กำไรจากการซื้อพหุอปชั่น เท่ากับ

$$[K - S(T)]^+ - P^E e^{\delta T} \quad (4.5)$$

และกำไรจากการขายพหุอปชั่นที่ผู้ออกจะได้รับ เท่ากับ

$$P^E e^{\delta T} - [K - S(T)]^+ \quad (4.6)$$



รูปที่ 4.2 ผลประโยชน์ (เส้นทึบ) และ กำไร (เส้นประ) ของพหุอปชั่น

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดราคาใช้สิทธิของพหุอปชั่น 45 บาท และอายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าผู้ถือได้กำไร 3.75 บาทหลังจากใช้สิทธิ และราคาซื้อออปชั่น 5.625 บาท จงหาราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิ กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6 % ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $P^E = 5.625$, $K = 45$, $T = \frac{3}{12}$, $\delta = 0.06$ และ กำไร 3.75 โจทย์ต้องการทราบ $S(3/12)$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อพหุอปชั่น เท่ากับ

$$[K - S(T)]^+ - P^E e^{\delta T} = [45 - S(3/12)]^+ - 5.625e^{0.06(3/12)} = 3.75$$

$$[45 - S(3/12)]^+ = 5.625e^{0.06(3/12)} + 3.75$$

$$45 - S(3/12) = 9.46$$

$$S(3/12) = 35.54$$

ราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันที่ใช้สิทธิ เท่ากับ 35.54 บาท

□

ตัวอย่างที่ 4.2 สมมติว่าคอลออปชันของหุ้นอ้างอิง a อายุของสัญญา 2 เดือน มีราคาใช้สิทธิ 110 บาท ณ วันที่ครบกำหนด ถ้าคอลออปชันมีราคาซื้อ ณ วันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2557 เท่ากับ 9.75 บาท และ ราคาหุ้นอ้างอิง ณ วันที่เดียวกันเท่ากับ 120 บาท จงหาคำนวณว่าราคาหุ้นอ้างอิงควรขึ้นเป็นอย่างน้อยเท่าไรจึงจะไม่ทำให้นักลงทุนขาดทุนจากการซื้อคอลออปชัน ณ วันที่ครบกำหนด สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 5 % ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $C^E = 9.75$, $K = 110$, $T = \frac{2}{12}$, $\delta = 0.05$ และ $K \geq 0$ (ไม่ขาดทุน) โจทย์ต้องการทราบ $S(2/12)$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อคอลออปชัน เท่ากับ

$$[S(T) - K]^+ - C^E e^{\delta T} = [S(2/12) - 110]^+ - 9.75e^{0.05(2/12)} \geq 0$$

$$[S(2/12) - 110]^+ \geq 9.75e^{0.05(2/12)}$$

$$S(2/12) - 110 \geq 9.83$$

$$S(2/12) \geq 119.83$$

ราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันที่ใช้สิทธิควรขึ้นเป็นอย่างน้อย 119.83 บาท

□

ตัวอย่างที่ 4.3 สมมติคอลออปชันของหุ้นอ้างอิงหนึ่งมีอายุครบกำหนด 6 เดือน ราคาใช้สิทธิ 40 บาท ณ วันที่ครบกำหนด และคอลออปชันมีราคาซื้อ 4 บาท ถ้าราคาหุ้น ณ วันที่ครบกำหนดสามารถเป็น 38 บาท, 42 บาท หรือ 47 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 1/3 เท่ากัน จงหาค่าคาดหวังของกำไร(ขาดทุน) ของผู้ถือสัญญา กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7% ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $C^E = 4$, $K = 40$, $T = \frac{6}{12}$, $\delta = 0.07$,

$$S(6/12) = \begin{cases} 47 & \text{; probability } 1/3 \\ 42 & \text{; probability } 1/3 \\ 38 & \text{; probability } 1/3 \end{cases} \quad \text{โจทย์ต้องการทราบค่าคาดหวังของกำไร จะแทนด้วย}$$

$E[\text{Profit}]$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อคอลออปชัน เท่ากับ $[S(T) - K]^+ - C^E e^{\delta T}$,

$$[S(T) - K]^+ = \begin{bmatrix} 47 - 40 \\ 42 - 40 \\ 38 - 40 \end{bmatrix}^+ = \begin{cases} 7 & \text{; probability } 1/3 \\ 2 & \text{; probability } 1/3 \\ 0 & \text{; probability } 1/3 \end{cases}$$

$$\text{และ } C^E e^{\delta T} = 4e^{0.07(6/12)} = 4.14$$

$$\text{จะได้ Profit} = [S(T) - K]^+ - C^E e^{\delta T} = \begin{cases} 7 - 4.14 \\ 2 - 4.14 \\ 0 - 4.14 \end{cases} = \begin{cases} 2.86 & \text{; probability } 1/3 \\ -2.14 & \text{; probability } 1/3 \\ -4.14 & \text{; probability } 1/3 \end{cases}$$

$$\text{ดังนั้น } E[\text{Profit}] = (1/3)(2.86) + (1/3)(-2.14) + (1/3)(-4.14) = -1.14 \text{ บาท} \quad \square$$

4.2 ความเสมอภาคระหว่างคอลอปชันและพุทอปชัน

ความเสมอภาคระหว่างคอลอปชันและพุทอปชัน (put-call parity) เป็นสมบัติหนึ่งที่สำคัญแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคาคอลอปชันและพุทอปชัน

สมมติให้ คอลอปชันและพุทอปชัน มีเวลาครบกำหนด T และราคาใช้สิทธิ K เช่นเดียวกัน พิจารณาพอร์ตการลงทุน 2 พอร์ตการลงทุน ดังนี้

พอร์ตการลงทุนที่ 1 ประกอบด้วย คอลอปชัน 1 สัญญา และ ตราสารหนี้มูลค่า $Ke^{-\delta T}$ บาท

ที่ เวลา $t = 0$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $C^E + Ke^{-\delta T}$

ที่ เวลา $t = T$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $[S(T) - K]^+ + K = \max\{S(T), K\}$

พอร์ตการลงทุนที่ 2 ประกอบด้วย พุทอปชัน 1 สัญญา และ หุ้น 1 หน่วย ราคา $S(0)$

ที่ เวลา $t = 0$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $P^E + S(0)$

ที่ เวลา $t = T$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $[K - S(T)]^+ + S(T) = \max\{S(T), K\}$

เนื่องจากมูลค่าอนาคต(ที่ เวลา $t = T$) ของการลงทุนทั้ง 2 พอร์ตเท่ากัน ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของพอร์ตทั้ง 2 ย่อมเท่ากัน นั่นคือ

$$C^E + Ke^{-\delta T} = P^E + S(0) \quad (4.7)$$

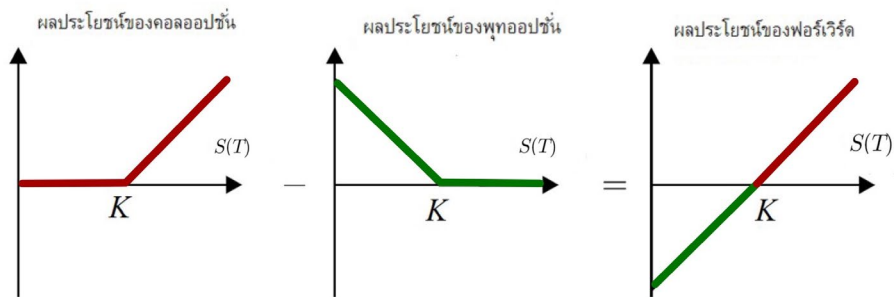
เรียกความสัมพันธ์ (4.7) ว่า ความเสมอภาคระหว่างคอลอปชันและพุทอปชัน

จากสมการ (4.7) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$C^E - P^E = S(0) - Ke^{-\delta T} \quad (4.8)$$

ซึ่งสามารถให้ความหมายได้ว่า ผลต่างระหว่างราคาคอลอปชันกับพุทอปชัน จะต้องเท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของผลต่างราคาหุ้นและราคาใช้สิทธิ จะเห็นว่าการซื้อคอลอปชันพร้อมกับการออกพุทอป

ชั้นเพื่อขายจะเทียบเท่ากับการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดที่มีระยะเวลาใช้สิทธิ T และราคาฟอร์เวิร์ด K ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังรูป



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างคอลลออปชัน พุทออปชัน และฟอร์เวิร์ด

ยิ่งไปกว่านั้นจากสมการ (4.8) จะเห็นว่า ถ้าราคาใช้สิทธิ $K = S(0)e^{\delta T}$ แล้วจะได้ว่า ราคาคอลลออปชันกับราคาพุทออปชันจะเท่ากัน นั่นคือ $C^E = P^E$

ทฤษฎีบท 4.1 (ความเสมอภาคระหว่างคอลลออปชันและพุทออปชัน) สำหรับหุ้นซึ่งไม่มีการจ่ายปันผล จะได้ว่า $C^E - P^E = S(0) - Ke^{-\delta T}$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งโดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E - P^E > S(0) - Ke^{-\delta T}$ หรือ

$$C^E - P^E < S(0) - Ke^{-\delta T}$$

กรณีที่ 1 $C^E - P^E > S(0) - Ke^{-\delta T}$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ออกตราสารคอลลออปชันและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน C^E บาท
- ซื้อพุทออปชัน 1 ตราสาร จ่ายเงิน P^E บาท
- ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
- นำเงินที่เหลือจำนวน $C^E - P^E - S(0)$ บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้ ที่อัตราดอกเบี้ยทบ

ต้นต่อเนื่อง δ โดยถ้า $C^E - P^E - S(0) > 0$ หมายถึงลงทุนซื้อและถ้า $C^E - P^E - S(0) < 0$ หมายถึงยืมขาย

ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ขายหุ้น 1 หน่วย รับเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพุดอปชั่น รับเงิน $[K - S(T)]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้ (คืนเงิน) จากเงินลงทุน $C^E - P^E - S(0)$ บาทรับเงิน (จ่ายเงิน)
จำนวน $(C^E - P^E - S(0))e^{\delta T}$ บาท
- ปิดสถานะของคอลออปชั่น จ่ายเงิน $[S(T) - K]^+$ บาท

และเนื่องจาก $[K - S(T)]^+ - [S(T) - K]^+ = K - S(T)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น จะได้ } V(T) &= S(T) + [K - S(T)]^+ + (C^E - P^E - S(0))e^{\delta T} - [S(T) - K]^+ \\ &= K + (C^E - P^E - S(0))e^{\delta T} \end{aligned}$$

โดยสมมติฐาน $C^E - P^E - S(0) + Ke^{-\delta T} > 0 \Rightarrow (C^E - P^E - S(0))e^{\delta T} + K > 0$

ดังนั้น $V(T) > 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

กรณีที่ 2 $C^E - P^E < S(0) - Ke^{-\delta T}$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน $S(0)$ บาท
- ออกตราสารพุดอปชั่นและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน P^E บาท
- ซื้อคอลออปชั่น 1 ตราสาร จ่ายเงิน C^E บาท
- นำเงินที่เหลือจำนวน $S(0) + P^E - C^E$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้น

ต่อเนื่อง δ

ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0) = 0$

ที่ เวลา $t = T$

- ปิดสถานะของคอลออปชั่น 1 ตราสาร รับเงิน $[S(T) - K]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้จากเงินลงทุน $S(0) + P^E - C^E$ บาท รับเงิน $(S(0) + P^E - C^E)e^{\delta T}$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพุดอปชั่น จ่ายเงิน $[K - S(T)]^+$ บาท

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } V(T) &= [S(T) - K]^+ + (S(0) + P^E - C^E)e^{\delta T} - S(T) - [K - S(T)]^+ \\ &= (S(0) + P^E - C^E)e^{\delta T} - K \quad (\because [S(T) - K]^+ - [K - S(T)]^+ = S(T) - K) \end{aligned}$$

$$\text{โดยสมมติฐาน } S(0) + P^E - C^E - Ke^{-\delta T} > 0 \Rightarrow (S(0) + P^E - C^E)e^{\delta T} - K > 0$$

ดังนั้น $V(T) > 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้ง 2 กรณี จึงสรุปได้ว่า $C^E - P^E = S(0) - Ke^{-\delta T}$ □

ตัวอย่างที่ 4.4 สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 30.20 บาทต่อหุ้น และสมมติว่าราคาของยุโรปเงินคอลลอปชันของหุ้นอ้างอิงนี้ มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท ซึ่งจะใช้สิทธิได้ในอีก 3 เดือนข้างหน้า โดยที่ราคาซื้อขายของคอลลอปชันนี้เท่ากับ 5.66 บาท จงหาราคาซื้อขายของพุทออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ และเวลาใช้สิทธิเท่ากับคอลลอปชันฉบับนี้ เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 6.5% ต่อปี คิดทบต้นต่อเนื่อง

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $C^E = 5.66$, $K = 30$, $T = \frac{3}{12}$, $\delta = 0.065$, $S(0) = 30.20$

โจทย์ต้องการทราบราคาของพุทออปชัน P^E

โดยใช้ทฤษฎีความเสมอภาคระหว่างคอลลอปชันและพุทออปชัน ได้ว่า $C^E - P^E = S(0) - Ke^{-\delta T}$ นั่นคือ $P^E = C^E - S(0) + Ke^{-\delta T} = 5.66 - 30.20 + 30e^{-0.065(3/12)} = 4.98$ บาท □

