

บทที่ 5 แบบจำลองราคาอเมริกันอปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

5.1 อเมริกันอปชัน

5.2 การกำหนดราคาอเมริกันอปชัน

บทนำ

ในบทที่ 4 ได้มีการกล่าวถึงการกำหนดราคายุโรปเลียนอปชัน โดยใช้แนวคิดพื้นฐานจากทฤษฎี No-Arbitrage และ Risk-Neutral Valuation ผ่านแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค ซึ่งถือเป็นพื้นฐานสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ (Hull, ค.ศ. 2022; Shreve, ค.ศ. 2004) อย่างไรก็ตาม ในโลกของการเงินจริง ตราสารอปชันจำนวนมากไม่ได้ถูกจำกัดให้ใช้สิทธิได้เฉพาะในวันครบกำหนด แต่กลับเปิดโอกาสให้ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้ “เมื่อใดก็ได้” ตลอดอายุของสัญญา ตราสารดังกล่าวเรียกว่า **อเมริกันอปชัน (American Option)**

อเมริกันอปชันจึงมีลักษณะสำคัญที่แตกต่างจากยุโรปเลียนอปชันตรงที่ความยืดหยุ่นในการใช้สิทธิ ส่งผลให้การกำหนดราคาของอเมริกันอปชันมีความซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากต้องพิจารณาความคุ้มค่าระหว่างการใช้สิทธิทันที กับการถือครองต่อไปเพื่อใช้สิทธิในอนาคต การวิเคราะห์ดังกล่าวต้องอาศัยเทคนิค **Backward Induction** บนโครงสร้างของแบบจำลองต้นไม้ (binomial tree model) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Cox, Ross, และ Rubinstein (ค.ศ.1979) เพื่อวิเคราะห์ทางเลือกที่ดีที่สุด ณ ทุกจุดเวลา

บทนี้จะเริ่มต้นด้วยการนิยามและอธิบายคุณสมบัติพื้นฐานของอเมริกันอปชัน ทั้งในมุมมองของผู้ซื้อและผู้ถืออปชัน พร้อมทั้งอภิปรายความสัมพันธ์เชิงทฤษฎีระหว่างราคาของคอลอปชันและพุดอปชัน รวมถึงการวิเคราะห์ผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละกรณี การพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เช่น ขอบเขตราคา ความเสมอภาคเชิงประมาณ และความสัมพันธ์กับยุโรปเลียนอปชัน จะถูกนำเสนอในรูปแบบของทฤษฎีบทและอสมการ เพื่อแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างที่อยู่เบื้องหลังราคาตราสารประเภทนี้

ในหัวข้อถัดไป จะกล่าวถึงกระบวนการกำหนดราคาของอเมริกันอปชันผ่านแบบจำลองต้นไม้ทวิภาคแบบหลายคาบเวลา โดยเน้นการคำนวณย้อนหลังจากวันครบกำหนดสัญญา โดยในแต่ละจุดเวลาจะต้องเปรียบเทียบระหว่างมูลค่าการใช้สิทธิทันที กับมูลค่าที่เกิดจากการถือครองอปชันต่อไป ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่ที่มีรากฐานอยู่บน Martingale Property และการประเมินค่าแบบ Risk-Neutral

นอกจากนี้ ยังมีการประยุกต์ใช้แนวคิดดังกล่าวในการวิเคราะห์กรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล โดยต้องปรับราคาหุ้นให้อยู่ในรูปของราคาหลังหักปันผล (ex-dividend price) ก่อนนำไปใช้ในการคำนวณราคาทางทฤษฎีของอปชัน และบทเรียนนี้ยังได้ยกตัวอย่างกรณีศึกษาเชิงปริมาณ เช่น การวิเคราะห์มูลค่าแฝงและมูลค่าตามเวลา ตลอดจนการประเมินราคาโดยใช้ Excel หรือแบบจำลองเชิงคำนวณที่เหมาะสมกับบริบททางปฏิบัติ

ดังนั้น บทที่ 5 นี้จึงเป็นการขยายองค์ความรู้จากบทก่อนหน้า โดยเจาะลึกถึงอเมริกันอปชันซึ่งมีลักษณะใช้งานได้จริงในตลาดการเงินหลากหลายแห่ง ทั้งในตลาดหุ้น ตลาดสินค้าโภคภัณฑ์ และตลาดอนุพันธ์ โดยใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เข้มข้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์และตัดสินใจได้อย่างแม่นยำ พร้อมรองรับการบริหารความเสี่ยงอย่างมีประสิทธิภาพ

5.1 อเมริกันอปชัน

อเมริกันอปชัน (American Option) คือ ตราสารอนุพันธ์ประเภทอปชันที่ให้ “สิทธิ” แก่ผู้ถือในการซื้อ (Call) หรือขาย (Put) สินทรัพย์อ้างอิง ณ ราคาที่กำหนดไว้ในสัญญา (strike price) **ได้ทุกช่วงเวลา** ตั้งแต่วันที่เริ่มต้นจนถึงวันครบกำหนดของสัญญา ซึ่งแตกต่างจากยุโรปียนอปชันที่สามารถใช้สิทธิได้เพียงในวันครบกำหนดเท่านั้น

ในเชิงทฤษฎี ความยืดหยุ่นนี้ทำให้อเมริกันอปชันมีมูลค่าสูงกว่ายุโรปียนอปชันภายใต้เงื่อนไขเดียวกันเสมอ หรืออย่างน้อยต้องไม่ต่ำกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของพวทอปชันหรือหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผล ความสามารถในการใช้สิทธิก่อนกำหนดเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อกลยุทธ์การลงทุนและการบริหารพอร์ตอย่างมีนัยสำคัญ (Hull, ค.ศ. 2022)

การกำหนดราคาของอเมริกันออปชันจึงต้องพิจารณาทางเลือกของผู้ถือในการ “ใช้สิทธิทันที” กับ “ถือครองสิทธิต่อไป” ซึ่งนำไปสู่การใช้กระบวนการย้อนกลับ (backward induction) บนโครงสร้างของแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (binomial tree model) เพื่อคำนวณมูลค่าในแต่ละจุดเวลา โดยพิจารณาว่าค่าของออปชันในช่วงก่อนถึงวันครบกำหนด ควรเป็นค่ามากที่สุดระหว่าง