ตัวอย่างที่ 4.5 สมมติว่ายุโรปเงินคอลลอปชัน และพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ 230 บาท ระยะเวลาใช้สิทธิ 6 เดือน โดยที่คอลลอปชันและพุทออปชันมีราคาซื้อขายที่ 50.90 บาท และ 77.80 บาท ตามลำดับ ถ้าปัจจุบันหุ้นอ้างอิงราคา 205 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7% ต่อปี จงหาแนวทางการลงทุนที่ทำให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $C^E = 50.90$, $P^E = 77.80$, $K = 230$, $T = \frac{6}{12}$, $\delta = 0.07$, $S(0) = 205$ จะเห็นว่า $C^E - P^E \neq S(0) - Ke^{-\delta T}$ เพราะว่า $C^E - P^E = 50.90 - 77.80 = -26.9$ และ

$$S(0) - Ke^{-\delta T} = 205 - 230e^{-0.07(6/12)} = -17.09$$

ดังนั้นการกำหนดราคา C^E และ P^E ไม่สอดคล้องกับความเสมอภาคระหว่างคอลลอปชันและพุทออปชัน ซึ่งจะทำให้นักลงทุนสามารถค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้ โดยแนวทางการลงทุนดังกล่าวอาจทำได้ ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน 205 บาท
- ออกตราสารพหุอปชันและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน 77.80 บาท
- ซื้อคอลออปชัน 1 ตราสาร จ่ายเงิน 50.90 บาท
- นำเงินที่เหลือ 231.90 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง 7%
ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0) = 0$

ที่ เวลา $t = 6/12$

- ปิดสถานะของคอลออปชัน 1 ตราสาร รับเงิน $[S(T) - 230]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้จากเงินลงทุน 231.90 บาท ได้รับเงิน $231.90e^{0.07(6/12)} = 240.16$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพหุอปชัน จ่ายเงิน $[230 - S(T)]^+$ บาท

$$\text{จะได้ } V(6/12) = [S(T) - 230]^+ + 240.16 - S(T) - [230 - S(T)]^+$$

$$= 240.16 - 230 = 10.16$$

นั่นคือ หากนักลงทุนลงทุนตามแนวทางนี้จะได้กำไร 3.16 บาทแน่นอนซึ่งเป็นการกำไรจากการค้ากำไร

□

สำหรับออปชันของหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลที่มีมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผล เท่ากับ div_0 จะเทียบได้กับการหุ้นที่มีราคาปัจจุบัน $S(0) - \text{div}_0$ (ราคาส่วนลด) และถ้ามีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div}

จะได้

$$\text{div}_0 = (1 - e^{-\delta_{\text{div}} T}) S(0)$$

ดังนั้น

$$S(0) - \text{div}_0 = S(0) - (1 - e^{-\delta_{\text{div}} T}) S(0) = e^{-\delta_{\text{div}} T} S(0)$$

เมื่อแทน $S(0)$ ด้วย $S(0) - \text{div}_0$ และ $e^{-\delta_{\text{div}} T} S(0)$ ลงในสมการ (4.8) จะได้ ความสัมพันธ์ของราคาออปชันดังบทแทรก 4.2 และ บทแทรก 4.3 ตามลำดับ

บทแทรก 4.2 สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า

$$C^E - P^E = S(0) - \text{div}_0 - Ke^{-\delta T} \quad (4.9)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0) - \text{div}_0$ □

บทแทรก 4.3 สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div} จะได้ว่า

$$C^E - P^E = S(0)e^{-\delta_{\text{div}}T} - Ke^{-\delta T} \quad (4.10)$$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก บทแทรก 4.2 โดยการแทนค่า $\text{div}_0 = (1 - e^{-\delta_{\text{div}}T})S(0)$ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.6 ผู้นำเข้ารถยนต์ยี่ห้อหนึ่งจากญี่ปุ่นต้องการทำสัญญาออปชัน เพื่อซื้อเงินสกุลเยน ในอีก 6 เดือนข้างหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยและสกุลเยนเป็น 3.5 % และ 2.5% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลเยนเป็นเงินสกุลบาทไทย ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 2.93 Yen ต่อบาท จงหาค่าใช้สิทธิของยูโรเปียนคอลและยูโรเปียนพุทออปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E$

วิธีทำ ในที่นี้จะพิจารณา อัตราดอกเบี้ยสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยเป็นอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง $\delta = 0.035$ และอัตราดอกเบี้ยสำหรับการลงทุนในเงินสกุลเยนจะถูกพิจารณาเป็นอัตราปันผล $\delta_{\text{div}} = 0.025$ กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาเงินเยนในสกุลบาท จากโจทย์ จะได้ $T = \frac{6}{12}$, $S(0) = 1 / 2.93 = 0.3412969283$ โจทย์ต้องการหาค่าใช้สิทธิ (K) ของยูโรเปียนคอลและยูโรเปียนพุทออปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E$ จากบทแทรก 4.3 จะได้ $C^E - P^E = (0.3412969283)e^{-0.025(6/12)} - Ke^{-0.035(6/12)}$ นั่นคือ $K = (0.3412969283)e^{(0.035-0.025)(6/12)} = 0.3430076863$ $\square$

4.3 เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน

ขอบเขตราคาของออปชัน จะช่วยให้ผู้กำหนดราคาออปชัน สามารถกำหนดราคาออปชันให้เข้าสู่ราคาออปชันที่สอดคล้องกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น เพราะหากการกำหนดราคาไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตราคาก็ส่งผลให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน เป็นไปตามสมการในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 สำหรับหุ้นที่ไม่มีการจ่ายปันผล จะได้ว่า ราคาของออปชัน C^E และ P^E จะสอดคล้องตามสมการต่อไปนี้

$$[S(0) - Ke^{-\delta T}]^+ \leq C^E < S(0) \quad (4.11)$$

$$\text{และ} \quad [Ke^{-\delta T} - S(0)]^+ \leq P^E < Ke^{-\delta T} \quad (4.12)$$

พิสูจน์ จะแสดงเฉพาะอสมการ (4.11) เท่านั้น ที่เหลือจะขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

โดยจะแสดงว่า 1) $C^E < S(0)$ และ 2) $C^E \geq [S(0) - Ke^{-\delta T}]^+$

1) สมมติโดยเพื่อให้เกิดข้อแย้งว่า $C^E \geq S(0)$ สามารถทำธุรกรรม ได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลอปชัน เพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^E บาท
 - ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
 - นำเงินที่เหลือ $C^E - S(0)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ
- จะได้ $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ขายหุ้น 1 หน่วย รับเงิน $S(T)$ บาท
- รับเงิน $(C^E - S(0))e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้
- ปิดสถานะของคอลอปชัน จ่ายเงิน $[S(T) - K]^+$ บาท

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } V(T) &= S(T) + (C^E - S(0))e^{\delta T} - [S(T) - K]^+ \\ &= \min\{S(T), K\} + (C^E - S(0))e^{\delta T} > 0 \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E < S(0)$

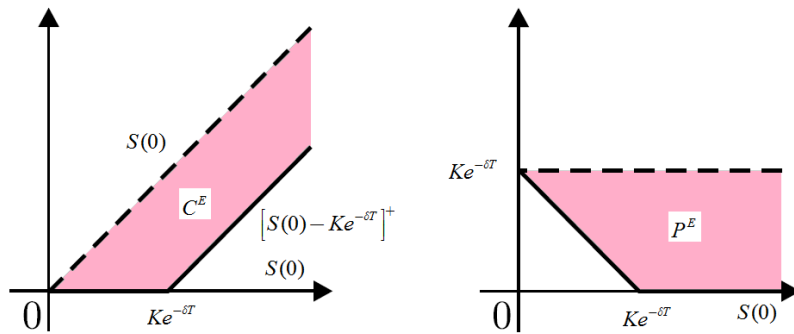
2) เพราะว่า $C^E, P^E \geq 0$ และจากสมการความเสมอภาคของราคาออปชัน

$$C^E = S(0) - Ke^{-\delta T} + P^E \geq S(0) - Ke^{-\delta T}$$

$$\text{นั่นคือ } C^E \geq \max\{0, S(0) - Ke^{-\delta T}\} = [S(0) - Ke^{-\delta T}]^+$$

จาก 1) และ 2) จึงสรุปได้ว่า $[S(0) - Ke^{-\delta T}]^+ \leq C^E < S(0)$

□



รูปที่ 4.4 ขอบเขตของราคาคอลออปชันและพุทออปชัน

บทแทรก 4.5 สำหรับหุ้นที่มีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า ราคาของออปชัน C^E และ P^E จะสอดคล้องตามสมการต่อไปนี้

$$[S(0) - \text{div}_0 - Ke^{-\delta T}]^+ \leq C^E < S(0) - \text{div}_0 \quad (4.13)$$

และ
$$[Ke^{-\delta T} - S(0) + \text{div}_0]^+ \leq P^E < Ke^{-\delta T} \quad (4.14)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.4 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0) - \text{div}_0$ $\square$

4.4 ราคาของออปชันตามตัวแปร

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงราคาของออปชันเมื่อพิจารณาตัวแปรใดตัวหนึ่งต่อไปนี้ ได้แก่ จำนวนหน่วยของหุ้นที่ออปชันให้สิทธิซื้อ(ขาย) และ ราคาใช้สิทธิ K มีการเปลี่ยนแปลงโดยตัวแปรที่เหลือจะถูกกำหนดให้คงที่ ภายใต้ระยะเวลาครบกำหนด T เช่นเดียวกัน การทราบถึงลักษณะของการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว จะทำให้สามารถกำหนดราคาออปชันที่เข้าสู่ราคาที่เหมาะสมซึ่งเป็นราคาที่ไม่ทำให้เกิดการค้ำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้รวดเร็วขึ้น

ทฤษฎีบท 4.6 (ราคาใช้สิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^E(K)$ และ $P^E(K)$ เป็นราคาของคอลออปชันและพุทออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรราคาใช้สิทธิ K ถ้า K_1 และ K_2 เป็นราคาใช้สิทธิของออปชันที่เวลา T ซึ่ง $K_1 < K_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^E(K_1) > C^E(K_2) \quad (4.15)$$

และ
$$P^E(K_1) < P^E(K_2) \quad (4.16)$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ (4.15) เท่านั้นที่เหลือขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

กำหนดให้ $K_1 < K_2$ สมมติว่าในทางตรงกันข้ามว่า $C^E(K_1) \leq C^E(K_2)$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลลอปชันที่มี ราคาใช้สิทธิ K_2 ขาย 1 สัญญา รับเงิน $C^E(K_2)$ บาท
- ซื้อคอลลอปชันที่มี ราคาใช้สิทธิ K_1 จำนวน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C^E(K_1)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^E(K_2) - C^E(K_1)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้น

ต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะของคอลลอปชันราคาใช้สิทธิ K_1 รับเงิน $[S(T) - K_1]^+$ บาท
- ปิดสถานะของคอลลอปชันราคาใช้สิทธิ K_2 จ่ายเงิน $[S(T) - K_2]^+$ บาท
- รับเงิน $(C^E(K_2) - C^E(K_1))e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } V(T) &= [S(T) - K_1]^+ - [S(T) - K_2]^+ + (C^E(K_2) - C^E(K_1))e^{\delta T} \\ &> (S(T) - K_1) - (S(T) - K_2) + (C^E(K_2) - C^E(K_1))e^{\delta T} \\ &= (K_2 - K_1) + (C^E(K_2) - C^E(K_1))e^{\delta T} > 0 \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E(K_1) > C^E(K_2)$ □

ทฤษฎีบท 4.6 ทำให้ทราบว่าถ้ากำหนดราคาใช้สิทธิสูงขึ้น ราคาของคอลลอปชันหรือค่าพรีเมียมจะถูกลง แต่ตรงกันข้ามกับพหุออปชันซึ่งที่ราคาใช้สิทธิสูงขึ้นค่าพรีเมียมจะแพงขึ้น

สมมติให้ ออปชัน 1 สัญญาให้สิทธิซื้อ(ขาย)หุ้นได้จำนวน x หน่วยที่ราคา $S(0)$ โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับหุ้น x หน่วยเท่ากับ K บาท ต่อไปจะพิจารณาค่าพรีเมียมของออปชันเมื่อจำนวนหุ้น x ที่ออปชันให้สิทธิมีการเปลี่ยนแปลง

ทฤษฎีบท 4.7 (จำนวนหุ้นในสิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^E(x)$ และ $P^E(x)$ เป็นราคาของคอลลอกซ์และพุทออปชั่นที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรจำนวนหน่วยที่ตราสารให้สิทธิซื้อ (ขาย) x หน่วย โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับจำนวนหน่วยดังกล่าวเท่ากับ K ที่เวลาใช้สิทธิ T ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนหุ้นที่ออปชั่นให้สิทธิซื้อ (ขาย) ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^E(x_1) < C^E(x_2) \quad (4.17)$$

$$\text{และ} \quad P^E(x_1) > P^E(x_2) \quad (4.18)$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ (4.17) เท่านั้นที่เหลือขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

กำหนดให้ $x_1 < x_2$ สมมติว่าในทางตรงกันข้ามว่า $C^E(x_1) \geq C^E(x_2)$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลลอกซ์ที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_1 หน่วย ขายสัญญา รับเงิน $C^E(x_1)$ บาท
- ซื้อคอลลอกซ์ที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_2 หน่วย จ่ายเงิน $C^E(x_2)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^E(x_1) - C^E(x_2)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้น

ต่อเนื่อง δ

$$\text{จะได้ } V(0) = 0$$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะคอลลอกซ์ที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_2 หน่วย รับเงิน $[x_2 S(T) - K]^+$ บาท
- ปิดสถานะคอลลอกซ์ที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_1 หน่วย จ่ายเงิน $[x_1 S(T) - K]^+$ บาท
- รับเงิน $(C^E(x_1) - C^E(x_2))e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

$$\text{จะได้ } V(T) = [x_2 S(T) - K]^+ - [x_1 S(T) - K]^+ + (C^E(x_1) - C^E(x_2))e^{\delta T}$$

$$> (x_2 S(T) - K) - (x_1 S(T) - K) + (C^E(x_1) - C^E(x_2))e^{\delta T}$$

$$= (x_2 - x_1)S(T) + (C^E(x_1) - C^E(x_2))e^{\delta T} > 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E(x_1) < C^E(x_2)$ □

ทฤษฎีบท 4.7 ทำให้ทราบว่า ถ้าจำนวนหน่วยหุ้นที่ออปชั่นให้สิทธิซื้อ (ขาย) เพิ่มมากขึ้น ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลอกซ์จะแพงขึ้น แต่ตรงกันข้ามกับพุทออปชั่นซึ่งค่าพรีเมียมจะถูกลง

4.5 มูลค่าตามเวลาของออปชัน

ภาวะเงิน (moneyness) เป็นตำแหน่งความสัมพันธ์ของราคาปัจจุบันหรือราคาคอนาคดของสินทรัพย์อ้างอิงในที่นี้คือ หุ้น เทียบกับราคาใช้สิทธิของออปชัน ซึ่งประกอบด้วย 3 ภาวะคือ ภาวะกำไรแฝง (in the money : itm) ภาวะขาดทุนแฝง (out of the money : otm) และภาวะคุ้มทุนแฝง (at the money: atm) ทำให้สามารถบ่งบอกได้ว่าออปชัน ณ ขณะเวลานั้นๆ อยู่ในภาวะเงินใดเพื่อใช้ตัดสินใจในการลงทุนของนักลงทุน

บทนิยาม 4.8 (ภาวะเงิน) กำหนดให้ $0 < t \leq T$ เป็นเวลา สำหรับออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ K จะกล่าวว่า

คอลออปชัน ที่เวลา t อยู่ในภาวะ	และพุทออปชัน ที่เวลา t อยู่ในภาวะ
- กำไรแฝง ถ้า $S(t) > K$	- กำไรแฝง ถ้า $S(t) < K$
- ขาดทุนแฝง ถ้า $S(t) < K$	- ขาดทุนแฝง ถ้า $S(t) > K$
- คุ้มทุนแฝง ถ้า $S(t) = K$	- คุ้มทุนแฝง ถ้า $S(t) = K$

จากบทนิยาม 4.8 ที่เวลา t ใด ๆ คอลออปชันจะอยู่ในภาวะกำไรแฝง ถ้าราคาหุ้นสูงกว่าราคาใช้สิทธิ คอลออปชันจะอยู่ในภาวะขาดทุนแฝง ถ้าราคาหุ้นต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ และคอลออปชันจะอยู่ภาวะคุ้มทุนถ้าราคาใช้สิทธิเท่ากับราคาใช้สิทธิ ส่วนพุทออปชันจะเงื่อนไขที่ทำให้เกิดภาวะเงินที่สวนทางกับภาวะเงินของคอลออปชันตามนิยาม

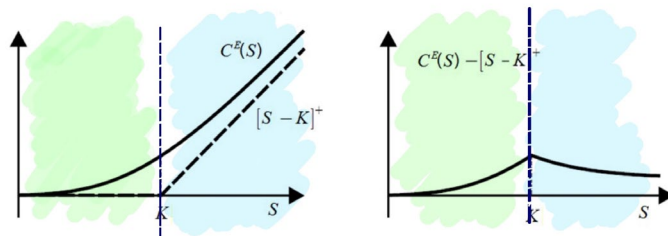
บทนิยาม 4.9 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออปชัน เรียก $[S(t) - K]^+$ ที่เวลา $t \leq T$ ใดๆ ว่ามูลค่าแฝง (intrinsic value) ของคอลออปชันและเรียก $[K - S(t)]^+$ ว่ามูลค่าแฝงของพุทออปชัน

จากบทนิยาม 4.9 จะเห็นว่า มูลค่าแฝงของออปชันเป็นบวกเมื่อออปชันจะอยู่ในภาวะกำไรแฝงและมูลค่าแฝงเท่ากับศูนย์เมื่อออปชันจะอยู่ในภาวะขาดทุนแฝงหรือคุ้มทุนแฝง

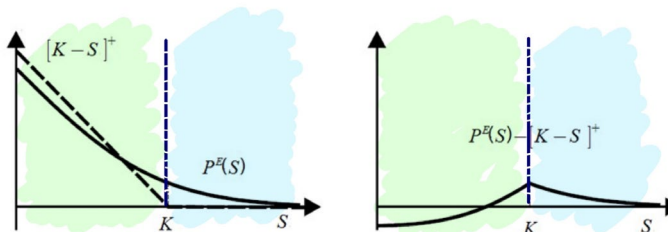
บทนิยาม 4.10 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออพชัน *มูลค่าตามเวลา* (the time value) ของออพชันคือผลต่างของราคาออพชันกับมูลค่าแฝงของออพชัน นั่นคือ

- มูลค่าตามเวลาสำหรับคอลออพชัน เท่ากับ $C^E(t) - [S(t) - K]^+$
- มูลค่าตามเวลาสำหรับพุทออพชัน เท่ากับ $P^E(t) - [K - S(t)]^+$

มูลค่าตามเวลาของออพชันจะบ่งบอกถึงกำไร และ ขาดทุนที่เวลาต่างๆจากการลงทุนในออพชัน



รูปที่ 4.5 มูลค่าตามเวลาของคอลออพชัน รูปขวามือเปรียบเทียบราคาของคอลออพชันกับมูลค่าแฝง



รูปที่ 4.6 มูลค่าตามเวลาของพุทออพชัน รูปขวามือเปรียบเทียบราคาของพุทออพชันกับมูลค่าแฝง

4.6 การกำหนดราคายุโรปเงินออพชัน

ทฤษฎีบท 4.11 กำหนดให้ T เป็นระยะเวลาครบกำหนด และสมมติว่ามีพอร์ตการลงทุน $[x(t), y(t)]$ สำหรับ $0 \leq t \leq T$ ที่ซึ่ง $V(T) = D(T)$ จะได้ว่าราคาออพชัน $D(0) = V(0)$

พิสูจน์ สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $D(0) \neq V(0)$

ถ้า $D(0) > V(0)$

ที่เวลา $t=0$ ทำธุรกรรมโดย

- ออกและขายออพชัน 1 สัญญา รับเงิน $D(0)$ บาท

- ถือสถานะลองของสินทรัพย์ $[x, y]$ จ่ายเงิน $V(0)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $D(0) - V(0) > 0$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้น

ต่อเนื่อง δ

$$\text{จะได้ } V_{New}(0) = 0$$

ที่เวลา $t = T$ ทำธุรกรรมโดย

- ปิดสถานะลองของสินทรัพย์ $[x, y]$ รับเงิน $V(T)$ บาท
- ปิดสถานะออพชันจ่ายผลประโยชน์ $D(T)$ บาท
- รับเงิน $(D(0) - V(0))e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

$$\text{จะได้ } V_{New}(T) = V(T) - D(T) + (D(0) - V(0))e^{\delta T} = (D(0) - V(0))e^{\delta T} > 0$$

ถ้า $D(0) < V(0)$ สามารถทำธุรกรรมได้ในทำนองเดียวกันโดยถือสถานะตรงข้าม

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ $V_{New}(T) > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จึงสรุปได้ว่า $D(0) = V(0)$

□

4.6.1 แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค

ให้ T เป็นระยะเวลาครบกำหนดของออพชัน กำหนดให้ $S(t)$ แทนราคาหุ้น(หุ้นอ้างอิง)ที่เวลา $t = 1, 2, \dots$ โดยที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลง $K(n) = \begin{cases} u; \uparrow \\ d; \downarrow \end{cases}$, $n = 1, 2, \dots$ และ r เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง(ตราสารหนี้) และกำหนดให้ $f(S)$ เป็นผลประโยชน์ของออพชัน นั่นคือ $f(S) = [S - K]^+$ สำหรับคอลลออปชัน และ $f(S) = [K - S]^+$ สำหรับพุทออปชัน และ กำหนดให้ $D(T) = f(S(T))$ โดยที่ $D(0)$ ราคาของออพชัน

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา

พิจารณาจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา สมมติว่ามีพอร์ตการลงทุน $[x(t), y(t)]$ สำหรับ $t = 0, 1$ ที่ซึ่ง $V(1) = D(1)$ ดังนั้นจะได้ $x(1)S(1) + y(1)A(1) = f(S(1))$ นั่นคือ

$$x(1)(1+u)S(0) + y(1)(1+r)A(0) = f(S_u) \quad (1)$$

และ

$$x(1)(1+d)S(0) + y(1)(1+r)A(0) = f(S_d) \quad (2)$$

โดยการแก้ระบบสมการ (1) และ (2) จะได้

$$x(1) = \frac{f(S_u) - f(S_d)}{(u-d)S(0)} \quad \text{และ} \quad y(1) = \frac{(1+u)f(S_d) - (1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)}$$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$[x(t), y(t)] = \left[\frac{f(S_u) - f(S_d)}{(u-d)S(0)}, \frac{(1+u)f(S_d) - (1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)} \right] \quad \text{สำหรับทุกๆ } t = 0, 1$$

จะได้ว่า $[x(t), y(t)]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ทำให้ $V(1) = D(1)$

โดยทฤษฎีบท 4.11 ได้ว่า $D(0) = V(0)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} D(0) &= x(0)S(0) + y(0)A(0) \\ &= \left(\frac{f(S_u) - f(S_d)}{(u-d)S(0)} \right) S(0) + \left(\frac{(1+u)f(S_d) - (1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)} \right) A(0) \\ &= \frac{f(S_u) - f(S_d)}{(u-d)} + \frac{(1+u)f(S_d) - (1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

จะเห็นว่าราคาออปชัน $D(0)$ นั้นไม่ขึ้นกับราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ แต่ยังขึ้นอยู่กับราคาปัจจุบันของหุ้นหรือราคาสินค้าอ้างอิง ($\because S_u = (1+u)S(0)$ และ $S_d = (1+d)S(0)$) ดังนั้นสามารถเขียน $D(0)$ ตามสูตร (4.19) ในรูป

$$D(0) = xS(0) + y \quad (4.20)$$

เมื่อ $[x, y] = \left[\frac{f(S_u) - f(S_d)}{(u-d)S(0)}, \frac{(1+u)f(S_d) - (1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)} \right]$ ซึ่งเรียก พอร์ตการลงทุน $[x, y]$ นี้ว่า *พอร์ตการลงทุนการจำลอง* (replicating portfolio) สำหรับการกำหนดราคาออปชัน โดยที่สามารถพิจารณา y เป็นจำนวนตราสารหนี้ที่มีราคาปัจจุบันเท่ากับ 1 บาท ต่อหน่วย ซึ่งเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของตราสารหนี้ที่ราคาปัจจุบันใดๆ นั่นเอง

$$\begin{aligned} \text{กำหนดให้} \quad C(1) &= \begin{cases} C_u = [S_u - K]^+ ; \text{probability } p \\ C_d = [S_d - K]^+ ; \text{probability } 1-p \end{cases} \\ \text{และ} \quad P(1) &= \begin{cases} P_u = [K - S_u]^+ ; \text{probability } p \\ P_d = [K - S_d]^+ ; \text{probability } 1-p \end{cases} \end{aligned}$$

ดังนั้น จาก (4.19) จะได้ราคาออปชัน ดังนี้

$$\text{ราคาคอลออปชัน} \quad C^E(0) = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \quad (4.21)$$

และ ราคาพหุคูณ $P^E(0) = \frac{P_u - P_d}{u - d} + \frac{(1+u)P_d - (1+d)P_u}{(u-d)(1+r)}$ (4.22)

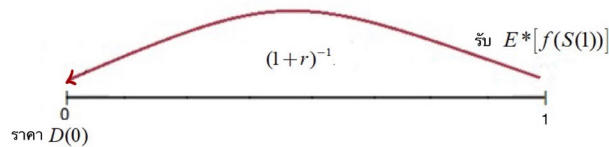
โดยทฤษฎีบท 2.14 ถ้า p^* เป็นความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง นั่นคือ $p^* = \frac{r-d}{u-d}$

จะได้ ราคาคอลอปชัน $C^E(0) = (1+r)^{-1} E^*[C(1)]$ (4.23)

และ ราคาพหุคูณ $P^E(0) = (1+r)^{-1} E^*[P(1)]$ (4.24)

เมื่อ E^* เป็นค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง นั่นคือ

$$D(0) = \frac{1}{1+r} (p^* f(S_u) + (1-p^*) f(S_d)) = (1+r)^{-1} E^*[f(S(1))] \quad (4.25)$$



รูปที่ 4.7 ราคาของออปชัน $D(0)$ เทียบกับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้ $r = 0.015$, $S(0) = K = 1$ บาท จงคำนวณหาราคา $C^E(0)$ ของคอลอปชัน โดยใช้แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เมื่อกำหนดให้ $u = 0.04$ และ $d = -0.06$

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^* = \frac{0 + 0.06}{0.02 + 0.06} = 0.75$

และ $S(1) = \begin{cases} 1 + 0.04; & \text{probability } 0.75 \\ 1 - 0.06; & \text{probability } 0.25 \end{cases} = \begin{cases} 1.04; & \text{probability } 0.75 \\ 0.94; & \text{probability } 0.25 \end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์ของคอลอปชัน คือ

$$f(S(1)) = [S(1) - K]^+ = [S(1) - 1]^+ = \begin{cases} 0.04; & \text{probability } 0.75 \\ 0; & \text{probability } 0.25 \end{cases}$$