- มูลค่าจากการใช้สิทธิทันที (intrinsic value)
- มูลค่าจากการถือครองสิทธิต่อไป (continuation value)

แนวคิดนี้เชื่อมโยงโดยตรงกับหลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle) และการประเมินค่าแบบเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของสมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property) และเป็นแกนกลางของทฤษฎีการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง

- สมบัติเชิงทฤษฎีของราคาคอลและพุทอเมริกันออปชัน
- อสมการที่แสดงขอบเขตของราคาที่เหมาะสมภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ
- ความสัมพันธ์เชิงเปรียบเทียบระหว่างราคาของอเมริกันออปชันกับยุโรปออปชัน
- บทพิสูจน์ที่สนับสนุนข้อสรุปทางคณิตศาสตร์
- กรณีศึกษาที่ใช้วิเคราะห์มูลค่าของสิทธิในบริบทที่มีหรือไม่มีการจ่ายเงินปันผล

ในทางปฏิบัติ อเมริกันออปชันถูกใช้อย่างแพร่หลายในตลาดที่ให้การซื้อขายแบบต่อเนื่อง เช่น ตลาดหุ้นสหรัฐฯ ซึ่งลักษณะของออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้ล่วงหน้า เปิดโอกาสให้นักลงทุนปรับกลยุทธ์ได้อย่างยืดหยุ่นตามสภาพตลาด เช่น การใช้สิทธิก่อนวันประกาศจ่ายเงินปันผล หรือการบริหารความเสี่ยงในสถานการณ์ที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงผันผวนมาก

ในที่นี้ กำหนดสัญลักษณ์ให้ C^A และ P^A แทนราคาหรือค่าพรีเมียมของคอลอเมริกันออปชันและพุทอเมริกันออปชัน ตามลำดับ ส่วนสัญลักษณ์อื่นๆ ยังคงเหมือนในหัวข้อที่ผ่านมา ๆ มาก่อนจะระบุเป็นอย่างอื่น

ทฤษฎีบท 5.1 (ความเสมอภาคเชิงประมาณระหว่างพุดและคอล) ราคาของคอลอเมริกันอปชันและพุดอเมริกันอปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกันมีความสัมพันธ์ ดังสมการต่อไปนี้

$$S(0) - K \leq C^A - P^A \leq S(0) - Ke^{-\delta T} \quad (5.1)$$

พิสูจน์ จะแสดงว่า ข้อ 1) $C^A - P^A \leq S(0) - Ke^{-\delta T}$ และ ข้อ 2) $C^A - P^A \geq S(0) - K$

ข้อ 1) สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^A - P^A > S(0) - Ke^{-\delta T}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรม ได้ดังนี้

- ออกคอลอปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^A บาท
 - ยืมเงิน $Ke^{-\delta T}$ บาท
 - ซื้อพุดอปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน P^A บาท
 - ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
 - นำเงินที่เหลือจำนวน $C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0) > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้ที่ให้อัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่อง δ
- จะได้ $V(0) = 0$

สำหรับการถือสัญญาพุดอเมริกันอปชัน ผู้ถือสามารถเลือกใช้สิทธิ ที่บางเวลา $t_1 \leq T$ ที่ทำให้ผลผลประโยชน์เป็นบวก โดยจะได้รับผลประโยชน์เท่ากับ $K - S(t_1)$ บาท แต่หากไม่มีเวลาใช้สิทธิที่ทำให้ผลประโยชน์เป็นบวก ผู้ถือจะใช้สิทธิที่เวลา T โดยจะได้รับผลประโยชน์เท่ากับ 0 บาท

สำหรับการถือสัญญาคอลอเมริกันอปชัน ผู้ถือสามารถเลือกใช้สิทธิ ที่บางเวลา $t_2 \leq T$ ที่ทำให้ผล ผลประโยชน์เป็นบวก โดยผู้ออกจะต้องจ่ายผลประโยชน์เท่ากับ $S(t_2) - K$ บาท แต่หากไม่มีเวลาใช้สิทธิที่ทำให้ผลประโยชน์เป็นบวก ผู้ถือจะใช้สิทธิที่เวลา T โดยผู้ออกจะจ่ายผลประโยชน์เท่ากับ 0 บาท ขายหุ้น 1 หน่วย เวลา t_2 รับเงิน $S(t_2)$ บาท แต่หากไม่มีเวลาดังกล่าวขายที่ เวลา T รับเงิน $S(T)$ บาท

ที่เวลา T รับเงิน $(C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0))e^{\delta T}$ บาท จากการลงทุนในตราสารหนี้ เราพิจารณาค่าของ $V(T)$ ตามกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าไม่มี t_2 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T) = (C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0))e^{\delta T} + (S(t_2) \text{ or } S(T)) + (K - S(t_1) \text{ or } 0) > 0$$

กรณีที่ 2 ถ้าไม่มี t_1 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T) = (C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0))e^{\delta T} + (S(T) \text{ or } S(t_2)) - (S(t_2) - K \text{ or } 0) > 0$$

กรณีที่ 3 ถ้ามีทั้ง t_1 และ t_2 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T) = (C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0))e^{\delta T} + S(t_2) + (K - S(t_1)) - (S(t_2) - K) > 0$$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า $V(T) > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร

จึงได้สรุปว่า $C^A - P^A \leq S(0) - Ke^{-\delta T}$

ข้อ 2) พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกันซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน □

บทแทรก 5.2 สำหรับหุ้นที่มีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า ราคาของออปชัน

C^A และ P^A จะสอดคล้องตามอสมการ

$$S(0) - \text{div}_0 - K \leq C^A - P^A \leq S(0) - Ke^{-\delta T} \quad (5.2)$$

และยิ่งไปกว่านั้น สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div} จะได้ว่า

$$S(0)e^{-\delta_{\text{div}}T} - K \leq C^A - P^A \leq S(0) - Ke^{-\delta T} \quad (5.3)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 5.13 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0) - \text{div}_0$ □