โดยสูตร (4.24) จะได้

$$C^E(0) = (1+r)^{-1} E^*[f(S(1))] = (1+0.015)^{-1} (0.04(0.75) + 0(0.25)) = 0.02955665 \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.8 สมมติให้ $S(0) = K = 100$ บาท, $u = 0.1$, $d = 0.01$ และ $r = 0.06$ โดยทุกครั้งที่มีการขายหุ้นจะต้องจ่ายค่านายหน้าซื้อขาย (commission) 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรที่ผู้ซื้อคอลออปชันได้รับ

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^* = \frac{0.06 - 0.01}{0.1 - 0.01} = 0.5556$

$$\text{และ } S(1) = \begin{cases} 100(1+0.1) & ; \text{probability } 0.5556 \\ 100(1+0.01) & ; \text{probability } 0.4444 \end{cases} = \begin{cases} 110 & ; \text{probability } 0.5556 \\ 101 & ; \text{probability } 0.4444 \end{cases}$$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์ของคอลออปชัน คือ

$$f(S(1)) = [S(1) - K]^+ = [S(1) - 100]^+ = \begin{cases} 10 & ; \text{probability } 0.5556 \\ 1 & ; \text{probability } 0.4444 \end{cases}$$

โดยสูตร (4.25) จะได้

$$C^E(0) = (1+r)^{-1} E^*[f(S(1))] = (1+0.06)^{-1} (10(0.5556) + 1(0.4444)) = 5.6608$$

เนื่องจากการขายหุ้นมีค่านายหน้าซื้อขายเกิดขึ้น ดังนั้นกำไรที่ผู้ซื้อคอลออปชันได้รับ เท่ากับ

$$[S(1) - K]^+ - C^E(1+r) - \text{commission} = [S(1) - 100]^+ - 5.6608(1+0.06) - 0.02S(1)$$

$$= \begin{cases} 10 & ; \uparrow \\ 1 & ; \downarrow \end{cases} - 5.6608(1.06) - 0.02 \begin{cases} 110 & ; \uparrow \\ 101 & ; \downarrow \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1.7996 & ; \uparrow \\ -7.0204 & ; \downarrow \end{cases} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.9 กำหนดให้ $S(0) = 100$, $K = 95$, $u = 0.1$ และ $d = -0.1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 8% จงคำนวณหามูลค่าของพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลออปชันและพุทออปชัน พร้อมทั้งคำนวณหาราคาของคอลและพุทออปชัน

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $S(1) = \begin{cases} 100(1+0.1) & ; \uparrow \\ 100(1-0.1) & ; \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 110 & ; \uparrow \\ 90 & ; \downarrow \end{cases}$

$$\text{และผลประโยชน์สำหรับคอลออปชัน } f(S) = [S - 95]^+ = \begin{cases} 15 & ; \uparrow \\ 0 & ; \downarrow \end{cases}$$

คำนวณหาพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลออปชันตามสูตร (4.24) ได้

$$[x, y] = \left[\frac{15 - 0}{(0.1 + 0.1)100}, \frac{(1+0.1)0 - (1-0.1)15}{(0.1+0.1)(1+0.08)} \right] = [0.75, -62.50]$$

โดยสูตร (4.23) จะได้

$$C^E(0) = xS(0) + y = 0.75(100) - 62.50 = 12.50 \text{ บาท}$$

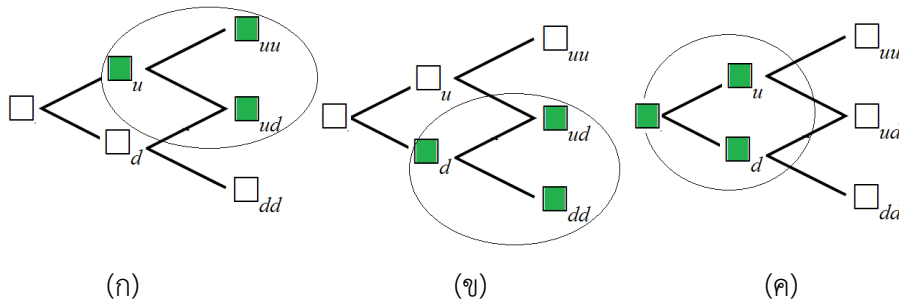
ต่อไปคำนวณหาพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับพุทอปชัน เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพุทอปชัน $f(S) = [95 - S]^+ = \begin{cases} 0 & ; \uparrow \\ 5 & ; \downarrow \end{cases}$ ดังนั้น พอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับพุทอปชัน คือ

$$[x, y] = \left[\frac{0 - 5}{(0.1 + 0.1)100}, \frac{(1 + 0.1)5 - (1 - 0.1)0}{(0.1 + 0.1)(1 + 0.08)} \right] = [-0.25, 25.4630]$$

ซึ่งทำให้ได้ $P^E(0) = xS(0) + y = -0.25(100) + 25.4630 = 0.4630$ บาท □

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2- คาบเวลา

ต่อไปจะกำหนดราคาสารออปชันโดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา (2-step model) พิจารณาแผนภาพต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ต่อไปนี้



รูปที่ 4.7 ต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา

จากต้นไม้ตามรูปที่ 4.7 จะได้ว่า $S(1)$ มีค่าที่เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

$$S_u = (1 + u)S(0) \quad \text{และ} \quad S_d = (1 + d)S(0)$$

และราคา $S(2)$ มีค่าที่เป็นไปได้ 3 ค่า คือ

$$S_{uu} = (1 + u)^2 S(0), \quad S_{ud} = (1 + u)(1 + d)S(0) \quad \text{และ} \quad S_{dd} = (1 + d)^2 S(0)$$

สามารถหาราคาออปชันแต่ละชั่วโมงในแต่ละต้นไม้ย่อยโดยประยุกต์ใช้ต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา และ ทฤษฎีบท 4.11 ดังนี้ เนื่องจากผลประโยชน์ $D(2) = f(S(2))$ จากรูปที่ 4.7(ก) และ 4.7(ข) และ สูตร (4.24) จะได้ ราคาสารออปชัน $D(1)$ เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

$$D_u(1) = \frac{1}{1+r} (p^* f(S_{uu}) + (1 - p^*) f(S_{ud})), \quad D_d(1) = \frac{1}{1+r} (p^* f(S_{ud}) + (1 - p^*) f(S_{dd}))$$

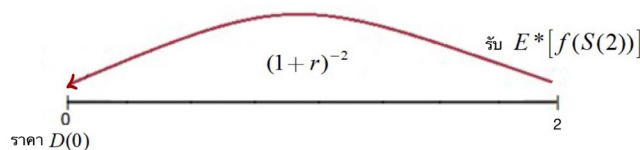
โดยใช้การทำซ้ำ (replication procedure) จากรูป 4.7 (ค) จะได้ ราคาสารออปชัน $D(0)$ คือ

$$D(0) = (1 + r)^{-1} E^*[f(S(1))] = (1 + r)^{-1} E^*[D(1)]$$

$$\begin{aligned}
 &= (1+r)^{-1} [p^* D_u(1) + (1-p^*) D_d(1)] \\
 &= (1+r)^{-2} [p^* (p^* f(S_{uu}) + (1-p^*) f(S_{ud})) + (1-p^*) (p^* f(S_{ud}) + (1-p^*) f(S_{dd}))] \\
 &= (1+r)^{-2} [(p^*)^2 f(S_{uu}) + 2p^* (1-p^*) f(S_{ud}) + (1-p^*)^2 f(S_{dd})] \\
 &= (1+r)^{-2} \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{2-k} f(S(0)(1+u)^k (1+d)^{2-k}) \\
 &= (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))]
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$D(0) = (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))] \quad (4.26)$$



รูปที่ 4.8 ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์

ตัวอย่างที่ 4.10 สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 100 บาทโดยมีอัตราเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้น $K(n) = \begin{cases} 0.2 & ; \uparrow \\ -0.1 & ; \downarrow \end{cases}, n=1,2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.12 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของคอลและพุดออปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 105 บาท และเวลาใช้สิทธิเดือนที่ 6

วิธีทำ จากโจทย์ $u = 0.2$, $d = -0.1$ และ $r = 0.12/4 = 0.03$ ต้องวัด (3 เดือน) คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^* = \frac{0.03 + 0.1}{0.2 + 0.1} = 0.4333$

จากสูตร (9.35), $S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) & ; \text{probability } p^2 \\ (1+u)(1+d) S(0); & \text{probability } 2p(1-p) \\ (1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^2 \end{cases}$

จะได้ $S(2) = \begin{cases} 144 & ; \text{probability } 0.18774889 \\ 108 & ; \text{probability } 0.49110222 \\ 81 & ; \text{probability } 0.32114889 \end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์สำหรับคอลออปชันได้

$$f(S(2)) = [S(2) - 105]^+ = \begin{cases} 39 & ; \text{probability } 0.18774889 \\ 3 & ; \text{probability } 0.49110222 \\ 0 & ; \text{probability } 0.32114889 \end{cases}$$

คำนวณราคาคออปชั่นตามสูตร (4.26) ได้

$$C^E(0) = (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))] \\ = (1.03^{-2})(39(0.18774889) + 3(0.49110222) + 0(0.32114889)) = 8.2906 \text{ บาท}$$

สำหรับการคำนวณราคาพหุอปชั่นสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพหุอปชั่น

$$f(S(2)) = [105 - S(2)]^+ = \begin{cases} 0 & ; \text{probability } 0.18774889 \\ 0 & ; \text{probability } 0.49110222 \\ 24 & ; \text{probability } 0.32114889 \end{cases}$$

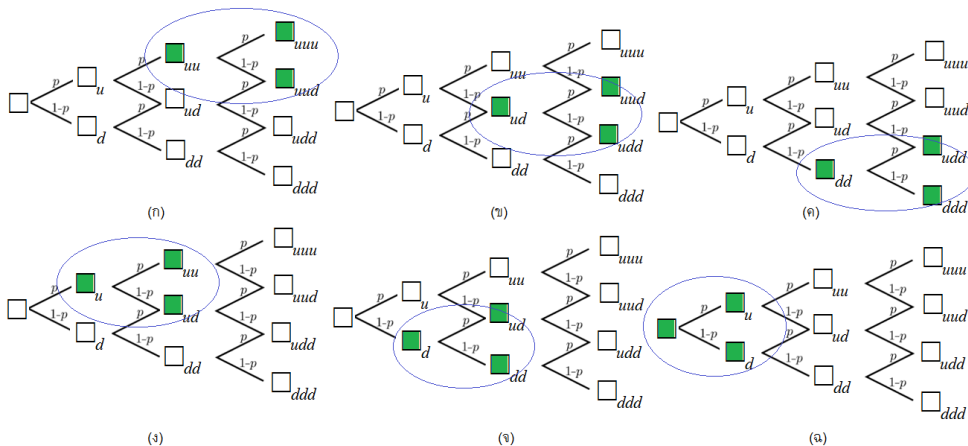
ดังนั้น ราคาคออปชั่นตามสูตร (4.26) คือ

$$P^E(0) = (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))] \\ = (1.03^{-2})(0(0.18774889) + 0(0.49110222) + 24(0.32114889)) = 7.2651 \text{ บาท}$$

□

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

ต่อไปจะกำหนดราคาตราสารออปชั่นโดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา (3-step model) โดยการพิจารณาต้นไม้ และการทำซ้ำ ดังรูป ต่อไปนี้



รูปที่ 4.9 ต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

จากบทที่ 2 เราทราบว่าราคา $S(3)$ เป็นไปได้ 4 ค่า ดังนี้

$$S(3) = \begin{cases} S_{uuu} = (1+u)^3 S(0) & ; \text{probability } p^3 \\ S_{uud} = (1+u)^2 (1+d) S(0) & ; \text{probability } 3p^2(1-p) \\ S_{udd} = (1+u)(1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } 3p(1-p)^2 \\ S_{ddd} = (1+d)^3 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^3 \end{cases}$$

จะได้ $D(3)$ เป็นไปได้ 4 ค่า คือ

$$D(3) = f(S(3)) = \begin{cases} D_{uuu} = f(S_{uuu}) ; \text{probability } (p^*)^3 \\ D_{uud} = f(S_{uud}) ; \text{probability } 3(p^*)^2(1-p^*) \\ D_{udd} = f(S_{udd}) ; \text{probability } 3p^*(1-p^*)^2 \\ D_{ddd} = f(S_{ddd}) ; \text{probability } (1-p^*)^3 \end{cases}$$

ค่า $D(2)$ เป็นไปได้ 3 ค่า คือ

$$D(2) = \begin{cases} D_{uu} = (1+r)^{-1} (p^* D_{uuu} + (1-p^*) D_{uud}) ; \text{probability } (p^*)^2 \\ D_{ud} = (1+r)^{-1} (p^* D_{uud} + (1-p^*) D_{udd}) ; \text{probability } 2p^*(1-p^*) \\ D_{dd} = (1+r)^{-1} (p^* D_{udd} + (1-p^*) D_{ddd}) ; \text{probability } (1-p^*)^2 \end{cases}$$

ค่า $D(1)$ เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

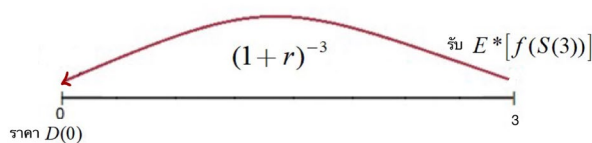
$$D(1) = \begin{cases} D_u = (1+r)^{-1} (p^* D_{uu} + (1-p^*) D_{ud}) ; \text{probability } p^* \\ D_d = (1+r)^{-1} (p^* D_{ud} + (1-p^*) D_{dd}) ; \text{probability } 1-p^* \end{cases}$$

จะได้ ราคาออปชัน $D(0)$ คือ

$$\begin{aligned} D(0) &= (1+r)^{-1} (p^* D_u + (1-p^*) D_d) \\ &= (1+r)^{-2} (p^* (p^* D_{uu} + (1-p^*) D_{ud}) + (1-p^*) (p^* D_{ud} + (1-p^*) D_{dd})) \\ &= (1+r)^{-2} ((p^*)^2 D_{uu} + 2p^*(1-p^*) D_{ud} + (1-p^*)^2 D_{dd}) \\ &= (1+r)^{-3} ((p^*)^2 (p^* D_{uuu} + (1-p^*) D_{uud}) + 2p^*(1-p^*) (p^* D_{uud} + (1-p^*) D_{udd}) \\ &\quad + (1-p^*)^2 (p^* D_{udd} + (1-p^*) D_{ddd})) \\ &= (1+r)^{-3} ((p^*)^3 D_{uuu} + 3(p^*)^2(1-p^*) D_{uud} + 3p^*(1-p^*)^2 D_{udd} + (1-p^*)^3 D_{ddd}) \\ &= (1+r)^{-3} ((p^*)^3 f(S_{uuu}) + 3(p^*)^2(1-p^*) f(S_{uud}) + 3p^*(1-p^*)^2 f(S_{udd}) + (1-p^*)^3 f(S_{ddd})) \\ &= (1+r)^{-3} \left(\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{3-k} f(S(0)(1+u)^k (1+d)^{3-k}) \right) \\ &= (1+r)^{-3} E^*[f(S(3))] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$D(0) = (1+r)^{-3} E^*[f(S(3))] \quad (4.27)$$



รูปที่ 4.11 ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์

ตัวอย่างที่ 4.11 กำหนดให้ $S(0) = K = 100$ บาท, $u = 0.2$, $d = -0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลอง 3-คาบเวลาเพื่อคำนวณราคาของคอลลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 9

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้แบบจำลอง 3 คาบเวลา จากโจทย์จะได้ว่า 1 คาบเวลา (งวด) = 3 เดือน และโจทย์กำหนดให้ $u = 0.2$, $d = -0.1$ และ $r = 0.08/4 = 0.02$ ต่อคาบ (3 เดือน)

สามารถคำนวณความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^* = \frac{0.02 + 0.1}{0.2 + 0.1} = 0.4$

$$\text{จากสูตร (2.36), } S(3) = \begin{cases} (1+u)^3 S(0) & ; \text{probability } p^3 \\ (1+u)^2 (1+d) S(0) & ; \text{probability } 3p^2(1-p) \\ (1+u)(1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } 3p(1-p)^2 \\ (1+d)^3 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^3 \end{cases}$$

$$\text{จะได้ } S(3) = \begin{cases} 172.80 & ; \text{probability } 0.064 \\ 129.60 & ; \text{probability } 0.288 \\ 97.2 & ; \text{probability } 0.432 \\ 72.9 & ; \text{probability } 0.216 \end{cases}$$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์สำหรับคอลลออปชันได้

$$f(S(3)) = [S(3) - 100]^+ = \begin{cases} 72.80 & ; \text{probability } 0.064 \\ 29.60 & ; \text{probability } 0.288 \\ 0 & ; \text{probability } 0.432 \\ 0 & ; \text{probability } 0.216 \end{cases}$$

คำนวณราคาคอลลออปชันตามสูตร (4.27) ได้

$$\begin{aligned} C^E(0) &= (1+r)^{-3} E^*[f(S(3))] \\ &= (1.02^{-3})(72.80(0.064) + 29.60(0.288) + 0(0.432) + 0(0.216)) = 12.4236 \text{ บาท} \end{aligned}$$

สำหรับการคำนวณราคาพุทออปชันสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพุทออปชัน

$$f(S(3)) = [100 - S(3)]^+ = \begin{cases} 0 & ; \text{probability } 0.064 \\ 0 & ; \text{probability } 0.288 \\ 2.8 & ; \text{probability } 0.432 \\ 27.1 & ; \text{probability } 0.216 \end{cases}$$

ดังนั้น ราคาคอลลออปชันตามสูตร (4.27) คือ

$$\begin{aligned} P^E(0) &= (1+r)^{-3} E^*[f(S(3))] \\ &= (1.02^{-3})(0(0.064) + 0(0.288) + 2.8(0.432) + 27.1(0.216)) = 6.6558 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา

จากแบบรูปที่ได้จากแบบจำลอง 1 คาบเวลา, 2 คาบเวลา และ 3 คาบเวลา สามารถสรุปสูตรของราคาออพชันด้วยแบบจำลอง N คาบเวลา ได้ดังนี้

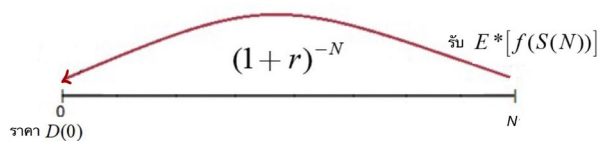
$$\begin{aligned} D(0) &= (1+r)^{-N} \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} f(S(0)(1+u)^k (1+d)^{N-k}) \right) \\ &= (1+r)^{-N} E^*[f(S(N))] \end{aligned} \quad (4.28)$$

ทฤษฎีบท 4.12 สำหรับแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ซึ่งมีผลประโยชน์ $f(S(N))$ จะได้ว่าภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ราคาออพชัน $D(0)$ อยู่ในรูป

$$D(0) = (1+r)^{-N} E^*[f(S(N))] \quad (4.29)$$

พิสูจน์ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

□

**รูปที่ 4.12** ราคาของออพชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์

จากสูตร (4.26) สามารถกล่าวได้ว่า ราคาของออพชันจะเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ที่จะได้รับเมื่อมีการปิดสถานะของสัญญาที่เวลาใช้สิทธิ ดังนั้นหากหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล เพื่อไม่ให้เกิดการค้ำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยงซึ่งเกิดจากเงินปันผลที่ได้รับ ราคาของออพชัน $D(0)$ จะต้องคำนวณจากราคาหุ้นที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว นั่นคือถ้าสมมติว่ามีการจ่ายเงินปันผลครั้งเดียวที่คาบเวลาที่ N จำนวน div_N ราคาของออพชัน $D(0)$ จะเท่ากับค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ที่คำนวณจากราคาที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว นั่นคือ

$$D(0) = (1+r)^{-N} E^*[f(S(N) - \text{div}_N)] \quad (4.30)$$

ตัวอย่างที่ 4.12 กำหนดให้ $S(0) = K = 100$ บาท, $u = 0.3$, $d = -0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.04 ต่อครึ่งปี จงใช้แบบจำลอง 50 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 6

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้แบบจำลอง 50 คาบเวลา จากโจททย์จะได้ว่า 1 คาบเวลา (งวด) = 6/50 เดือน และ โจททย์กำหนดให้ $u = 0.3$, $d = -0.1$ และ $r = (1 + 0.04)^{1/50} - 1 = 0.00078472$ ต่องวด สามารถคำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

$$p^* = \frac{0.00078472 + 0.1}{0.3 + 0.1} = 0.2519618$$

จากสูตร (4.28), $C^E(0) = (1+r)^{-N} \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} f(S(0)(1+u)^k (1+d)^{N-k}) \right)$

จะได้ $C^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1-0.2519618)^{50-k} f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) \right)$

เมื่อ $f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) = [100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 100]^+ = 100 \left[(0.9)^{50} \left(\frac{1.3}{0.9} \right)^k - 1 \right]^+$

เนื่องจาก $(0.9)^{50} \left(\frac{1.3}{0.9} \right)^k - 1 > 0$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

ทำให้ได้ว่า $f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) = 100 \left[(0.9)^{50} \left(\frac{1.3}{0.9} \right)^k - 1 \right]$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

ดังนั้น

$C^E(0)$

$$= (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=15}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1-0.2519618)^{50-k} 100 \left[(0.9)^{50} \left(\frac{1.3}{0.9} \right)^k - 1 \right] \right)$$

$$= 45.6197$$

สำหรับพุทออปชัน โดยใช้สูตร (4.28) ได้

$$P^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1-0.2519618)^{50-k} f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) \right)$$

เมื่อ $f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) = [100 - 100(1.3)^k (0.9)^{50-k}]^+ = 100 [1 - (1.3)^k (0.9)^{50-k}]^+$

เนื่องจาก $1 - (0.9)^{50} \left(\frac{1.3}{0.9} \right)^k > 0$ สำหรับทุกๆ $k \leq 14$

ดังนั้น $f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k}) = 100 (1 - (1.3)^k (0.9)^{50-k})$ สำหรับทุกๆ $k \leq 14$ และทำให้ได้

$$P^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1-0.2519618)^{50-k} 100 (1 - (1.3)^k (0.9)^{50-k}) \right)$$

$$= 41.7735$$

อีกวิธีหนึ่ง เราสามารถใช้สมบัติความเสมอภาคระหว่างคอลและพุทอปชั่นในการคำนวณราคาของ

พุทอปชั่นได้

$$C^E(0) - P^E(0) = S(0) - Ke^{-\delta T}$$

จะได้ $P^E(0) = C^E(0) - S(0) + Ke^{-\delta T} = 45.6197 - 100 + 100(1.00078472^{-50}) = 41.7735$

ตารางที่ 4.1 ตารางอย่างย่อการใช้ excel ช่วยคำนวณค่า C^E และ P^E กรณีหุ้นไม่มีการจ่ายปันผล

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
k	p^k	$(1-p)^{(50-k)}$	$S(k)=S(0)*(1+u)^k*(1+d)^{(50-k)}$	$f(S(k))=\max\{S(k)-K,0\}$	$50Ck$	$c1*c2*c4*c5$
0	1.000000000	0.000000497	0.515378	0.000000	1.00	0.000000
1	0.251961800	0.000000664	0.744434	0.000000	50.00	0.000000
2	0.063484749	0.000000888	1.075294	0.000000	1225.00	0.000000
3	0.015995732	0.000001187	1.553202	0.000000	19600.00	0.000000
11	0.000000260	0.000012107	29.433014	0.000000	37353738800.00	0.000000
12	0.000000065	0.000016185	42.514354	0.000000	121399651100.00	0.000000
13	0.000000016	0.000021636	61.409623	0.000000	354860518600.00	0.000000
14	0.000000004	0.000028924	88.702788	0.000000	937845656300.00	0.000000
15	0.000000001	0.000038666	128.126250	28.126250	2250829575120.00	2.563346
16	0.000000000	0.000051690	185.071250	85.071250	4923689695575.00	5.712644
17	0.000000000	0.000069101	267.325139	167.325139	9847379391150.00	7.569312
18	0.000000000	0.000092376	386.136311	286.136311	18053528883775.00	7.993198
19	0.000000000	0.000123492	557.752450	457.752450	30405943383200.00	7.254134
46	0.000000000	0.313108679	11438372.717923	11438272.717923	230300.00	0.000000
47	0.000000000	0.418573114	16522093.925889	16521993.925889	19600.00	0.000000
48	0.000000000	0.559561149	23865246.781840	23865146.781840	1225.00	0.000000
49	0.000000000	0.748038200	34472023.129324	34471923.129324	50.00	0.000000
50	0.000000000	1.000000000	49792922.297913	49792822.297913	1.00	0.000000
					sum=	47.444453
					C(0)	45.619671
					P(0)=C(0)-S(0)+K(1+r)^(-1)	41.7735264

หมายเหตุ ตัวเลขที่ได้จากการคำนวณในตารางเล่มนี้ส่วนใหญ่แล้วเป็นค่าโดยประมาณ แต่เพื่อความสะดวกบางครั้งจะยังคงใช้เครื่องหมาย = แทนเครื่องหมาย $\approx$

ตัวอย่างที่ 4.13 จากตัวอย่างที่ 4.12 จงคำนวณราคาของคอลและพุทอปชั่นโดยสมมติว่าหุ้นมีการจ่ายปันผล 1 ครั้งที่ปลายเดือนที่ 6 จำนวน 3 บาท

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4.12 จะได้

$$C^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left[\sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1 - 0.2519618)^{50-k} f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 3) \right]$$

$$\text{เมื่อ } f(100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 3) = [100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 3 - 100]^+ = [100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 103]^+$$

เนื่องจาก $100(1.3)^k (0.9)^{50-k} - 103 > 0$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

ทำให้ได้ว่า $f(100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 3) = 100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 103$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

ดังนั้น $C^E(0)$

$$= (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=15}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1 - 0.2519618)^{50-k} (100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 103) \right)$$

$$= 44.8625$$

สำหรับพหุคูณ จะได้ว่า

$$P^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1 - 0.2519618)^{50-k} f(100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 3) \right)$$

$$\text{เมื่อ } f(100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 3) = [100 - 100(1.3)^k(0.9)^{50-k} + 3]^+ = [103 - 100(1.3)^k(0.9)^{50-k}]^+$$

เนื่องจาก $103 - 100(1.3)^k(0.9)^{50-k} > 0$ สำหรับทุกๆ $k \leq 14$

ดังนั้น $f(100(1.3)^k(0.9)^{50-k} - 3) = 103 - 100(1.3)^k(0.9)^{50-k}$ สำหรับทุกๆ $k \leq 14$ และทำให้ได้ว่า

$$P^E(0) = (1.00078472)^{-50} \left(\sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} (0.2519618)^k (1 - 0.2519618)^{50-k} (103 - 100(1.3)^k(0.9)^{50-k}) \right)$$

$$= 43.9010$$

อีกวิธีหนึ่ง เราสามารถใช้สมบัติความเสมอภาคระหว่างคอลและพหุคูณในกรณีที่มีการจ่ายปัน