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนดให้อเมริกันออปชันและยุโรปเบียนออปชันเป็นตราสารภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน (สินค้าอ้างอิง S ราคาใช้สิทธิ K และระยะเวลาครบกำหนด T) จะได้ว่า

$$C^E \leq C^A \text{ และ } P^E \leq P^A \quad (5.4)$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ $C^E \leq C^A$ สำหรับการแสดงว่า $P^E \leq P^A$ ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับ

ผู้อ่าน สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E > C^A$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกยุโรปเบียนคอลลอปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^E บาท

- ซื้ออเมริกันคอลลอปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน C^A บาท

- นำเงินที่เหลือ $C^E - C^A > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ
- จะได้ $V(0) = 0$

หมายเหตุ สำหรับอเมริกันคอลลอปชัน 1 สัญญา นักลงทุนสามารถปิดสถานะได้เมื่อมี $t_1 \leq T$ ที่ทำให้ $S(t_1) > K$ จะได้ผลประโยชน์เท่ากับ $S(t_1) - K$ บาท หากไม่มี t_1 ดังกล่าว ปิดสถานะที่ $t = T$ ได้ผลประโยชน์ 0 บาท

ที่เวลา $t = T$

- รับเงิน $[S(t_1) - K]^+$ บาท จากการปิดสถานะอเมริกันคอลลอปชัน
- รับเงิน $(C^E - C^A)e^{\delta T}$ บาทจากการลงทุนในตราสารหนี้
- ปิดสถานะยุโรปเบียนคอลลอปชัน จ่ายผลประโยชน์ $[S(T) - K]^+$ บาท

จะได้ $V(T) = [S(t_1) - K]^+ + (C^E - C^A)e^{\delta T} + [S(T) - K]^+ > 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $C^E \leq C^A$ □

ทฤษฎีบท 5.3 ราคาของอเมริกันคอลลอปชันและยุโรปเบียนคอลลอปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกัน จะเท่ากันเมื่อเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน

พิสูจน์ สมมติว่าเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน จากทฤษฎีบท 5.15 เราได้ว่า

$C^E \leq C^A$ เหลือเพียงแต่แสดงว่า $C^E \geq C^A$ สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E < C^A$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกสัญญาอเมริกันคอลลอปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^A บาท
- ซื้อยุโรปเบียนคอลลอปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน C^E บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^A - C^E > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ
- จะได้ $V(0) = 0$

เนื่องจากเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน ผู้ถืออเมริกันคอลลอปชันจะใช้สิทธิที่เวลา $t = T$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะยุโรปเบียนคอลลอปชัน รับผลประโยชน์ $[S(T) - K]^+$ บาท

- รับเงิน $(C^A - C^E)e^{\delta T}$ บาทจากการลงทุนในตราสารหนี้

- ปิดสถานะอเมริกัнопชั่น จ่ายผลประโยชน์ $[S(T) - K]^+$ บาท

จะได้ $V(T) = (C^A - C^E)e^{\delta T} > 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $C^A \leq C^E$ □

ทฤษฎีบท 5.4 (ขอบเขตราคา) ราคาของอเมริกัнопชั่นและอเมริกัнопพุทออปชั่นของหุ้นอ้างอิง S ไม่มีการจ่ายปันผล มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกัน สอดคล้องดังสมการต่อไปนี้

$$[S(0) - Ke^{-\delta T}]^+ \leq C^A < S(0) \quad (5.5)$$

และ $[e^{-\delta T}K - S(0)]^+ \leq P^A < K \quad (5.6)$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า หุ้นมีการจ่ายปันผล จะได้ว่า

$$\max\{0, S(0) - K, S(0) - \text{div}_0 - Ke^{-\delta T}\} \leq C^A < S(0) \quad (5.7)$$

และ $\max\{0, -S(0) + K, -S(0) + \text{div}_0 + Ke^{-\delta T}\} \leq P^A < K \quad (5.8)$

ทฤษฎีบท 5.5 (ราคาใช้สิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^A(K)$ และ $P^A(K)$ เป็นราคาของอเมริกัнопชั่นและอเมริกัнопพุทออปชั่นที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรราคาใช้สิทธิ K ถ้า K_1 และ K_2 เป็นราคาใช้สิทธิของออปชั่นที่เวลา T ที่ซึ่ง $K_1 < K_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^A(K_1) > C^A(K_2) \quad (5.9)$$

และ $P^A(K_1) < P^A(K_2) \quad (5.10)$

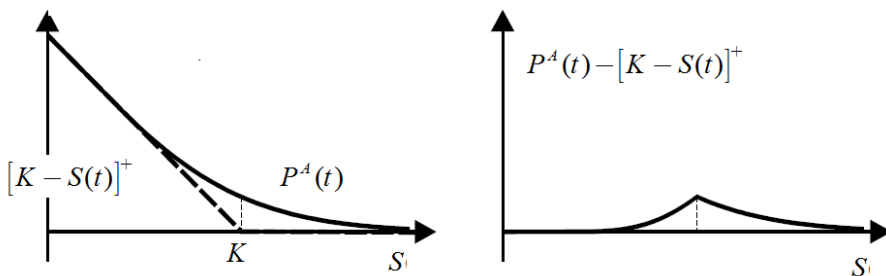
ทฤษฎีบท 5.6 (จำนวนหุ้นในสิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^A(x)$ และ $P^A(x)$ เป็นราคาของอเมริกัнопชั่นและอเมริกัнопพุทออปชั่นที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรจำนวนหน่วยที่ตราสารให้สิทธิซื้อ (ขาย) x หน่วย โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับจำนวนหน่วยดังกล่าวเท่ากับ K เวลาใช้สิทธิ T ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนหุ้นที่ออปชั่นให้สิทธิซื้อ (ขาย) ที่ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^A(x_1) < C^A(x_2) \quad (5.11)$$

และ $P^A(x_1) > P^A(x_2) \quad (5.12)$

บทนิยาม 5.7 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออปชัน *มูลค่าตามเวลา* (the time value) ของอเมริกันออปชัน นิยาม ดังนี้

- มูลค่าตามเวลาสำหรับคอลออปชัน เท่ากับ $C^A(t) - [S(t) - K]^+$
- มูลค่าตามเวลาสำหรับพุทออปชัน เท่ากับ $P^A(t) - [K - S(t)]^+$



รูปที่ 5.8 มูลค่าตามเวลาของอเมริกันพุทออปชันรูปขวามือเปรียบเทียบกับราคาของพุทออปชันกับมูลค่าแฝง

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วยโดยที่อเมริกันออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
115	18.50	3.25
125	12.75	6.50
135	7.25	10.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

วิธีทำ จากนิยามของมูลค่าแฝงของออปชัน คือ

$$[S(t) - K]^+ \text{ สำหรับคอลออปชัน และ } [K - S(t)]^+ \text{ สำหรับพุทออปชัน}$$

และ มูลค่าตามเวลาของออปชันตามบทนิยาม 5.20 คือ

$$C^A(t) - [S(t) - K]^+ \text{ สำหรับคอลออปชัน และ } P^A(t) - [K - S(t)]^+ \text{ สำหรับพุทออปชัน}$$

โดยค่าต่างๆที่คำนวณได้ แสดงในตารางต่อไปนี้

ราคาใช้ สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)		มูลค่าแฝง		มูลค่าตามเวลา	
	คอลออปชัน	พุทออป ชัน	คอลออปชัน	พุทออปชัน	คอลออปชัน	พุทออปชัน
115	18.50	3.25	10.50	0	8	3.25
125	12.75	6.50	0.50	0	12.25	6.50
135	7.25	10.25	0	9.5	7.25	0.75

□

5.2 การกำหนดราคาออปชันอเมริกัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันอเมริกันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N -คาบเวลา โดยนิยามของออปชันอเมริกัน เราทราบว่านักลงทุนสามารถใช้สิทธิได้ทุกๆ จุดเวลา n ซึ่ง $0 \leq n \leq N$ โดยมีผลประโยชน์ $f(S(n))$ ในที่นี้จะแทนราคาออปชันที่เวลา n ด้วยสัญลักษณ์ $D^A(n)$

พิจารณาแบบจำลอง 2 คาบเวลา จะได้ว่านักลงทุนสามารถเลือกใช้สิทธิเพื่อให้เกิดผลประโยชน์ได้ 2 จุดเวลา คือ ที่เวลา $t=1$ โดยมีผลประโยชน์ $f(S(1))$ และเวลาครบกำหนด ($t=2$) โดยมูลค่าของออปชัน ณ เวลาครบกำหนด คือ $D^A(2) = f(S(2))$

$$\text{เมื่อ } S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) & ; \text{probability } p^2 \\ (1+u)(1+d) S(0) & ; \text{probability } 2p(1-p) \\ (1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } (1-p)^2 \end{cases}$$

ที่เวลา $t=1$ ผู้ถือออปชันสามารถเลือกใช้สิทธิได้ทันทีซึ่งจะได้รับผลประโยชน์ $f(S(1))$ บาท หรือรอจนกว่าจะถึงเวลา $t=2$ ซึ่งจะได้รับผลประโยชน์ $f(S(2))$ เนื่องจากหากผู้ถือออปชันรอจนถึงเวลา $t=2$ แล้วราคาออปชันที่เวลา $t=1$ จะมีค่าเท่ากับ ราคาของยุโรปียนออปชัน ซึ่งราคาออปชันที่เวลา $t=1$ คือ

$$(1+r)^{-1} E^*[f(S(2))] = (1+r)^{-1} [p^* f((1+u)S(1)) + (1-p^*) f((1+d)S(1))] \quad (5.13)$$

ดังนั้น ทำให้ได้ว่าราคาของอเมริกันออปชันที่ $t=1$ จะต้องเท่ากับค่าสูงสุดระหว่าง ราคาใช้สิทธิทันทีที่
กับราคาจากการรอให้ถึงเวลา $t=2$ นั่นคือ

$$D^A(1) = \max \{f(S(1)), (1+r)^{-1} E^*[f(S(2))]\} = f_1(S(1)) \quad (5.14)$$

$$\text{เมื่อ } f_1(x) = \max \{f(x), (1+r)^{-1} [p^* f((1+u)x) + (1-p^*) f((1+d)x)]\}$$

พิจารณาในทำนองเดียวกัน จะได้ ว่าราคาของอเมริกันออปชันที่ $t=0$ จะต้องเท่ากับค่าสูงสุด
ระหว่าง ราคาใช้สิทธิทันทีที่ กับราคาจากการรอให้ถึงเวลา $t=1$ นั่นคือ

$$D^A(0) = \max \{f(S(0)), (1+r)^{-1} [p^* f_1((1+u)S(0)) + (1-p^*) f_1((1+d)S(0))]\} \quad (5.15)$$

สำหรับการกำหนดราคาอเมริกันออปชันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา สามารถ
ทำได้ในลักษณะเดียวกันโดยการพิจารณาเวลาไปข้างหน้าซึ่งจะได้ลำดับของ $D^A(n)$ ดังต่อไปนี้

$$D^A(N) = f(S(N))$$

$$D^A(N-1) = \max \{f(S(N-1)), (1+r)^{-1} [p^* f((1+u)S(N-1)) + (1-p^*) f((1+d)S(N-1))]\}$$

$$\equiv f_{N-1}(S(N-1))$$

$$D^A(N-2) = \max \{f(S(N-2)), (1+r)^{-1} [p^* f_{N-1}((1+u)S(N-2)) + (1-p^*) f_{N-1}((1+d)S(N-2))]\}$$

$$\equiv f_{N-2}(S(N-2))$$

⋮

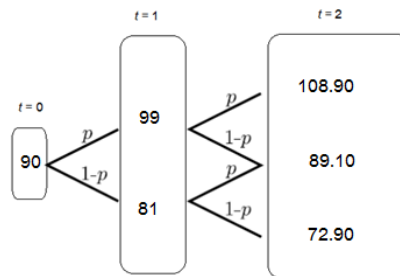
$$D^A(1) = \max \{f(S(1)), (1+r)^{-1} [p^* f_2((1+u)S(1)) + (1-p^*) f_2((1+d)S(1))]\}$$

$$\equiv f_1(S(1))$$

$$D^A(0) = \max \{f(S(0)), (1+r)^{-1} [p^* f_1((1+u)S(0)) + (1-p^*) f_1((1+d)S(0))]\} \quad (5.16)$$