ผลในการคำนวณราคาของพหุคูณได้ $C^E - P^E = S(0) - \text{div}_0 - Ke^{-\delta T}$

จะได้ $P^E(0) = C^E(0) - S(0) + \text{div}_0 + Ke^{-\delta T}$

$$= 44.8625 - 100 + 3(1.00078472^{-50}) + 100(1.00078472^{-50}) = 43.9010$$

ตารางที่ 4.2 ตารางอย่างย่อการใช้ excel คำนวณค่า C^E และ P^E กรณีที่มีการจ่ายปันผล

k	c1 p^k	c2 $(1-p)^{(50-k)}$	c3 $S(k)=S(0)*(1+u)^k*(1+d)^{(50-k)}$	c4 $S(k)-\text{div}$	c5 $f(S(k)-\text{div})=\max\{S(k)-\text{div}, 0\}$	c6 $50Ck$	c7 $c1*c2*c5*c6$
0	1.00000000000000	0.00000050	0.515378	-2.485	0.000	1.00	0.000000
1	0.25196180000000	0.00000066	0.744434	-2.256	0.000	50.00	0.000000
2	0.0634847486592	0.00000089	1.075294	-1.925	0.000	1225.00	0.000000
3	0.0159957315447	0.00000119	1.553202	-1.447	0.000	19600.00	0.000000
11	0.0000002598255	0.00001211	29.433014	26.433	0.000	37353738800.00	0.000000
12	0.0000000654661	0.00001618	42.514354	39.514	0.000	121399651100.00	0.000000
13	0.0000000164950	0.00002164	61.409623	58.410	0.000	354860518600.00	0.000000
14	0.0000000041561	0.00002892	88.702788	85.703	0.000	937845656300.00	0.000000
15	0.0000000010472	0.00003867	128.126250	125.126	25.126	2250829575120.00	2.289934
16	0.0000000002638	0.00005169	185.071250	182.071	82.071	4923689695575.00	5.511190
17	0.0000000000665	0.00006910	267.325139	264.325	164.325	9847379391150.00	7.433601
44	0.00000000000000	0.17520345	5482296.983147	5482293.983	5482193.983	15890700.00	0.000000
45	0.00000000000000	0.23421725	7918873.420101	7918870.420	7918770.420	2118760.00	0.000000
46	0.00000000000000	0.31310868	11438372.717923	11438369.718	11438269.718	230300.00	0.000000
47	0.00000000000000	0.41857311	16522093.925889	16522090.926	16521990.926	19600.00	0.000000
48	0.00000000000000	0.55956115	23865246.781840	23865243.782	23865143.782	1225.00	0.000000
49	0.00000000000000	0.74803820	34472023.129324	34472020.129	34471920.129	50.00	0.000000
50	0.00000000000000	1.00000000	49792922.297913	49792919.298	49792819.298	1.00	0.000000
						sum =	46.657043
						C(0)	44.862546
						P(0)=C(0)-S(0)+div0+K(1+r)^(-N)	43.9010173



4.6.2 สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์

สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์ (cox-ross-rubinstein formula) จะพิจารณาแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N - คาบเวลา สำหรับในกรณีที่ K เป็นราคาใช้สิทธิซึ่ง ผลประโยชน์ $f(x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \leq K$ ดังนั้น จะมี m ที่น้อยที่สุด ซึ่ง

$$S(0)(1+u)^k (1+d)^{N-k} > K \quad \text{สำหรับทุกๆ } k = m, m+1, \dots, N \quad (4.31)$$

จากสูตร (4.28) จะลดรูปได้เป็น

$$C^E = (1+r)^{-N} \left(\sum_{k=m}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} (S(0)(1+u)^k (1+d)^{N-k} - K) \right) \quad (4.32)$$

จากสมการ (4.30) สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$C^E = a_N S(0) + b_N K \quad (4.33)$$

เมื่อ
$$a_N = (1+r)^{-N} \left(\sum_{k=m}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} (1+u)^k (1+d)^{N-k} \right)$$

และ
$$b_N = -(1+r)^{-N} \sum_{k=m}^N \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$$

เราสามารถจัดรูป a_N ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$a_N = \sum_{k=m}^N \binom{N}{k} \left(p^* \left(\frac{1+u}{1+r} \right) \right)^k \left((1-p^*) \left(\frac{1+d}{1+r} \right) \right)^{N-k} \quad (4.34)$$

จะสังเกต ได้ว่า $p^* \left(\frac{1+u}{1+r} \right) + (1-p^*) \left(\frac{1+d}{1+r} \right) = 1$ เพื่อความสะดวกให้ $q = p^* \left(\frac{1+u}{1+r} \right)$

จะได้
$$a_N = \sum_{k=m}^N \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} \quad (4.35)$$

นิยาม $\varphi(m, N, x) = \sum_{k=0}^m \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}$ สำหรับทุก ๆ $0 < x < 1$

สังเกตได้ว่า $\varphi(N, N, x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} = 1$

ดังนั้นสามารถเขียน a_N และ b_N ในรูปของ φ ได้เป็น

$$a_N = 1 - \varphi(m-1, N, q) \quad \text{และ} \quad b_N = -(1+r)^{-N} (1 - \varphi(m-1, N, p^*)) \quad (4.36)$$

นั่นคือ
$$C^E = (1 - \varphi(m-1, N, q)) S(0) - (1+r)^{-N} (1 - \varphi(m-1, N, p^*)) K \quad (4.37)$$

และพิจารณาในทำนองเดียวกัน จะได้

$$P^E = -\varphi(m-1, N, q) S(0) + (1+r)^{-N} \varphi(m-1, N, p^*) K \quad (4.38)$$

ตัวอย่างที่ 4.14 จากตัวอย่างที่ 4.12 จงใช้สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินส์ไจน์สำหรับแบบจำลอง 50 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 6

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

$$p^* = \frac{0.00078472 + 0.1}{0.3 + 0.1} = 0.2519618$$

$$\text{และคำนวณ } q = p^* \left(\frac{1+u}{1+r} \right) = 0.2519618 \left(\frac{1+0.3}{1+0.00078472} \right) = 0.32729351$$

เนื่องจาก $100(1.3)^k (0.9)^{50-k} > 100$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

โดยสูตร (4.37) จะได้

$$C^E(0) = (1 - \varphi(14, 50, 0.32729351))100 - (1.00078472^{-50})(1 - \varphi(14, 50, 0.2519618))100$$

$$\text{เมื่อ } \varphi(14, 50, 0.32729351) = \sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} 0.32729351^k (1 - 0.32729351)^{50-k} = 0.29142835$$

$$\text{และ } \varphi(14, 50, 0.2519618) = \sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} 0.2519618^k (1 - 0.2519618)^{50-k} = 0.73753011$$

$$\text{ดังนั้น } C^E(0) = (1 - 0.29142835)100 - (1.00078472^{-50})(1 - 0.73753011)100 = 45.6197$$

ต่อไปคำนวณราคาพุทออปชันโดยใช้สูตร (4.38) ได้

$$\begin{aligned} P^E(0) &= -\varphi(14, 50, 0.32729351)100 + (1.00078472^{-50})\varphi(14, 50, 0.2519618)100 \\ &= (-0.29142835)100 + (1.00078472^{-50})(0.73753011)100 = 41.7735 \end{aligned}$$

ตารางที่ 4.3 ตารางอย่างย่อการใช้ excel คำนวณค่า C^E และ P^E กรณีหุ้นไม่มีการจ่ายปันผล

k	C(50,k)	$q^k(1-q)^{(50-k)}$	$C(N,k)q^k(1-q)^{(N-k)}$	$p^{*k}(1-p^*)^{(50-k)}$	$C(N,k)p^{*k}(1-p^*)^{(N-k)}$
0	1	0.0000000025	0.0000000025	0.0000004968	0.0000004968
1	50	0.0000000012	0.0000000599	0.0000001673	0.00000083670
2	1225	0.0000000006	0.0000007139	0.0000000564	0.0000690473
3	19600	0.0000000003	0.0000055574	0.0000000190	0.0003721154
4	230300	0.0000000001	0.0000317704	0.0000000064	0.0014727413
5	2118760	0.0000000001	0.0001422072	0.0000000022	0.0045637855
6	15890700	0.0000000000	0.0005189131	0.0000000007	0.0115291532
7	99884400	0.0000000000	0.0015869420	0.0000000002	0.0244097297
8	536878650	0.0000000000	0.0041500305	0.0000000001	0.0441928861
9	2505433700	0.0000000000	0.0094225800	0.0000000000	0.0694656449
10	10272278170	0.0000000000	0.0187960010	0.0000000000	0.0959322994
11	37353738800	0.0000000000	0.0332540491	0.0000000000	0.1175014122
12	121399651100	0.0000000000	0.0525823103	0.0000000000	0.1286285497
13	354860518600	0.0000000000	0.0747810702	0.0000000000	0.1266451443
14	937845656300	0.0000000000	0.0961561649	0.0000000000	0.1127387350
		$\varphi(m-1, N, q)$	0.291428372	$\varphi(m-1, N, p^*)$	0.737530108
		a_N	0.708571628	b_N	-0.252374921
		C(0)	45.61967063		
		P(0)	41.77352637		



4.7 สูตรของแบล็ก-โชลส์

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาของแบล็ก-โชลส์คิดค้นโดย ฟิชเชอร์ แบล็ก (Fisher Black), มายรอน โชลส์ (Myron Scholes) และ โรเบิร์ต ซี เมอร์ตัน (Robert C. Merton) ซึ่ง 2 ใน 3 ในนี้คือ มายรอน โชลส์ และ โรเบิร์ต ซี เมอร์ตัน ได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเศรษฐศาสตร์ ในปี ค.ศ.1970 และเป็นที่น่าเสียดายที่ ฟิชเชอร์ แบล็ก ได้เสียชีวิตลงเสียก่อนจึงไม่ได้รับรางวัล แบบจำลองแบล็ก-โชลส์มีบทบาทค่อนข้างมากในการกำหนดราคาซื้อขายอปชั่นในปัจจุบัน ถึงแม้ว่าแต่ละสมการในแบบจำลองจะต้องใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ยุ้งยากและมีความซับซ้อนอย่างมาก แต่เนื่องด้วยในปัจจุบันความเจริญทางด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็เจริญรุดหน้าไปอย่างมากเช่นกัน เราจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์มาใช้แก้ปัญหาและคำนวณราคาอปชั่นด้วยแบบจำลองที่ยุ้งยากนี้ได้ อย่างง่ายดาย ไม่ว่าจะใช้โปรแกรม excel หรือ โปรแกรมสำเร็จรูปอื่นที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อให้สามารถใช้งานทางด้านการเงินได้โดยเฉพาะ เป็นต้น

การกำหนดสัญลักษณ์ต่างๆที่จะใช้ต่อไปนี้ยังคงใช้เหมือนที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ อ้างถึงแบบจำลองราคาเชิงเวลาต่อเนื่องที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 จะได้ราคาของหุ้นกำหนดโดย

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)} \quad (4.39)$$

เมื่อ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มของการเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน และ $S(t)$ มีการแจกแจงแบบลอกลอนอร์มอล

พิจารณายุโรปียนอปชั่นที่มีระยะเวลาคงกำหนด T และผลประโยชน์ $f(S(T))$ เราสามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกับแบบจำลองราคาแบบไม่ต่อเนื่อง คือ ราคาอปชั่นที่เวลา $t = 0$ คือค่าคาดหวังของผลประโยชน์ $f(S(T))$ ที่ถูกคิดลดด้วยฟังก์ชันคิดลดจากอัตราผลตอบแทนทบต้นต่อเนื่อง δ ของตราสารหนี้ที่สมมูลกับอัตราผลตอบแทนต่องวด r นั่นคือ $e^{-\delta T} = (1+r)^{-T}$ ดังนั้น จะได้

$$D(0) = e^{-\delta T} E^*[f(S(T))] \quad (4.40)$$

ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^*

ต่อไปจะพิจารณา $E[e^{-\delta t} S(t)]$ ซึ่งเป็นค่าคาดหวังของราคา $S(t)$ ที่ถูกคิดลดด้วย $e^{-\delta t}$ หรือมูลค่าปัจจุบันของราคา $S(t)$ เนื่องจาก $W(t) \sim N(0, t)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ภายใต้ความน่าจะเป็น p ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[e^{-\delta t} S(t)] &= E[S(0)e^{-\delta t} e^{\mu t + \sigma W(t)}] = S(0)E[e^{-\delta t + \mu t + \sigma W(t)}] \\ &= S(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t + \mu t + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= S(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\left(-\delta + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \frac{(x-\sigma t)^2}{2t}} dx \\ &= S(0) e^{\left(-\delta + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}} dx \\ &= S(0) e^{\left(-\delta + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = S(0) e^{\left(-\delta + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \end{aligned} \quad (4.41)$$

จาก (4.41) จะเห็นว่าค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบัน $S(t)$ ไม่ควรขึ้นกับเวลา t นั่นคือ อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ จะต้องเท่ากับ $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ ซึ่งจะทำให้ $E[e^{-\delta t} S(t)] = S(0)$ ดังนั้นเงื่อนไข $\delta = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นที่ทำให้มีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* ซึ่ง

$$E^*[e^{-\delta t} S(t)] = S(0) \quad (4.42)$$

การแสดงว่ามีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* มีความยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งในที่นี้จะไม่กล่าวถึงบทพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้น ซึ่งเป็นราคาที่จะทราบ ที่เวลา $t=s$ ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของ $S(t)$ จะเท่ากับ

$$E^*[S(t)e^{-\delta t} | S(s)] = S(s)e^{-\delta s} \quad (4.43)$$

บทแทรก 4.22 (สมบัติของมาร์ติงเกล) กำหนดให้ $\tilde{S}(s) = S(s)e^{-\delta s}$ เป็นราคาหุ้นส่วนลด ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะได้ว่า

$$E^*[\tilde{S}(t) | S(s)] = \tilde{S}(s) \quad \text{สำหรับทุกๆ } t \geq s \geq 0 \quad (4.44)$$

พิจารณายุโรปียนคอลออปชัน จากสมการ (4.44) จะได้

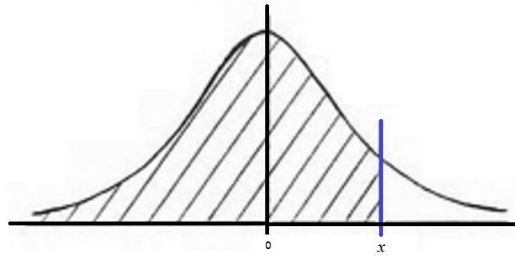
$$\begin{aligned}
C^E(0) &= e^{-\delta T} E^* \left[[S(T) - K]^+ \right] = E^* \left[[S(T)e^{-\delta T} - Ke^{-\delta T}]^+ \right] \\
&= E^* \left[\left[S(0)e^{-\delta T + \mu T + \sigma W(T)} - Ke^{-\delta T} \right]^+ \right] \\
&= E^* \left[\left[S(0)e^{-\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \mu T + \sigma W(T)} - Ke^{-\delta T} \right]^+ \right] \\
&= E^* \left[\left[S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)} - Ke^{-\delta T} \right]^+ \right] \\
&= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \left(S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma x} - Ke^{-\delta T} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
&= S(0) \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx - Ke^{-\delta T} \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
&= S(0) \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x^2 - 2T\sigma x + \sigma^2 T^2)}{2T}} dx - Ke^{-\delta T} \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= S(0) \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x - \sigma T)^2}{2T}} dx - Ke^{-\delta T} \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= S(0) \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-\delta T} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy
\end{aligned}$$

นั่นคือ
$$C^E(0) = S(0)N(d_1) - Ke^{-\delta T}N(d_2) \quad (4.45)$$

เมื่อ
$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (\delta + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (\delta - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

และ
$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (4.46)$$

จะเห็นว่า $N(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าสะสมของการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ นั่นคือ $N(x) = P(z \leq x) = P(z \geq -x)$ ดังนั้นสามารถคำนวณค่า $N(x)$ ได้จากตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติซึ่งปรากฏอยู่ในภาคผนวก หรือเพื่อความสะดวกอาจจะใช้คำสั่งฟังก์ชัน `normsdist(z)` ในโปรแกรม excel ก็ได้



รูปที่ 4.13 ฟังก์ชันค่าสะสมของการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน $N(x) = P(z \leq x)$

โดยอาศัยแนวความคิดจากสมการ (4.59) และ (4.60) จะได้ราคายุโรปเปียนคอลลอปชัน และยุโรปเปียนพุทออปชัน ที่เวลา $t \leq T$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.14 (สูตรของแบล็ก-โชลส์) สำหรับยุโรปเปียนออปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T จะได้ว่า ราคาของออปชันที่เวลา $t \leq T$ ใดๆ เป็นไปดังนี้

$$C^E(t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-\delta(T-t)}N(d_2) \quad (4.47)$$

$$\text{และ} \quad P^E(t) = Ke^{-\delta(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1) \quad (4.48)$$

$$\text{เมื่อ } d_1 = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (\delta + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (\delta - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\text{และ } N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (4.49)$$

ในสูตร (4.49) จะเห็นว่าพารามิเตอร์ตัวหนึ่งที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการกำหนดหรือประเมินราคาออปชันด้วยสูตรของแบล็ก-โชลส์ นั่นคือ พารามิเตอร์ σ ซึ่งเรียกว่า ค่าความผันผวน (volatility) ของราคาหุ้น $S(t)$ เนื่องจาก $\ln \frac{S(t)}{S(0)} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ ถ้าแทน $t=1$ จะได้

$$\ln \frac{S(1)}{S(0)} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{นั่นคือ ค่าความผันผวน } \sigma \text{ ก็คือส่วนเบี่ยงเบนของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม}$$

ต่อคาบเวลานั่นเอง เนื่องจาก $S(t)$ เป็นราคาหุ้นในอนาคต ดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณค่าความผันผวน σ ได้โดยตรง ในทางปฏิบัตินิยมใช้ ส่วนเบี่ยงเบนของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมต่อคาบเวลา ซึ่งคำนวณจากข้อมูลราคาในอดีตมาแทนค่าความผันผวน σ ในเชิงทฤษฎี เนื่องจากเราทราบว่า σ^2

$= NVar[k(n)]$ ในที่นี้จะประมาณ $Var[k(n)]$ ด้วย ความแปรปรวน $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ จากกลุ่มตัวอย่างของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม X ของหุ้นอ้างอิง

นั่นคือ
$$\sigma^2 \approx s^2 N = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right) N \quad (4.50)$$

เมื่อ n เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

S_i เป็นราคาหุ้นในเวลาที่ i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)

$x_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$ อัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นอ้างอิง ($i = 1, 2, \dots, n$)

$\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นอ้างอิง

N เป็นจำนวนจุดเวลาที่แบ่งใน 1 คาบเวลา (ในที่นี้จำนวนจุดเวลา ใน 1 ปีกำหนดให้เท่า 250 วันทำการใน 1 ปี)

ตัวอย่างที่ 4.15 จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปี ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 42 วันทำการ ดังนี้

วันที่	S_i	$x_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	100.00	-	-	-
1	100.00	0	0.0002451	0.00000006
2	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
3	99.00	0	0.0002451	0.00000006
4	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
5	101.00	0.009950331	0.0101955	0.00010395
6	100.00	-0.00995033	-0.0097052	0.00009419
7	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
8	99.00	0	0.0002451	0.00000006
9	98.00	-0.01015237	-0.0099072	0.00009815

10	97.00	-0.0102565	-0.0100114	0.00010023
11	98.00	0.0102565	0.0105016	0.00011028
12	98.00	0	0.0002451	0.00000006
13	97.00	-0.0102565	-0.0100114	0.00010023
14	96.00	-0.01036279	-0.0101177	0.00010237
15	96.00	0	0.0002451	0.00000006
16	95.00	-0.0104713	-0.0102262	0.00010457
17	95.00	0	0.0002451	0.00000006
18	96.00	0.0104713	0.0107164	0.00011484
19	97.00	0.010362787	0.0106079	0.00011253
20	97.00	0	0.0002451	0.00000006
21	97.00	0	0.0002451	0.00000006
22	98.00	0.0102565	0.0105016	0.00011028
23	98.00	0	0.0002451	0.00000006
24	99.00	0.010152371	0.0103975	0.00010811
25	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
26	100.00	0	0.0002451	0.00000006
27	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
28	99.00	0	0.0002451	0.00000006
29	99.00	0	0.0002451	0.00000006
30	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
31	100.00	0	0.0002451	0.00000006
32	101.00	0.009950331	0.0101955	0.00010395
33	100.00	-0.00995033	-0.0097052	0.00009419
34	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
35	99.00	0	0.0002451	0.00000006
36	99.00	0	0.0002451	0.00000006

37	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
38	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
39	99.00	0	0.0002451	0.00000006
40	99.00	0	0.0002451	0.00000006
41	99.00	0	0.0002451	0.00000006
$\bar{x} = -0.00024513$				$s^2 = 0.00005909$

จากตาราง $\sigma^2 \approx s^2 N = 0.00005909(250) = 0.01477282$ ดังนั้นจะได้ค่าความผันผวนของราคาหุ้น $\sigma \approx 0.1215435 = 12.15435\%$ ต่อปี □

ตัวอย่างที่ 4.16 กำหนดยุโรปแบบออพชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.2 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu = 0.2$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 12.15 % ต่อปี จึงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $P^E(t)$ สำหรับ $t \in [0, 0.5]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่องเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
S_i	90	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $S(0) = 90$, $K = 100$, $T = 6/12 = 0.5$, $\delta = 0.2$ และ

$\sigma^2 = 0.1215^2 = 0.01476225$ จากสูตรของแบล็ก-โชลส์ (4.64) และ (4.65) จะได้

$$d_1 = \frac{\ln \frac{90}{100} + (0.2 + 0.5(0.01476225))(0.5 - t)}{0.1215\sqrt{0.5 - t}} = \frac{-0.0137 - 1.7068t}{\sqrt{0.5 - t}}$$

และ
$$d_2 = \frac{\ln \frac{90}{100} + (0.2 - 0.5(0.01476225))(0.5 - t)}{0.1215\sqrt{0.5 - t}} = \frac{-0.0745 - 1.5853t}{\sqrt{0.5 - t}}$$

และ
$$P^E(t) = 100e^{-0.2(0.5-t)} N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$

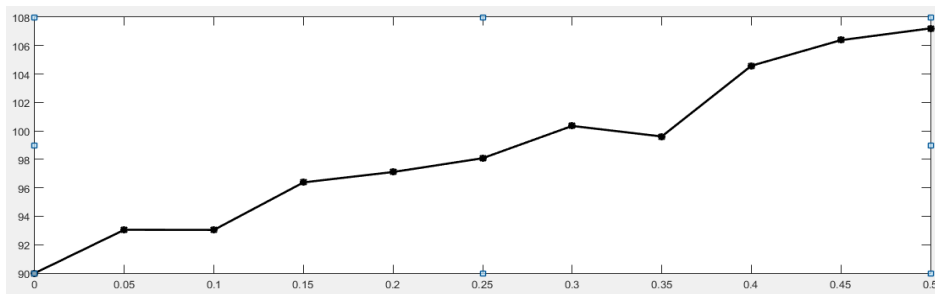
เมื่อ $N(x) = P(z \leq x)$ เราจะเขียนกราฟของ $P^E(t)$ โดยการแบ่งช่วงเวลา $[0, 0.5]$ ออกเป็น 10

ช่องย่อยๆ จะได้ความกว้างของแต่ละช่องย่อยเท่ากับ $\frac{0.5-0}{10} = 0.05$ โดยมีจุดเวลาเป็น t_i ,

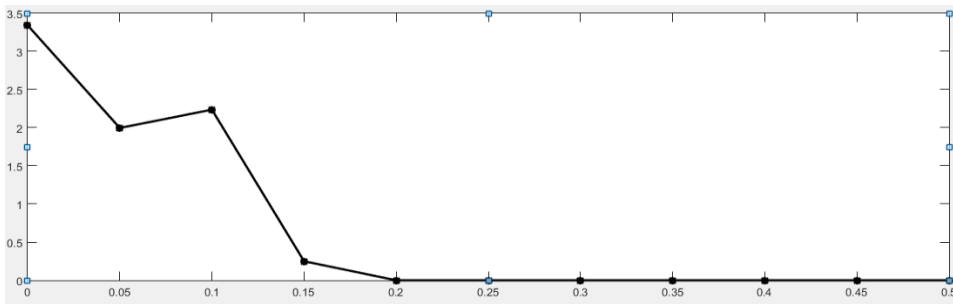
$d_1(t_i)$, $d_2(t_i)$, $N(-d_1(t_i))$, $N(-d_2(t_i))$ และ $P^E(t_i)$ แสดงในตารางต่อไปนี้

t_i	$S(t_i)$	$d_1(t_i)$	$d_2(t_i)$	$N(-d_1)$	$N(-d_2)$	$P^E(t_i)$
0	90	-0.0194	-0.1054	0.5077289	0.54195449	3.342468
0.05	93.05	-0.1476	-0.2292	0.5586866	0.590650775	1.996808
0.1	93.04	-0.2915	-0.3685	0.6146771	0.643732176	2.236551
0.15	96.38	-0.4559	-0.5279	0.6757727	0.701206915	0.249714
0.2	97.11	-0.6482	-0.7149	0.7415877	0.762660714	0
0.25	98.08	-0.8808	-0.9417	0.810787	0.826814069	0
0.3	100.35	-1.1756	-1.2300	0.8801207	0.890658681	0
0.35	99.61	-1.5778	-1.6250	0.9426944	0.947917402	0
0.4	104.58	-2.2023	-2.2409	0.986177	0.987482207	0
0.45	106.38	-3.4961	-3.5235	0.999764	0.99978708	0
0.5	107.21	$-\infty$	$-\infty$	1	1	0

หมายเหตุ ค่าที่คำนวณได้จากสูตรของแบล็ก-โชลส์ได้ค่าน้อยกว่า 0 แต่เงื่อนไขขอบเขตของราคาตามทฤษฎีบท 4.17 จึงได้ว่าราคาของ $P^E(t_i) = 0$ เมื่อ $t_i \geq 0.2$



กราฟราคาของหุ้นที่เวลา t ใดๆ



กราฟราคาของ $P^E(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

□

บทสรุปท้ายบทที่ 4

บทที่ 4 นี้ได้กล่าวถึงกระบวนการกำหนดราคาของยุโรปียนออปชัน โดยอิงหลักการสำคัญของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่คือ **หลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle)** และ **การประเมินค่าตามความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation)** ซึ่งวางอยู่บนพื้นฐานของ **สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property)** ที่ระบุว่ามูลค่าที่คาดหวังของราคาทรัพย์สินที่ปรับด้วยส่วนลดตอกเบี้ย จะต้องเท่ากับราคาปัจจุบันภายใต้โลกความเสี่ยงเป็นกลาง