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนดอเมริกันพวออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของ
สัญญา 6 เดือน ($t=2$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการ
เปลี่ยนแปลงราคา $K(n) = \begin{cases} 0.1; \uparrow \\ -0.1; \downarrow \end{cases}$ และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้เท่ากับ
0.20 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน
จงคำนวณราคาของพวออปชัน $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหา $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ซึ่งต้นไม้แสดงราคาหุ้นอ้างอิง $S(t), t = 0, 1, 2$ เป็นดังนี้



ในที่นี้ $r = 0.20/4 = 0.05$ ต่อคาบเวลา และคำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$p^* = \frac{0.05 + 0.1}{0.1 + 0.1} = 0.75 \text{ เราจะคำนวณ } P^A(0)$$

จาก (5.54) โดยการสร้างลำดับราคาของพหุอปชัน ดังนี้

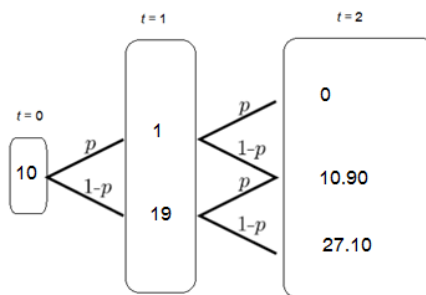
$$P^A(2) = [100 - S(2)]^+$$

$$P^A(1) = \max \left\{ [100 - S(1)]^+, (1+r)^{-1} \left[p^* [100 - (1+u)S(1)]^+ + (1-p^*) [100 - (1+d)S(1)]^+ \right] \right\}$$

$$\equiv f_1(S(1))$$

$$P^A(0) = \max \left\{ f(S(0)), (1+r)^{-1} \left[p^* f_1((1+u)S(0)) + (1-p^*) f_1((1+d)S(0)) \right] \right\}$$

ต่อไปคำนวณค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้ คำนวณมูลค่าแฝง $[100 - S(t)]^+, t = 0, 1, 2$ ซึ่งแสดงได้ด้วยต้นไม้ดังนี้



ต่อไปคำนวณ

$$\begin{aligned} & (1.05^{-1}) (0.75 [100 - 1.15S(1)]^+ + 0.25 [100 - 0.9S(1)]^+) \\ &= (1.05^{-1}) \left(0.75 \left[100 - \begin{cases} 108.9 \\ 89.1 \end{cases} \right]^+ + 0.25 \left[100 - \begin{cases} 89.1 \\ 72.9 \end{cases} \right]^+ \right) \\ &= (1.05^{-1}) \left(0.75 \begin{cases} 0 \\ 10.9 \end{cases} + 0.25 \begin{cases} 10.9 \\ 27.1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2.5952 \\ 14.2381 \end{cases} \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดให้

$$f_1(x) = \max \{ [100 - x]^+, (1.05^{-1}) [0.75[100 - 1.1x]^+ + 0.25[100 - 0.9x]^+] \}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f_1(S(1)) &= \max \{ [100 - S(1)]^+, (1.05^{-1}) [0.75[100 - 1.1S(1)]^+ + 0.25[100 - 0.9S(1)]^+] \} \\ &= \max \left\{ \begin{Bmatrix} 1 \\ 19 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2.5952 \\ 14.2381 \end{Bmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} 2.5952 \\ 19 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ลำดับของราคาพหุออปชันได้ดังนี้

$$P^A(2) = [100 - S(2)]^+ = \begin{cases} 0 & ; \uparrow\uparrow \\ 10.9 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 27.1 & ; \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$P^A(1) = f_1(S(1)) = \begin{cases} 2.5952 \\ 19 \end{cases}$$

$$P^A(0) = \max \{ 10, (1.05)^{-1} (0.75(2.5952) + 0.25(19)) \} = \max \{ 10, 6.3775 \} = 10$$

นั่นคือ ราคาของพหุออปชัน $P^A(0) = 10$ บาท

ตารางแสดงการคำนวณค่าพรีเมียมของพหุออปชัน (หุ้นไม่มีการจ่ายปันผล) โดยใช้โปรแกรม excel

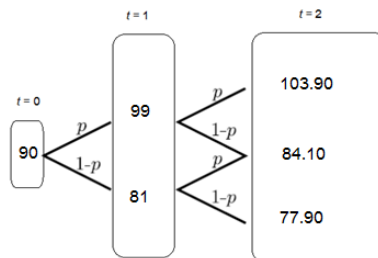
		p*	0.75	
		1-p*	0.25	
		S(0)	S(1)	S(2)
		90	99	108.9
			81	89.1
				72.9
		[K-S(0)]+	[K-S(1)]+	[K-S(2)]+
		10.00	1.00	0.00
			19.00	10.90
				27.10
		P(2)	P(1)	P(0)
		0.0000	2.5952	10.0000
		10.9000	19.0000	
		27.1000		
P(2)=	[K-S(2)]+			
P(1)=	max{[K-S(1)]+, (1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(1))+(1-p*)(K-0.9S(1)))}			
P(0)=	max{[K-S(0)]+, (1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(0))+(1-p*)(K-0.9S(0)))}			

□

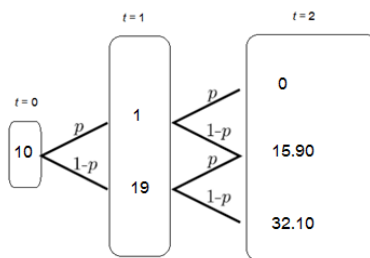
สำหรับในกรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผลราคาที่น่ามาคำนวณผลประโยชน์จะต้องเป็นราคาที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว (ex-dividend stock price) ซึ่งการคำนวณราคาของอเมริกันอปชันสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.3 จากตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณราคาของอเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$ ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 5 บาทที่เวลา $t = 2$

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหา $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา โดยต้นไม้ราคาหุ้นอ้างอิงที่หักออกด้วยเงินปันผลเป็นดังนี้



เราสามารถคำนวณราคา $P^A(0)$ ได้เช่นเดียวกับกรณีที่หุ้นอ้างอิงไม่มีการจ่ายเงินปันผล โดยเริ่มจากคำนวณมูลค่าแฝงของพุทออปชัน ได้ดังนี้



ต่อไปคำนวณ

$$\begin{aligned} & (1.05^{-1}) \left(0.75[100 - 1.1S(1)]^+ + 0.25[100 - 0.9S(1)]^+ \right) \\ &= (1.05^{-1}) \left(0.75 \begin{Bmatrix} 0 \\ 15.90 \end{Bmatrix} + 0.25 \begin{Bmatrix} 15.90 \\ 32.10 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} (1.05^{-1})(0.75(0) + 0.25(15.90)) \\ (1.05^{-1})(0.75(15.90) + 0.25(32.10)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.7857 \\ 19 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดให้

$$f_1(x) = \max \left\{ [100 - x]^+, (1.05^{-1}) [0.75[100 - 1.1x]^+ + 0.25[100 - 0.9x]^+] \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f_1(S(1)) &= \max \left\{ [100 - S(1)]^+, (1.05^{-1}) [0.75[100 - 1.1S(1)]^+ + 0.25[100 - 0.9S(1)]^+] \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{Bmatrix} 1 \\ 19 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 3.7857 \\ 19 \end{Bmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} 3.7857 \\ 19 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

ดังนั้นจากลำดับของราคาพุทออปชันได้ดังนี้

$$P^A(2) = [100 - S(2)]^+ = \begin{cases} 0 & ; \uparrow\uparrow \\ 15.9 & ; \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 32.1 & ; \downarrow\downarrow \end{cases}$$

$$P^A(1) = f_1(S(1)) = \begin{cases} 3.7857 \\ 19 \end{cases}$$

$$P^A(0) = \max \{10, (1.05)^{-1} (0.75(3.7857) + 0.25(19))\} = \max \{10, 7.2279\} = 10$$

นั่นคือ ราคาของพวทอปชั่น $P^A(0) = 10$ บาท

ตารางการคำนวณค่าพรีเมียมของพวทอปชั่น (เห็นมีการจ่ายปันผล) โดยใช้โปรแกรม excel

	p*	0.75	
	1-p*	0.25	
	S(0)	S(1)	S(2)-div
	90	99	103.9
		81	84.1
			67.9
	[K-S(0)]+	[K-S(1)]+	[K-S(2)]+
	10.00	1.00	0.00
		19.00	15.90
			32.10
	P(2)	P(1)	P(0)
	0.0000	3.7857	10.0000
	15.9000	19.0000	
	32.1000		
P(2)=	[K-(S(2)-div)]+		
P(1)=	max{[K-S(1)]+, (1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(1))+(1-p*)(K-0.9S(1)))}		
P(0)=	max{[K-S(0)]+, (1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(0))+(1-p*)(K-0.9S(0)))}		

□

บทสรุปท้ายบทที่ 5

บทที่ 5 ได้กล่าวถึงการกำหนดราคา อเมริกันออปชั่น ซึ่งเป็นตราสารอนุพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษคือ ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้ ทุกช่วงเวลา จนถึงวันครบกำหนดของสัญญา โดยอิงอยู่บนหลักการสำคัญของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่ คือ หลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle) และการประเมินค่าตามความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation) ซึ่งมีรากฐานทางคณิตศาสตร์จาก สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property)

ความยืดหยุ่นของอเมริกันออปชั่นทำให้มีมูลค่าที่ซับซ้อนกว่า ยุโรปียนออปชั่น ซึ่งใช้สิทธิได้เฉพาะวันหมดอายุ การกำหนดราคาจึงไม่สามารถใช้สูตรปิด (closed-form solution) อย่างในกรณีของแบบจำลองแบล็ก-โชลส์ได้โดยตรง แต่ต้องอาศัย แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree

Model) หรือแบบจำลองเชิงเวลาอื่น ๆ เช่น Trinomial Tree หรือ Finite Difference Method ที่สามารถคำนวณแบบ ย้อนกลับ (backward induction) เพื่อเปรียบเทียบ “มูลค่าการใช้สิทธิทันที” กับ “มูลค่าการถือสิทธิต่อไป” ณ ทุกจุดเวลา

ในการใช้งานจริง แบบจำลองเหล่านี้มีบทบาทสำคัญในตลาดการเงินที่มีการซื้อขายอмерикันออปชันอย่างกว้างขวาง เช่น ตลาดหุ้นสหรัฐอเมริกา (CBOE: Chicago Board Options Exchange) และตลาดตราสารอนุพันธ์ของ NYSE และ NASDAQ ซึ่งนักลงทุนสามารถใช้สิทธิคอลออปชันก่อนการจ่ายเงินปันผล หรือใช้พุทออปชันเพื่อบริหารความเสี่ยงในช่วงที่คาดว่าราคาหุ้นจะลดลง นอกจากนี้ นักลงทุนสถาบันยังใช้อмерикันออปชันเป็นเครื่องมือในการสร้างกลยุทธ์การลงทุนเชิงป้องกันความเสี่ยง (hedging strategy) และเพิ่มความยืดหยุ่นในการบริหารพอร์ต

บทนี้ยังแสดงให้เห็นถึง อสมการสำคัญและทฤษฎีบท ที่ระบุขอบเขตราคา (bounds) ความสัมพันธ์กับยุโรปเบียนออปชัน และผลกระทบของเงินปันผลต่อมูลค่าออปชัน ซึ่งล้วนมีความสำคัญทั้งในเชิงทฤษฎีและการตัดสินใจเชิงกลยุทธ์

โดยสรุป บทที่ 5 ไม่เพียงเสนอกรอบแนวคิดและเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์มูลค่าของอмерикันออปชันอย่างเป็นระบบ แต่ยังชี้ให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้ที่ชัดเจนในตลาดการเงินจริง ซึ่งสามารถช่วยให้นักลงทุน นักวิเคราะห์ และผู้จัดการกองทุนสามารถ กำหนดกลยุทธ์การลงทุนที่เหมาะสม ประเมินความคุ้มค่าของออปชัน และบริหารความเสี่ยงได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

- [1] Broadie, M., & Detemple, J. (1996). American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *Review of Financial Studies*, 9(4), 1211–1250. <https://doi.org/10.1093/rfs/9.4.1211>
- [2] Bjork, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd ed.). Oxford University Press.

- [3] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)
- [4] Geske, R., & Johnson, H. E. (1984). The American put option valued analytically. *Journal of Finance*, 39(5), 1511–1524. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1984.tb04910.x>
- [5] Haug, E. G. (2007). *The complete guide to option pricing formulas* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [6] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.
- [7] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21621-2>
- [8] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*. Cambridge University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

- 1) กำหนดให้ผู้ลงทุนซื้ออเมริกันอนุปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ (strike price) เท่ากับ 145 บาท และมีอายุของสัญญา 6 เดือน โดยราคาซื้อออปชันเท่ากับ 15.50 บาท หากผู้ลงทุนใช้สิทธิซื้อหุ้นในช่วงเวลาก่อนครบกำหนดและได้รับกำไร 13 บาทจากการใช้สิทธิ จงคำนวณราคาหุ้นอ้างอิงในขณะที่ใช้สิทธิ และพิจารณาว่าการใช้สิทธิก่อนครบกำหนดให้ผลตอบแทนสูงกว่าการถือจนครบสัญญาหรือไม่ เมื่อกำหนดให้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 7% ต่อปี
- 2) นักลงทุนซื้ออเมริกันอนุปชันของหุ้นบริษัท A โดยมีอายุสัญญา 3 เดือน ราคาใช้สิทธิ 110 บาท ราคาซื้อออปชัน ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2557 เท่ากับ 12.50 บาท และราคาหุ้นอ้างอิงในวันเดียวกันเท่ากับ 110 บาท จงวิเคราะห์ว่าราคาหุ้นควรลดลงอย่างน้อยเพียงใดภายในระยะเวลา 3 เดือน เพื่อให้ให้นักลงทุนสามารถใช้สิทธิได้ทันทีที่ราคาหุ้นลดลงและไม่ขาดทุนจากการลงทุนในออปชัน โดยใช้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.5% ต่อปี
- 3) กำหนดให้นักลงทุนซื้ออเมริกันอนุปชันของหุ้นอ้างอิงบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 80 บาท และราคาซื้อออปชันเท่ากับ 10.25 บาท โดยอายุของสัญญาคือ 3 เดือน สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงในวันครบกำหนดอาจเป็นไปได้ 3 ค่า ได้แก่ 92, 80 หรือ 75 บาท โดยมีความน่าจะเป็นเท่ากัน $\frac{1}{3}$ จงคำนวณค่าคาดหวังของกำไร (หรือขาดทุน) จากการถืออเมริกันอนุปชันฉบับนี้ และพิจารณาว่าในกรณีใดควรใช้สิทธิก่อนครบสัญญา เมื่อใช้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปี
- 4) กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบันเท่ากับ 130 บาทต่อหุ้น นักลงทุนกำลังพิจารณาซื้ออเมริกันอนุปชันที่มีราคาใช้สิทธิ (strike price) 120 บาท และมีอายุสัญญา 6 เดือน โดยมีราคาซื้อขายของออปชันนี้เท่ากับ 25.50 บาท จงวิเคราะห์ว่าอเมริกันอนุปชันที่มีราคาใช้สิทธิและอายุเท่ากันควรมีราคาประมาณเท่าใด เพื่อให้ไม่เกิดโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสียง

(arbitrage opportunity) และอธิบายว่าการเปิดโอกาสให้ใช้สิทธิได้ทุกเวลาก่อนครบกำหนดนั้นมีผลต่อราคาพวทอปชันอย่างไร เมื่ออัตราดอกเบี้ยเงินกู้คิดทบต้นทุกครึ่งปีที่อัตรา 8.5% ต่อปี

5) ผู้ส่งออกเสื้อผ้ายี่ห้อหนึ่งในประเทศไทยต้องการทำอเมริกันพวทอปชันกับสถาบันการเงิน เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนของเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยอัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบันอยู่ที่ 33.25 บาทต่อดอลลาร์ สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลลาร์อยู่ที่ 2.5% และ 3.5% ต่อปีตามลำดับ จงหาราคาใช้สิทธิของอเมริกันพวทอปชัน และอเมริกันคอลลอปชันที่ทำให้ราคาของคอลลอปชันมากกว่าพวทอปชันหนึ่งบาท ณ เวลาปัจจุบัน และอภิปรายว่าการใช้สิทธิได้ก่อนครบกำหนดจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ส่งออกในสถานการณ์ใดบ้าง

6) นักลงทุนสังเกตเห็นว่าอเมริกันคอลลอปชันและอเมริกันพวทอปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และอายุสัญญา 9 เดือน กำลังซื้อขายอยู่ในตลาดที่ราคา 15.20 บาท และ 17.80 บาท ตามลำดับ ในขณะที่ราคาปัจจุบันของหุ้นคือ 105 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่องคือ 6.7% ต่อปี จงวิเคราะห์ว่ามีโอกาสในการทำกำไรแบบปราศจากความเสี่ยงหรือไม่ หากมี ควรวางกลยุทธ์การลงทุนอย่างไรโดยคำนึงถึงความยืดหยุ่นของการใช้สิทธิในอเมริกันคอปชัน และประเมินผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้น

7) กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงเริ่มต้น $S(0) = 100$ บาท ซึ่งเท่ากับราคาใช้สิทธิ $K = 100$ บาท อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ $r = 0.05$ ต่อปี และใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 4 คาบเวลา โดยกำหนดให้เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น $u = 0.10$ และลดลง $d = -0.05$ จงคำนวณหาราคาของ อเมริกันพวทอปชัน $P^A(0)$ ที่สามารถใช้สิทธิได้ทันทีหรือเมื่อครบกำหนด โดยพิจารณาว่าการใช้สิทธิทันทีให้ผลประโยชน์มากกว่าหรือไม่

8) สำหรับอเมริกันพวทอปชัน กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงปัจจุบัน $S(0) = 100$ บาท ราคาใช้สิทธิ $K = 110$ บาท อัตราการขึ้นของราคาหุ้น $u = 0.2$ และอัตราการลดลง $d = -0.1$ โดยมีอัตรา

ดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $r = 0.05$ และสมมติว่าการขายหุ้นในแต่ละครั้งต้องเสียค่าธรรมเนียม 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรของผู้ถือ อเมริกันพุทออปชัน และวิเคราะห์ว่าควรใช้สิทธิทันทีหรือรอให้ครบกำหนด โดยเปรียบเทียบผลตอบแทนสุทธิหลังหักค่าธรรมเนียม

9) สำหรับอเมริกันออปชัน กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงปัจจุบันและราคาใช้สิทธิเท่ากัน คือ $S(0) = K = 1$ บาท โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา และอัตราการขึ้นของราคาหุ้น $u = 0.15$ และอัตราการลดลง $d = -0.10$ อัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 7.5% ต่อปี จงคำนวณมูลค่าของพอร์ตจำลองสำหรับอเมริกันคอลลอปชันและอเมริกันพุทออปชัน และพิจารณาว่ามีจุดใดที่ควรใช้สิทธิก่อนครบกำหนด เพื่อให้ได้ผลประโยชน์สูงสุด

10) สมมติว่าอเมริกันออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ $K = 110$ บาท โดยราคาหุ้นอ้างอิงในปัจจุบันคือ 100 บาท และมีการอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาต่อคาบเวลา $k(n)$, $n = 1, 2$ ตามค่าโดยที่ $k(n) = 0.1823$ เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น, $k(n) = -0.1054$ เมื่อราคาหุ้นลดลง และกำหนดอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่องคือ $r = 0.6$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุกเดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลลอปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

และพิจารณาว่าผู้ถือตราสารควรใช้สิทธิ ณ จุดเวลาใดเพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงสุด

11) สำหรับอเมริกันออปชันของหุ้นอ้างอิงที่มีราคาในปัจจุบันเท่ากับ $S(0) = 100$ บาท และราคาใช้สิทธิ $K = 100$ บาท โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา กำหนดให้เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น $u = 0.2$ และลดลง $d = -0.1$ อัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้ที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ $r = 0.08$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงคำนวณราคาของอเมริกันคอลลอปชัน $C^A(0)$ และอเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$ และพิจารณาว่าการใช้สิทธิก่อนครบกำหนดในคาบเวลาใดจะให้ผลตอบแทนมากที่สุด

12) สมมติว่าอเมริกันออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ $K = 90$ บาท ราคาหุ้นอ้างอิงในปัจจุบัน $S(0) = 100$ บาท โดยราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงตามอัตรา $u = 0.2$, $d = -0.2$ อัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้ปลอดความเสี่ยงเท่ากับ $r = 0.08$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุกครึ่งปี และอายุของสัญญาคือ 6 เดือน

12.1) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 20 คาบเวลา (binomial tree) คำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

โดยใช้วิธี Backward Induction และพิจารณาการใช้สิทธิได้ทุกคาบเวลา

12.2) จงใช้สูตรของ Cox-Ross-Rubinstein (CRR model) สำหรับแบบจำลอง 20 คาบเวลา เพื่อคำนวณราคาอเมริกันคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้พารามิเตอร์เดียวกับข้อ 12.1 และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับข้อ 12.1

12.3) กรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายปันผล 1 ครั้ง ที่ปลายเดือนที่ 6 (ช่วงเวลาหมดอายุของออปชัน) เป็นจำนวน 5.5 บาท จงคำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

โดยปรับราคาใช้ในต้นไม้ (stock price tree) เป็นราคาหลังหักปันผล (ex-dividend price) และวิเคราะห์ผลของเงินปันผลต่อการตัดสินใจใช้สิทธิในแต่ละจุดเวลา

13) สำหรับอเมริกันออปชัน กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วยโดยที่อเมริกันออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
110	19.50	4.25
120	13.75	7.50
130	8.25	11.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

14) กำหนดอเมริกันคอลลอปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน ($t = 3$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา

$$k(n) = \begin{cases} 0.0953 & ; \uparrow \\ -0.1054 & ; \downarrow \end{cases} \text{ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ } 0.20 \text{ ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน}$$

14.1) จงคำนวณราคาของคอลลอปชัน $C^A(0)$

14.2) จงคำนวณราคาของอเมริกันคอลลอปชัน $C^A(0)$ ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 4.5 บาทที่เวลา $t = 3$

15) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลยูโรเปียนออปชันและคอลอเมริกันออปชันของหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 100 บาทและมีอายุ 6 เดือนโดยสมมติว่า $S(0) = 48$ บาท $u = 0.15$, $d = -0.20$ และอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี

16) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคาของยุโรปียนคอลลอปชันกับราคาอเมริกันคอลลอปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 20 บาท และมีอายุ 3 เดือน กำหนดให้ $u = 0.15$ $d = -0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 12% ต่อปีทบต้นทุกเดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 18 บาท โดยหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 1 ครั้ง 0.50 บาท ต่อหุ้น ณ ปลายเดือนที่ 3

17) กำหนดยุโรปียนคอลลอปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท อายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 32 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.3 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu = 0.15$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 20.35 % ต่อปี จงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $C^E(t)$ สำหรับ $t \in [0, 0.25]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
S_i	32	32.20	31.34	30.41	29.10	31.01	31.89	32.08	33.08	34.08	33.58

18) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคายุโรปียนคอลลอปชันกับราคาอเมริกันคอลลอปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และมีอายุ 6 เดือน โดยกำหนด $u = 0.2$ $d = -0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8 % ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 100 บาท