เนื้อหาในบทนี้มุ่งเน้นการใช้แบบจำลอง **ต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model)** และสูตรของ **คอกซ์-รอสส์-โรบินสไตน์ (Cox-Ross-Rubinstein: CRR Model)** สำหรับการคำนวณราคายุโรปียนออปชันในเชิงตัวเลข โดยอาศัยเทคนิคการคำนวณย้อนกลับ (Backward Induction) เพื่อวิเคราะห์ความคุ้มค่าของออปชันในแต่ละจุดเวลา และประเมินกระแสเงินสดที่คาดหวังภายใต้สถานการณ์ความไม่แน่นอนของตลาด

สิ่งที่สำคัญคือ บทนี้ไม่เพียงเป็นการวางรากฐานทฤษฎีของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์เท่านั้น แต่ยังเปิดโอกาสให้เห็นการประยุกต์ใช้งานจริงในโลกการลงทุน เช่น

- **นักลงทุนสถาบัน** ใช้แบบจำลองเหล่านี้ในการประเมินมูลค่าออปชันที่ซื้อขายในตลาด เช่น คอลออปชันของหุ้น ซึ่งจะช่วยให้ตัดสินใจได้ว่าราคาตลาดปัจจุบันสูงหรือต่ำกว่ามูลค่าทางทฤษฎี
- **ผู้จัดการกองทุน** ใช้เพื่อสร้างกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยง เช่น การใช้ฟุทออปชันในการประกันพอร์ตจากความเสียหายของตลาดหุ้น
- **นักออกแบบผลิตภัณฑ์การเงิน (financial engineers)** ใช้แบบจำลอง CRR เป็นฐานในการสร้างตราสารอนุพันธ์ซับซ้อน เช่น Barrier options หรือ structured notes

แนวคิดที่เรียนรู้ในบทนี้จึงเป็นทั้งเครื่องมือทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ ที่สามารถใช้วิเคราะห์ความผันผวนของราคา ประเมินทางเลือกการลงทุน และจัดการความเสี่ยงในพอร์ตการลงทุนอย่างมีประสิทธิภาพ

นอกจากนี้ยังได้ขยายการวิเคราะห์ไปสู่การใช้ **สูตรของแบล็ก-โชลส์ (Black-Scholes Formula)** ซึ่งเป็นแบบจำลองในเวลาต่อเนื่องที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในตลาดทุน โดยเฉพาะในการกำหนดราคาออปชันยุโรปแบบคอลและพุทออปชันที่ไม่มีเงินปันผล สูตรนี้อาศัยสมมติฐานเกี่ยวกับพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ที่เคลื่อนไหวตามการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล (lognormal distribution) และเป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาเครื่องมืออนุพันธ์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นในทางปฏิบัติ

โดยสรุป บทที่ 4 ได้ให้ความเข้าใจอย่างเป็นระบบเกี่ยวกับกลไกของออปชัน การประเมินราคาอย่างมีเหตุผล และการนำแนวคิดเหล่านี้ไปใช้จริงในตลาดทุน ซึ่งล้วนเป็นทักษะที่จำเป็นต่อทั้งนักวิเคราะห์ นักลงทุน และผู้พัฒนาผลิตภัณฑ์ทางการเงินในยุคที่ความผันผวนและความซับซ้อนของตลาดเพิ่มสูงขึ้นอย่างต่อเนื่อง

เอกสารอ้างอิง

- [1] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). *Option pricing: A simplified approach*. Journal of Financial Economics, 7(3), 229–263.
- [2] Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [3] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2015). *Derivatives: Principles and Practice* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [4] Haug, E. G. (2007). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [5] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.
- [6] Baxter, M., & Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press.
- [7] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [8] Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

- 1) กำหนดราคาใช้สิทธิของยูโรเปียนคอลออปชัน 145 บาท และอายุของสัญญา 6 เดือน สมมติว่าผู้ถือได้กำไร 13 บาทหลังจากใช้สิทธิ และราคาซื้อออปชัน 15.50 บาท จงหาราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิ กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี
- 2) สมมติว่าพุทออปชันของหุ้นอ้างอิง a อายุของสัญญา 3 เดือน มีราคาใช้สิทธิ 110 บาท ณ วันครบกำหนด ถ้าพุทออปชันมีราคาซื้อ ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2557 เท่ากับ 12.50 บาท และ ราคาหุ้นอ้างอิง ณ วันเดียวกันเท่ากับ 110 บาท จงหาราคาหุ้นอ้างอิงควรเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะทำให้นักลงทุนไม่ขาดทุนจากการซื้อคอลออปชัน ณ วันที่ครบกำหนด สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.5 % ต่อปี
- 3) สมมติพุทออปชันของหุ้นอ้างอิงหนึ่งมีอายุครบกำหนด 3 เดือน ราคาใช้สิทธิ 80 บาท ณ วันครบกำหนด และคอลออปชันมีราคาซื้อ 10.25 บาท ถ้าราคาหุ้น ณ วันครบกำหนด สามารถเป็น 92 บาท, 80 บาท หรือ 75 บาท ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{3}$ เท่ากัน จงหาค่าคาดหวังของกำไร(ขาดทุน)ของผู้ถือสัญญา กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปี
- 4) สมมติให้หุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 130 บาทต่อหุ้น และสมมติว่าราคาของยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นอ้างอิงนี้ มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท ซึ่งจะใช้สิทธิได้ในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยที่ราคาซื้อขายของคอลออปชันนี้เท่ากับ 25.50 บาท จงหาราคาซื้อขายของพุทออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ และเวลาใช้สิทธิเท่ากับคอลออปชันฉบับนี้ เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8.5 % ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี
- 5) ผู้ส่งออกเสื้อผ้ายี่ห้อหนึ่งไปยังประเทศสหรัฐอเมริกาต้องการทำสัญญาออปชัน เพื่อขายเงินสกุลดอลลาร์ ในอีก 6 เดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทย และสกุลดอลลาร์เป็น 2.5 % และ 3.5% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์เป็นเงิน

สกุลบาทไทย ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 33.25 ดอลลาร์ จงหาราคาใช้สิทธิของยุโรปเยนคอลและยุโรปเยนพุทอปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E + 1$

6) สมมติว่ายุโรปเยนคอลอปชัน และพุทอปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ 120 บาท ระยะเวลาใช้สิทธิ 9 เดือน โดยที่มีคอลและพุทอปชันมีราคาซื้อขายที่ 15.20 บาท และ 17.80 บาท ตามลำดับ ถ้าราคาปัจจุบันหุ้นอ้างอิงราคา 105 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.7% ต่อปี จงหาแนวทางการลงทุนที่ทำให้เกิดการกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

7) กำหนดให้ $r = 0.05$, $S(0) = K = 100$ บาท จงคำนวณหาราคา $P^E(0)$ ของคอลอปชัน โดยใช้แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เมื่อกำหนดให้ $u = 0.10$ และ $d = -0.05$

8) สำหรับยุโรปเยนอปชัน สมมติให้ $S(0) = 100$, $K = 110$ บาท, $u = 0.2$, $d = -0.1$ และ $r = 0.05$ โดยทุกครั้งที่มีการขายหุ้นจะต้องจ่ายค่านายหน้าซื้อขาย (commission) 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรที่ผู้ซื้อพุทอปชันได้รับ

9) สำหรับยุโรปเยนอปชัน กำหนดให้ $S(0) = K = 1$, $u = 0.15$ และ $d = -0.1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 7.5 % จงคำนวณหามูลค่าของพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลอปชันและพุทอปชัน พร้อมทั้งคำนวณหาราคาของคอลและพุทอปชันด้วย

10) สำหรับยุโรปเยนอปชัน สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 100 บาทโดยมีอัตราเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้น $k(n) = \begin{cases} 0.1823 & ; \uparrow \\ -0.1054 & ; \downarrow \end{cases}$, $n = 1, 2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.6 ต่อปีทบต้นทุกเดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของคอลและพุทอปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 110 บาท และเวลาใช้สิทธิเดือนที่ 3

11) สำหรับหุ้นโรเปียนออปชัน กำหนดให้ $S(0) = K = 100$ บาท, $u = 0.2$, $d = -0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลอง 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 9

12) สำหรับหุ้นโรเปียนออปชัน กำหนดให้ $S(0) = 100$, $K = 90$ บาท, $u = 0.2$, $d = -0.2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีทบต้นทุกครึ่งปี สัญญามีอายุ 6 เดือน

12.1) จงใช้แบบจำลอง 20 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน

12.2) จงใช้สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์สำหรับแบบจำลอง 20 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน

12.2) สมมติว่าหุ้นมีการจ่ายปันผล 1 ครั้งที่ปลายเดือนที่ 6 จำนวน 5.5 บาทจงคำนวณราคาของคอลและพุทออปชัน

13) สำหรับหุ้นโรเปียนออปชัน กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วย โดยที่หุ้นโรเปียนออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
110	19.50	4.25
120	13.75	7.50
130	8.25	11.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

14) กำหนดหุ้นโรเปียนคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน ($t=3$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา

$$k(n) = \begin{cases} 0.0953 & ; \uparrow \\ -0.1054 & ; \downarrow \end{cases} \text{ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ } 0.20 \text{ ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน}$$

14.1) จงคำนวณราคาของคอลออปชัน

14.2) จงคำนวณราคาของยูโรเปียนคอลออปชัน ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 4.5 บาทที่เวลา $t = 3$

15) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลยุโรเปียนออปชันและคอลยุโรเปียนออปชันของหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 100 บาทและมีอายุ 6 เดือนโดยสมมติว่า $S(0) = 48$ บาท $u = 0.15$, $d = -0.20$ และอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี

16) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคาของยูโรเปียนคอลออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ 20 บาท และมีอายุ 3 เดือน กำหนดให้ $u = 0.15$ $d = -0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 12% ต่อปีทบต้นทุกเดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 18 บาท โดยหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 1 ครั้ง 0.50 บาท ต่อหุ้น ณ ปลายเดือนที่ 3

17) กำหนดยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท อายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 32 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.3 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu = 0.15$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 20.35% ต่อปี จงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $C^E(t)$ สำหรับ $t \in [0, 0.25]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลออกเป็น 10 ช่องเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
S_i	32	32.20	31.34	30.41	29.10	31.01	31.89	32.08	33.08	34.08	33.58

18) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคาของยูโรเปียนคอลออปชันกับราคาอเมริกันคอลออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และมีอายุ 6 เดือน โดยกำหนด $u = 0.2$ $d = 0$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 100 บาท

19) จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปี ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 22 วันทำการ ดังนี้

วันที่	ราคา	วันที่	ราคา
0	50	11	51.08
1	50.00	12	51.84
2	50.00	13	50.88
3	50.41	14	50.88
4	51.10	15	50.58
5	51.01	16	49.75
6	50.89	17	48.90
7	51.08	18	48.67
8	51.08	19	48.31
9	51.08	20	47.51
10	51.08	21	47.51

19) (ประเมินราคาคอลอปชั่นและการป้องกันความเสี่ยง) ให้เลือกหุ้นที่ตนเองสนใจ 1 บริษัทที่จดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์ (เช่น หุ้นใน SET100 หรือหุ้นที่มีสภาพคล่องสูง) แล้วดึงข้อมูลราคาหุ้นย้อนหลัง 252 วันทำการ (ประมาณ 1 ปี) จากแหล่งข้อมูล เช่น <https://www.settrade.com> หรือ <https://finance.yahoo.com>

19.1) คำนวณผลตอบแทนลอการิทึมรายวันของราคาหุ้น

19.2) คำนวณอัตราดริฟท์ (drift) รายปี

19.3) คำนวณค่าความผันผวน (volatility) รายปี

19.4) สมมุติสถานการณ์: คุณต้องการซื้อคอลอปชั่นแบบยุโรปียนของหุ้นนี้ โดยมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)$ = ราคาปิดล่าสุด, ราคาใช้สิทธิ $K = S(0) \times 1.05$, ระยะเวลา $T = \frac{60}{365}$, อัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง $r = 0.03$

จงประเมินราคาคอลอปชั่นโดยใช้สูตร Black-Scholes

19.5) วิเคราะห์ว่าการซื้อคอลอปชั่นนี้เหมาะสมต่อการป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตหรือไม่

20) (ประเมินราคาพหุออปชันและการป้องกันความเสี่ยง) เลือกหุ้นที่สนใจ แล้วดำเนินการดังต่อไปนี้
 ดึงข้อมูลราคาหุ้นย้อนหลัง 1 ปี

คำนวณผลตอบแทนรายวัน

20.1) คำนวณผลตอบแทนลอการิทึมรายวันของราคาหุ้น

20.2) คำนวณอัตราดอกเบี้ยรายปี

20.3) คำนวณค่าความผันผวนรายปี

20.4) สมมติว่าคุณต้องการซื้อพหุออปชันแบบยุโรปเพื่อกันความเสี่ยง โดยมีกำหนดพารามิเตอร์ในการประเมินราคาต่อไปนี้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)$ = ราคาปิดล่าสุด, ราคาใช้สิทธิ $K = S(0) \times 0.95$, ระยะเวลา $T = \frac{90}{365}$, อัตราดอกเบี้ย $r = 0.025$ จงประเมินราคาพหุออปชันโดยใช้สูตร Black-Scholes

20.5) วิเคราะห์ว่าการซื้อพหุออปชันนี้เหมาะสมต่อการป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตหรือไม่