

บทที่ 6 แคลคูลัสโตแคสติกและทฤษฎีบทกิริชานอฟ

เนื้อหาประกอบด้วย

- 6.1 บทนิยามของแคลคูลัสโตแคสติก
- 6.2 สมบัติของแคลคูลัสโตแคสติก
- 6.3 สมบัติมาร์ติงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์
- 6.4 ทฤษฎีบทกิริชานอฟ

บทนำ

ในระบบการเงินสมัยใหม่ที่เผชิญกับความผันผวนและความไม่แน่นอนในระดับสูง การประเมินมูลค่าทรัพย์สินทางการเงินและการวิเคราะห์ความเสี่ยงจำเป็นต้องใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถรองรับพฤติกรรมแบบสุ่มต่อเนื่องได้อย่างมีประสิทธิภาพ แนวคิดแคลคูลัสดั้งเดิมซึ่งตั้งอยู่บนสมมติฐานของการเปลี่ยนแปลงที่ราบเรียบและสามารถหาอนุพันธ์ได้ในความหมายคลาสสิก ไม่เพียงพอในการวิเคราะห์การเคลื่อนไหวของราคาทรัพย์สินที่มีลักษณะ “ไม่สามารถพยากรณ์ได้อย่างสมบูรณ์” ซึ่งเป็นธรรมชาติของข้อมูลทางการเงินในโลกแห่งความเป็นจริง

แคลคูลัสโตแคสติก (Stochastic Calculus) จึงได้รับการพัฒนาขึ้นมาเพื่อรองรับการวิเคราะห์กระบวนการสุ่ม โดยเฉพาะในกรณีของการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียน (Brownian Motion) ซึ่งพบได้บ่อยในการจำลองราคาหลักทรัพย์ อัตราดอกเบี้ย และดัชนีทางเศรษฐกิจ แนวคิดหลักในแคลคูลัสโตแคสติก คือ บทตั้งของอิโต (Ito's Lemma) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการหาผลต่างของฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับกระบวนการสุ่มแบบต่อเนื่อง และเป็นรากฐานของการพัฒนาแบบจำลองเชิงสโตแคสติก เช่น แบบจำลอง Black-Scholes (Black & Scholes, ค.ศ.1973; Merton, ค.ศ. 1973) และแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย Vasicek และ CIR (Vasicek, ค.ศ. 1977; Cox, Ingersoll & Ross, ค.ศ.1985)

นอกจากบทตั้งของอิตโต้แล้ว บทนี้ยังนำเสนอ สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property) และ การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ (Doob-Meyer Decomposition) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็นที่สนับสนุนการวิเคราะห์พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มในบริบทของการเงิน โดยเฉพาะในการกำหนดราคาสินทรัพย์ในโลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral World) การวิเคราะห์ดังกล่าวช่วยให้สามารถแยกพฤติกรรมของราคาทรัพย์สินออกเป็นองค์ประกอบที่สามารถพยากรณ์ได้ (Bounded Variation Component) และองค์ประกอบที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้ (Martingale Component) ซึ่งมีบทบาทสำคัญต่อการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนไหวของราคาทรัพย์สินที่สอดคล้องกับข้อมูลในเชิงสถิติ (Shreve, ค.ศ. 2004)

อีกหนึ่งองค์ประกอบสำคัญที่กล่าวถึงในบทนี้ คือ ทฤษฎีบทกิรานอฟ (Girsanov's Theorem) ซึ่งเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่อนุญาตให้เปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น (Change Of Measure) จากโลกแห่งความเสี่ยง (Real-World Measure) ไปสู่โลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Measure) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์อย่างมีประสิทธิภาพในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้จริง (Bjork, ค.ศ. 2009)

การประยุกต์ใช้แคลคูลัสสโตแคสติกปรากฏให้เห็นในหลายสาขา ไม่เพียงแต่ในด้านการเงิน การธนาคารเท่านั้น แต่ยังครอบคลุมถึงการประกันภัย การวิเคราะห์ระบบควบคุมแบบสุ่ม และวิศวกรรมการเงินที่ต้องการจำลองพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างไม่แน่นอน ตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์มูลค่าที่ความเสี่ยง (Value-At-Risk: VaR) การออกแบบอนุพันธ์ที่มีโครงสร้างซับซ้อน และการประเมินความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน

กล่าวโดยสรุป บทที่ 6 มีวัตถุประสงค์เพื่อวางรากฐานทางทฤษฎีของแคลคูลัสสโตแคสติก พร้อมนำเสนอเครื่องมือสำคัญ เช่น บทตั้งของอิตโต้ สมบัติมาร์ติงเกล ทฤษฎีบทการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น และการจำแนกส่วนประกอบของกระบวนการสุ่ม ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่ความเข้าใจและความสามารถในการประยุกต์ใช้ในงานด้านการกำหนดราคาทางการเงินและการจัดการความเสี่ยงในบริบทที่มีความไม่แน่นอนอย่างแท้จริง

6.1 บทนิยามของแคลคูลัสโตแคสติก

แคลคูลัสโตแคสติก (stochastic calculus) เป็นหนึ่งในเครื่องมือหลักในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการพยากรณ์และจำลองความเสี่ยงทางการเงิน ในบริบทที่กระบวนการสุ่มแตกต่างจากการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ในเวลาต่อเนื่อง ซึ่งมีลักษณะพิเศษที่แตกต่างจากการวิเคราะห์ที่มีอยู่ ส่วนหนึ่งเนื่องจากความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนของความแปรผันในกระบวนการสุ่ม และผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงเพียงครู่ขณะหรือการเปลี่ยนแปลงในระยะสั้นๆ ที่สะสมขึ้นเป็นผลที่มีนัยสำคัญในระยะยาว ซึ่งสามารถวัดได้โดยใช้เครื่องมือจากแคลคูลัสโตแคสติก เช่น บทตั้งของอิโต้ (Ito's lemma) ทฤษฎีบทของกิริซานอฟ (Girsanov's theorem) และทฤษฎีการแทนของมาร์ติงเกล (Martingale representation theorem) เป็นต้น

แนวคิดของแคลคูลัสโตแคสติก หรือ แคลคูลัสอิโต้ (stochastic calculus or Ito's calculus) มีแนวคิดที่คล้ายคลึงกับแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และเชิงปริพันธ์ปกติ ในแคลคูลัสปกตินั้น สมมติว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค ณ เวลา t และอัตราการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เวลา t ซึ่ง

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t, F(t)) \quad (6.1)$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น
$$dF(t) = f(t, F(t))dt \quad (6.2)$$

ยิ่งไปกว่านั้น หากอินทิเกรตสมการ (6.2) ตั้งแต่ 0 ถึง t จะได้

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(s, F(s))ds \quad (6.3)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับแนวคิดของแคลคูลัสโตแคสติกอาจเริ่มจากแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องที่อธิบายการเคลื่อนที่ของราคาหุ้น $S(t)$ ซึ่งได้กล่าวถึงในบทที่ 2 คือ

$$\frac{dS(t)}{dt} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t) + \sigma S(t) \frac{dW(t)}{dt} \quad (6.4)$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น
$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (6.5)$$

เมื่อ $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์ พิจารณาพจน์ของ $\frac{dW(t)}{dt}$ เราทราบว่า

$$dW = \lim_{N \rightarrow \infty} (w_N(t + \Delta t) - w_N(t)) = W(t + dt) - W(t) \quad (6.6)$$

เป็นส่วนเพิ่ม (increment) ของตัวแปรเชิงสุ่ม $W(t)$ ด้วยลักษณะการเป็นการเดินสุ่มของ $w_N(t)$

ทำให้ได้ว่า $\frac{dW(t)}{dt}$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุก ๆ $t \geq 0$

เพื่อความสะดวกให้ $W_t = W(t)$ สมมติให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ ถ้า $\frac{dW(t)}{dt}$

หาอนุพันธ์ได้โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{df}{dt} = f'(W_t) \cdot \frac{dW_t}{dt}$$

นั่นคือ

$$df = f'(W_t) dW_t \quad (6.7)$$

แต่ในความจริง $\frac{dW(t)}{dt}$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นการที่พยายามจะอธิบายสมบัติตามสมการ

(6.7) ด้วยแนวคิดของอนุพันธ์ปกติจึงดูไม่สมเหตุสมผลอย่างยิ่ง อย่างไรก็ตามหากพิจารณาการกระจายเทย์เลอร์ของ f จะได้ว่า

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (\Delta x) f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (6.8)$$

ดังนั้น สำหรับ $x = W_t$ และส่วนเพิ่ม $W(t + \Delta t) - W(t) \equiv \Delta W_t$ จะได้ว่า

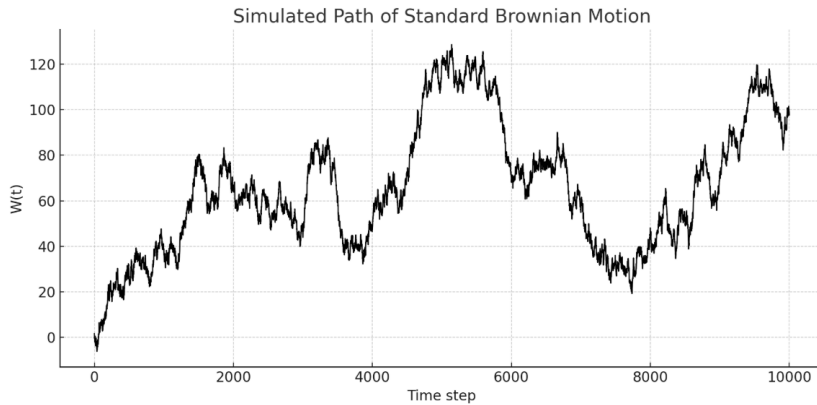
$$\Delta f = (\Delta W_t) f'(W_t) + \frac{(\Delta W_t)^2}{2!} f''(W_t) + \frac{(\Delta W_t)^3}{3!} f'''(W_t) + \dots \quad (6.9)$$

และเนื่องจาก $(\Delta W_t)^2 = \Delta t$ และทำให้ได้

$$\Delta f = (\Delta W_t) f'(W_t) + \frac{(\Delta t)}{2!} f''(W_t) + o((\Delta t)) \quad (6.10)$$

เมื่อ $o((\Delta t))$ เป็นความคลาดเคลื่อนในเทอมของ Δt ที่มีกำลังที่สูงกว่ากำลัง 1 ดังนั้นเมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ว่า

$$df = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt \quad (6.11)$$

รูปที่ 6.1 กราฟตัวแปรสุ่มบราวน์ $W(t)$

สมการ (6.12) เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “บทตั้งของอิโต้ (Ito’s lemma)” ซึ่งเป็นสมการหลักในแคลคูลัสโตแคสติกหรือ แคลคูลัสอิโต้ (Ito’s calculus) สำหรับโดยทั่วไป ถ้ากำหนดให้ $f(t, x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ (smooth function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ (infinitely differentiable function) สำหรับในแคลคูลัสปกติ เราได้ว่า

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (6.12)$$

แต่ในแคลคูลัสอิโต้ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dW_t)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t \quad (\because (dW_t)^2 = dt) \end{aligned} \quad (6.13)$$

ทฤษฎีบทที่ 6.1 (Ito’s lemma) กำหนดให้ $f(t, x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ และกำหนดให้ $\{X_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มซึ่ง $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ สำหรับกระบวนการสุ่มบราวน์ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ โดยที่ μ_t และ σ_t เป็นอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่เวลา $t \geq 0$ จะได้ว่า

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \quad (6.14)$$

พิสูจน์ โดยใช้สมการ (6.13) และ $(\Delta B_t)^2 = \Delta t$ จะได้

$$\Delta f(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x} (\Delta X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta X_t)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t(\Delta t) + \sigma_t(\Delta B_t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_t(\Delta t) + \sigma_t(\Delta B_t))^2 + \dots \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta B_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_t^2 (\Delta t)^2 + 2\mu_t \sigma_t (\Delta t)(\Delta B_t) + \sigma_t^2 (\Delta B_t)^2) + \dots \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta B_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_t^2 (\Delta t)^2 + 2\mu_t \sigma_t (\Delta t)(\Delta B_t) + \sigma_t^2 (\Delta t)) + \dots \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x} (\Delta B_t) + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

เมื่อ $o((\Delta t))$ เป็นความคลาดเคลื่อนในเทอมของ Δt ที่มีกำลังที่สูงกว่ากำลัง 1

ดังนั้นเมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ว่า

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \quad \square$$

บทตั้งของอิตโต้ถือเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์การเงินสามารถหาผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันที่เป็นกระบวนการสโตแคสติก ช่วยให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า กระบวนการสโตแคสติกหนึ่ง ๆ จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร นอกจากนี้บทตั้งของอิตโต้ยังถูกนำไปใช้ในการสร้างและแก้สมการความแปรปรวนสำหรับตราสารการเงินที่สำคัญ ได้แก่ การแสดงว่าราคาตราสารทางการเงินเป็นกระบวนการสโตแคสติก และใช้ทฤษฎีบทนี้เพื่อหาสมการของการเปลี่ยนแปลงของราคา

บทนิยามที่ 6.2 กำหนดให้ $f(t, x)$ และ $g(t, x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ และ กำหนดให้ $F(t, x)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่ง $dF = f(t, B_t)dt + g(t, B_t)dB_t$ จะเรียก $F(t, x)$ ว่า

“ปริพันธ์สโตแคสติก” และเขียนแทนด้วย $F(t, B_t) = \int_0^t f(s, B_s)ds + \int_0^t g(s, B_s)dB_s$

ตัวอย่างที่ 6.1 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = x$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

เนื่องจาก $df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$ จะได้

$$df(t, B_t) = (0 + 0)dt + (1)dB_t = dB_t$$

เนื่องจาก $B_0 = 0$ ทำให้ได้ $\int_0^t dB_s = \int_0^t df(s, B_s) = [B_s]_0^t = B_t - B_0 = B_t$ □

ตัวอย่างที่ 6.2 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t B_s dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1$

เนื่องจาก $df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$

จะได้ $df(t, B_t) = \left(0 + \frac{1}{2} \right) dt + B_t dB_t = \frac{1}{2} dt + B_t dB_t$

$$\int_0^t df(s, B_s) = \int_0^t \frac{1}{2} ds + \int_0^t B_s dB_s$$

$$\left[\frac{1}{2} (B_s)^2 \right]_0^t = \left[\frac{s}{2} \right]_0^t + \int_0^t B_s dB_s$$

$$\frac{1}{2} (B_t)^2 - \frac{1}{2} (B_0)^2 = \frac{t}{2} + \int_0^t B_s dB_s$$

เนื่องจาก $B_0 = 0$ ดังนั้น $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t)^2 - \frac{t}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = \mu t + \sigma x$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = \mu$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

เนื่องจาก $df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$ จะได้

$$df(t, B_t) = (\mu + 0)dt + \sigma dB_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

เนื่องจาก $B_0 = 0$ ทำให้ได้

$$\int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s = \int_0^t df(s, B_s) = [f(s, B_s)]_0^t = [\mu s + \sigma B_s]_0^t = \mu t + \sigma B_t \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 6.4 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ

$$\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s$$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = e^{\mu t + \sigma x}$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = \mu e^{\mu t + \sigma x}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma e^{\mu t + \sigma x}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma x}$$

เนื่องจาก $df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$

จะได้ $df(t, B_t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu t + \sigma B_t} dt + \sigma e^{\mu t + \sigma B_t} dB_t$

$$\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s = [e^{\mu s + \sigma B_s}]_0^t = e^{\mu t + \sigma B_t} - e^{\sigma B_0}$$

เนื่องจาก $B_0 = 0$ จะได้ $\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s = e^{\mu t + \sigma B_t} - 1 \quad \square$

6.2 สมบัติของแคลคูลัสโตแคสติก

ในหัวข้อนี้ กล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของการวิเคราะห์และคำนวณในระบบที่มีความไม่แน่นอน โดยเฉพาะการจัดการกับสมการที่มีพจน์สุ่มเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งต่างจากแคลคูลัสทั่วไป การดำเนินการเชิงอนุพันธ์และอินทิกรัลในที่นี้ต้องอิงกับกฎเฉพาะ เช่น กฎของอิตโต้ เพื่อรองรับพฤติกรรมของกระบวนการบราวน์และตัวแปรสุ่มอื่น ๆ ในตัวแบบทางคณิตศาสตร์และการเงิน

ทฤษฎีบทที่ 6.3 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และกำหนดให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชัน

ไม่เชิงสุ่ม สมมติให้ $\{I_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มซึ่ง $dI_t = g(t)dB_t$ นั่นคือ $I_t = \int_0^t g(s)dB_s$ โดย

ที่ $I(0) = 0$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $t \geq 0$, ตัวแปรสุ่ม I_t มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution)

บทนิยามที่ 6.4 กำหนดให้ $\{X_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่ม จะเรียกระบวนการสุ่ม $\{A_t\}_{t \geq 0}$ ว่า “กระบวนการสุ่มปรับตัวตาม (adapted process)” เทียบกับตัวแปรสุ่ม X_t เมื่อ A_t ตัวแปรสุ่มที่ขึ้นกับเพียง X_s สำหรับทุก ๆ $s \leq t$ เท่านั้น

กำหนดให้ $\{X_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่ม ตัวอย่างกระบวนการสุ่มปรับตัวตาม เช่น

- 1) $A_t = X_t$
- 2) $A_t = \min\{X_t, c\}$ สำหรับบางค่าคงที่ c
- 3) $A_t = \max_{0 \leq s \leq t} \{X_s\}$
- 4) ถ้า τ เป็นเวลาการหยุด (stopping time) แล้ว $A_t = X_{\tau}$ กระบวนการสุ่มปรับตัวตาม

กระบวนการสุ่มปรับตัวตามนั้นใช้ในการอธิบายกระบวนการสุ่มที่ทุกตัวอย่างของการสังเกตในชั้นเวลา t สามารถคำนวณได้จากข้อมูลที่รู้มาก่อนหน้านี้นี้ หรือที่เวลา t นั้นเอง กระบวนการปรับตัวตามมีความสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็นและมีการนำไปใช้ในหลายสาขา รวมถึงทฤษฎีควมคุม ทฤษฎีความน่าจะเป็น และคณิตศาสตร์การเงิน สำหรับในคณิตศาสตร์การเงิน กระบวนการปรับตัวตามองค์ประกอบที่สำคัญในตัวอย่างต่างๆ เช่น การกำหนดราคาหุ้น (model of a stock price) ซึ่งระบุว่าราคาของหุ้นเป็นฟังก์ชันของข้อมูลที่มีในการกรอง (filter) นั่นคือ ราคาหุ้นไม่สามารถข้ามข้อมูลที่มีอยู่ในการกรอง สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale) เป็นตัวอย่างของกระบวนการปรับตัวตามในการสังเกตและการพยากรณ์ที่ไม่แน่นอน ในทฤษฎีการหยุดที่เลือกได้ (optional stopping theorem : ost) ซึ่งเป็นทฤษฎีทางความน่าจะเป็นที่ใช้ในการวิเคราะห์ Martingales และขั้นตอนสุ่มที่สามารถหยุดได้ ทฤษฎีนี้ได้รับการสร้างขึ้นเพื่อตอบคำถามว่า “ในกรณีที่มีการสุ่มการหยุด (random stopping time) ของการดำเนินการค่าคาดหวังที่ได้จากการหยุดนี้คืออะไร” ซึ่งมีความสำคัญเฉพาะเมื่อเราพิจารณามาร์ติงเกลที่เราสามารถหยุดการดำเนินการได้ตามความต้องการ ทฤษฎีนี้มีผลในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของสถานการณ์ที่สามารถสุ่มการหยุดได้ เช่น การเล่นเกมพนัน คณิตศาสตร์การเงิน เป็นต้น ซึ่งมีประโยชน์ในการให้ความเข้าใจและพยากรณ์พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มต่าง ๆ

ทฤษฎีบทที่ 6.5 (Ito's isometry) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และ กำหนดให้ $\{A_t\}_{t \geq 0}$ กระบวนการสุ่มปรับตัวตามเทียบกับ B_t จะได้ว่า

$$E \left[\left(\int_0^t A_s dB_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t (A_s)^2 ds \right] \quad (6.15)$$

Ito's isometry มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์การกระจายตัวของกระบวนการทางการเงินที่สะท้อนถึงการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ตามเวลา ซึ่งมักจะเป็นกระบวนการสุ่มที่คล้ายกับการเคลื่อนไหวของการเคลื่อนที่บราวน์ Ito's isometry ใช้ในการจำแนกฟังก์ชันของกระบวนการอิตโต้ การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ และช่วยในการคำนวณความแปรปรวน (variance) ของกระบวนการอิตโต้โดยจำแนกส่วนเป็นส่วนประกอบที่เป็นมาร์ติงเกลและส่วนประกอบของการแปรผันจำกัด (bounded variation)

ตัวอย่างที่ 6.5 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E \left[\left(\int_0^t dB_s \right)^2 \right]$

วิธีทำ วิธีที่1) วิธีโดยตรง จากตัวอย่างที่ 6.1 และ $E[(B_t)^2] = t$ เราได้ว่า

$$\int_0^t dB_s = B_t \Rightarrow \left(\int_0^t dB_s \right)^2 = (B_t)^2 \Rightarrow E \left[\left(\int_0^t dB_s \right)^2 \right] = E[(B_t)^2] = t$$

วิธีที่2) วิธีใช้ Ito isometry เนื่องจาก $A_t = 1$ เป็นตัวแปรสุ่มปรับตัวตาม

$$\text{ดังนั้น} \quad E \left[\left(\int_0^t 1 dB_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t (1)^2 ds \right] = E[s]_0^t = E[t] = t \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 6.6 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E \left[\int_0^t (B_s)^2 ds \right]$

วิธีทำ เนื่องจาก $A_t = B_s$ ตัวแปรสุ่มปรับตัวตาม โดย Ito isometry

$$E \left[\int_0^t (B_s)^2 ds \right] = E \left[\left(\int_0^t (B_s) dB_s \right)^2 \right]$$

และจากตัวอย่างที่ 6.2

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t)^2 - \frac{t}{2} \Rightarrow \left(\int_0^t B_s dB_s \right)^2 = \frac{1}{4}(B_t)^4 - \frac{1}{4}(B_t)^2 t + \frac{t^2}{4}$$

เนื่องจาก $E[(B_t)^2] = t$ ดังนั้น

$$E \left[\left(\int_0^t B_s dB_s \right)^2 \right] = E \left[\frac{1}{4}(B_t)^4 - \frac{1}{2}(B_t)^2 t + \frac{t^2}{4} \right] = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = 0$$

ผลที่ตามมา คือ $E \left[\int_0^t (B_s)^2 ds \right] = 0$

□

6.3 สมบัติมาร์ติงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงสมบัติมาร์ติงเกล (Martingale property) เป็นสมบัติทางสถิติที่บ่งบอกถึงความคาดหวังของตัวแปรสุ่มในอนาคตที่จะมีค่าเท่ากับค่าปัจจุบันของตัวแปรสุ่มนั้น โดยไม่สนใจค่าที่เกิดขึ้นในอดีต สมบัตินี้เป็นส่วนสำคัญในการคำนวณความน่าจะเป็นและการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์ ถัดไปจะกล่าวถึงการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ (Doob-Meyer decomposition) ซึ่งเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กับสมบัติของฟังก์ชันมาร์ติงเกลการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์เป็นวิธีการจำแนกส่วนประกอบของมาร์ติงเกลออกเป็นส่วนของ "การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ได้" (predictable change) และ "การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ไม่ได้" (unpredictable change) โดยที่การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ไม่ได้มีคุณสมบัติมาร์ติงเกล ตามทฤษฎีดูบ-เมเยอร์ ฟังก์ชันมาร์ติงเกลสามารถแยกส่วนประกอบออกเป็น "พจน์ drift" (drift term) และ "พจน์รบกวน" (noise term) หรือบางทีเรียกว่า "พจน์การกระโดด" (jump term) โดยที่พจน์ drift คือส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามแนวโน้มหลักที่สามารถพยากรณ์ได้ เช่น การเติบโตเฉลี่ยของราคาสินทรัพย์เมื่อไม่มีปัจจัยสุ่มเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งสามารถคำนวณได้จากข้อมูลในอดีต ในขณะที่พจน์รบกวน คือส่วนหนึ่งของสมการที่เกิดจากความแปรปรวนแบบสุ่ม มักเกี่ยวข้องกับการระบวนการบรววน ใช้แทนความไม่แน่นอนหรือปัจจัยที่ไม่สามารถพยากรณ์ล่วงหน้าได้ในระบบ

การจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์ เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการวิเคราะห์การเคลื่อนไหวของตัวแปรสุ่มที่มีสมบัติมาร์ติงเกล พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูป

$$dX_t = \sigma_t dZ_t + \mu_t dt \quad (6.16)$$

โดยที่ μ_t และ σ_t เป็นอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่เวลา $t \geq 0$

สมการ (6.16) สามารถเขียนในรูปปริพันธ์ที่สมมูลกัน คือ

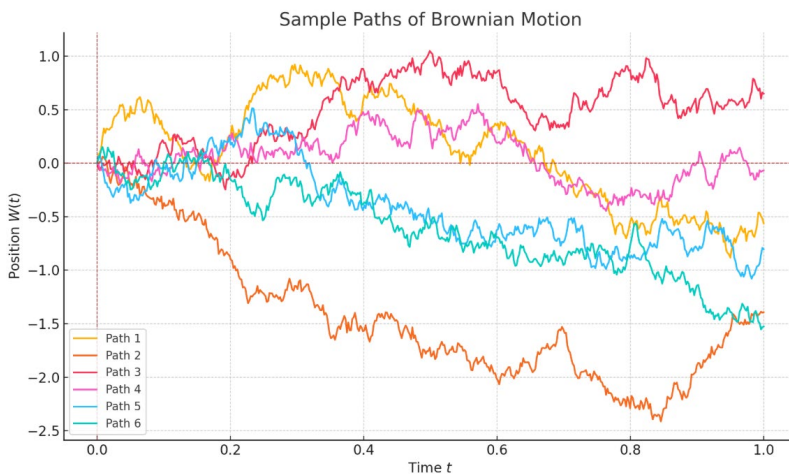
$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dZ_s + \int_0^t \mu_s ds \equiv X_0 + M_t + B_t \quad (6.17)$$

โดยที่ $M_t = \int_0^t \sigma_s dZ_s$ และ $B_t = \int_0^t \mu_s ds$ เป็นส่วนประกอบของการจำแนกของ X_t ซึ่งเป็นที่รู้จัก

โดยทั่วไปในชื่อ “การจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์” ในที่นี้ต้องการวิเคราะห์แต่ละส่วนประกอบของ X_t โดยจะแสดงว่า M_t มีสมบัติมาร์ติงเกล นั่นคือ จะต้องแสดงว่า

$$E_t[M_T] = M_t \text{ สำหรับทุกๆ } T > t \quad (6.18)$$

เมื่อ E_t แทนตัวดำเนินการค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนดข้อมูลในอดีตจนถึงเวลา t



รูปที่ 6.2 กราฟกระบวนการสุ่มบราวน์ X_t

กราฟด้านบนคือกราฟตัวอย่างของกระบวนการสุ่มบราวน์จำนวน 6 เส้นทาง ที่แสดงการเคลื่อนที่แบบสุ่มเมื่อเวลา t เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 1 โดยแต่ละเส้นทางเริ่มต้นที่ตำแหน่ง 0 และกระจายตัวแบบสุ่มตามการแจกแจงปกติ

หมายเหตุ ตัวอย่างโค้ดในภาษาไพธอน สำหรับการวาดกราฟกระบวนการสุ่มบราวน์

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ตั้งค่าเริ่มต้น
np.random.seed(0) # สำหรับผลลัพธ์ที่สามารถทำซ้ำได้
T = 1.0           # เวลารวม
N = 500           # จำนวนขั้นเวลา
dt = T / N        # ขนาดช่วงเวลา
t = np.linspace(0, T, N)

# จำนวนเส้นทางสุ่ม
M = 6

# สร้างเส้นทางของกระบวนการบราวน์
W = np.zeros((M, N))
for i in range(M):
    W[i, 1:] = np.cumsum(np.sqrt(dt) * np.random.randn(N - 1))

# วาดกราฟ
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(M):
    plt.plot(t, W[i], label=f'Path {i+1}')
plt.title('Sample Paths of Brownian Motion')
plt.xlabel('Time $t$')
plt.ylabel('Position $W(t)$')
plt.grid(True)
plt.axhline(0, color='brown', linestyle='--', linewidth=0.7)
plt.axvline(0, color='brown', linestyle='--', linewidth=0.7)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

โดยสมบัติมาร์ติงเกลสามารถแสดงให้เห็นได้จากการพิจารณา M_T ในรูป

$$M_T = M_t + \int_t^T \sigma_s dZ_s \quad \text{และ} \quad E_t \left[\int_t^T \sigma_s dZ_s \right] = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $E_t[M_T] = M_t$ สำหรับทุกๆ $T > t$

นอกจากนี้สำหรับ $t > s$ เนื่องจากความเป็นอิสระของ dZ_s ยังได้อีกว่า

$$E_t[\sigma_s dZ_s] = E_t[E_s[\sigma_s dZ_s]] = E_t[E_s[\sigma_s]E_s[dZ_s]] = 0 \quad (6.19)$$

ยิ่งไปกว่านั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\Delta M_j|^2 = \int_0^t \sigma_s^2 ds \quad (6.20)$$

ส่วนประกอบ M_t นี้เรียกว่า “ส่วนประกอบมาร์ติงเกล (Martingale component)” ของ

กระบวนการอิโต้ X_t สำหรับส่วนประกอบ $B_t = \int_0^t \mu_s ds$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\Delta B_j|^2 = 0 \quad (\text{vanishing quadratic variation})$$

และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\Delta B_j| = \int_0^t |\mu_s| ds \quad (6.21)$$

เมื่อ $\int_0^t |\mu_s| ds$ มีค่า ส่วนประกอบ B_t นี้เรียกว่า “ส่วนประกอบของการแปรผันจำกัด (bounded variation component)” ของกระบวนการอิโต้ X_t ซึ่งเป็นส่วนที่บ่งบอกว่า X_t มีการเปลี่ยนแปลงของค่าที่อยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดหรือไม่เกินค่าที่กำหนดไว้ โดยเป็นส่วนของกระบวนการสุ่มที่สามารถพยากรณ์หรือพยากรณ์ได้จากข้อมูลที่มีอยู่แล้ว

ทฤษฎีบท 6.6 (มาร์ติงเกลในรูปซีกาลัง) กำหนดให้ μ_t และ σ_t เป็นฟังก์ชันอัตราดริฟต์และฟังก์ชันค่าความผันผวน ที่สอดคล้องกับกระบวนการเคลื่อนที่บราวน์ Z_t จะได้ว่ากระบวนการสโตแคสติก S_t สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dS_t = S_t (\sigma_t dZ_t + \mu_t dt) \quad (6.22)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \mu_s ds} \equiv S_0 A_t M_t \quad (6.23)$$

เมื่อ $A_t = e^{\int_0^t \mu_s ds}$ และ $M_t = e^{\int_0^t \sigma_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$

บทนิยามที่ 6.7 (เงื่อนไขของโนวคอฟ : Novikov's Condition) กำหนดให้ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์มาตรฐาน (Standard Brownian Motion) บนช่วงเวลา $[0, T]$ และให้ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีการปรับตัวได้ (adapted process) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าบน $[0, T]$ ถ้า

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s) ds \right) \right] < \infty,$$

เรากล่าวว่า $\theta(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของโนวคอฟ (Novikov's condition)

ในกรณีที่เงื่อนไขข้างต้นเป็นจริง จะได้ว่า กระบวนการต่อไปนี้

$$Z(t) = \exp \left(- \int_0^t \theta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(s) ds \right)$$

เป็นมาร์ติงเกลที่ไม่ลบ (non-negative martingale) บนช่วง $[0, T]$

ตัวอย่างที่ 6.7 (การวิเคราะห์สมบัติมาร์ติงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์)

พิจารณากระบวนการสโตแคสติก $X(t)$ ที่นิยามโดยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก ดังนี้

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t)$$

โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์มาตรฐาน จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) (สมบัติมาร์ติงเกล) แสดงว่า $M(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t - \sigma W(t) \right)$

เป็นกระบวนการมาร์ติงเกลภายใต้ฟิลเตรชันของ $W(t)$

2) (การจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์) พิจารณากระบวนการ $X(t)$ ดังกล่าว

2.1) เขียน $X(t)$ ในรูปการแยกองค์ประกอบระหว่าง bounded variation component และ martingale component

2.2) อธิบายว่าพจน์ใดเป็นส่วนที่สามารถพยากรณ์ได้ และพจน์ใดเป็นส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้

3) การจำลองและประยุกต์ใช้งานจริง

3.1) แสดงกราฟของแต่ละเส้นทางจากการจำลองเส้นทางของกระบวนการ $X(t)$ จำนวน 6 เส้นทาง ตั้งแต่ $t = 0$ ถึง $t = 1$ โดย $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $X(0) = 1$

3.2) แสดงการเปรียบเทียบระหว่างพจน์ drift และพจน์ martingale จากผลการจำลอง

3.3) วิเคราะห์ว่าเหตุใดการแยกองค์ประกอบของกระบวนการแบบดুব-เมเยอร์จึงมีความสำคัญในการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์

วิธีทำ การวิเคราะห์สมบัติมาร์ติงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์

กำหนดให้ $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$ โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์มาตรฐาน

ข้อที่ 1) แสดงว่า $M(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W(t)\right)$ เป็นมาร์ติงเกล

พิจารณาฟังก์ชันกำลังของการเคลื่อนที่บราวน์ $M(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W(t)\right)$

จะตรวจสอบว่า $M(t)$ เป็นมาร์ติงเกล โดยใช้เงื่อนไขของโนวิคอฟ หาก

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right)\right] < \infty,$$

แล้วฟังก์ชัน $Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right)$ จะเป็นมาร์ติงเกล

ในกรณีนี้ $\theta(t) = \sigma$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 ds\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) < \infty$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุก $\sigma \in \mathbb{R}$ และ $T < \infty$ ดังนั้น $M(t)$ เป็นมาร์ติงเกล

ข้อที่ 2) การจำแนกส่วนประกอบดুব-เมเยอร์ของ $X(t)$

เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$

นำมาเขียนในรูปปริพันธ์

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu X(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dW(s)$$

แยกเป็น 2 ส่วน

ส่วนที่ 1) $\int_0^t \mu X(s)ds$ ซึ่งเป็นส่วนของการแปรผันจำกัดและเป็นส่วนที่สามารถพยากรณ์ได้จากข้อมูลในอดีต

ส่วนที่ 2) $\int_0^t \sigma X(s) dW(s)$ ซึ่งเป็นส่วนของมาร์ติงเกลและเป็นส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้ ดังนั้น การจำแนกส่วนประกอบดูบ--เมเยอร์ของ $X(t)$ คือ

$$X(t) = \underbrace{X(0) + \int_0^t \mu X(s) ds}_{\text{bounded variation}} + \underbrace{\int_0^t \sigma X(s) dW(s)}_{\text{martingale}}$$

ข้อที่ 3) การจำลองและการประยุกต์

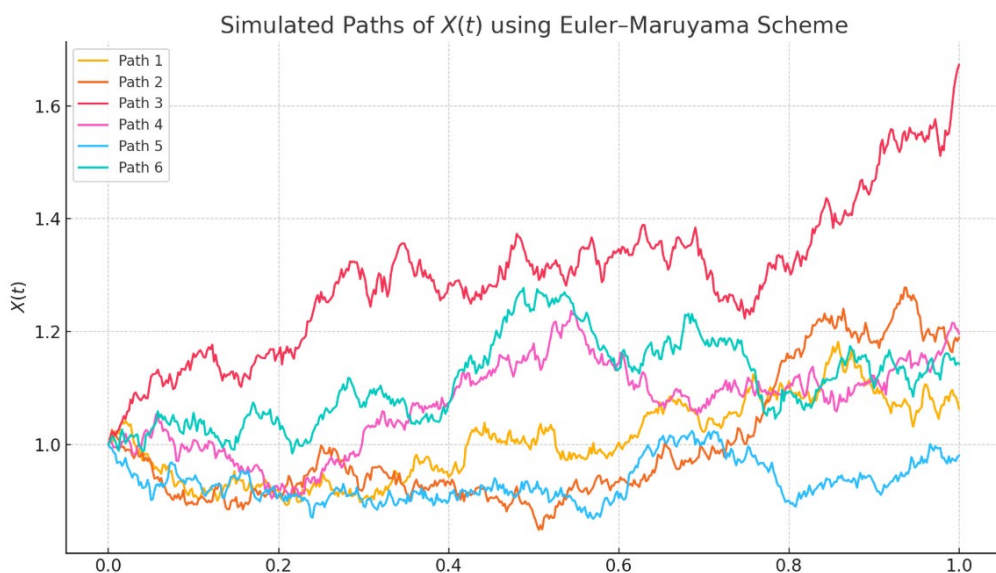
พิจารณาการประมาณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีออยเลอร์-มารูยามะ (Euler-Maruyama scheme)

$$X_{i+1} = X_i + \mu X_i \Delta t + \sigma X_i \Delta W_i$$

โดยที่ $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ ค่าเริ่มต้น $X_0 = 1$

ในที่นี้เราจะจำลอง 6 เส้นทางของ $X(t)$ และสามารถแยกค่าของแต่ละช่วงเวลาออกเป็น 2 ส่วน พจน์ดริฟท์: $\mu X_i \Delta t$ (พยากรณ์ได้)

พจน์รบกวน: $\sigma X_i \Delta W_i$ (ไม่สามารถพยากรณ์ได้ ได้จากการสุ่ม)



กราฟด้านบนแสดงการจำลอง 6 เส้นทางของกระบวนการ $X(t)$ โดยใช้วิธีออยเลอร์-มารูยามะ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์โตแคสติก

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(0) = 1$$

- แต่ละเส้นเริ่มต้นจากค่าเดียวกันที่ $X(0) = 1$
- ค่ากลางของเส้นทางมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามพจน์ดริฟท์ ($\mu = 0.05$)

- ความกระจายของแต่ละเส้นเกิดจากพจน์รบกวน ($\sigma = 0.2$) ที่สะท้อนความไม่แน่นอนจากการเคลื่อนที่แบบบราวน์

จากกราฟของการจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกทำให้เราเห็นลักษณะสำคัญ 2 ประการคือ

- 1) แนวโน้มเฉลี่ยของเส้นทางจะสูงขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งเกิดจาก พจน์ drift ที่เป็นส่วนของสมการที่กำหนดทิศทางการเปลี่ยนแปลงแบบคงที่ เช่น ถ้าพจน์ drift เป็นบวก เส้นทางส่วนใหญ่จะได้ขึ้น
- 2) เส้นทางแต่ละเส้นจะกระจายออกจากกัน แม้จะเริ่มต้นจากจุดเดียวกัน เพราะมีผลของพจน์รบกวนจากกระบวนการบราวน์ ซึ่งเป็นส่วนสุ่ม ทำให้แต่ละเส้นมีการขึ้นหรือเคลื่อนไหวไม่เหมือนกัน

□

หมายเหตุ วิธีออยเลอร์-มารูยามะ (Euler-Maruyama scheme) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (SDEs) โดยขยายมาจากวิธีออยเลอร์ (Euler's method) ที่ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดา (ODEs)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูปทั่วไป

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t)$$

โดยที่ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์มาตรฐาน

วิธีออยเลอร์-มารูยามะ จะประมาณค่าของ $X(t)$ บนกริดเวลา $t_0, t_1, \dots, t_n$ ที่ $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ โดยใช้สูตร

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)\Delta t + b(X_i, t_i)\Delta W_i$$

เมื่อ $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$

ตัวอย่างโค้ดไพธอนสำหรับวิธีออยเลอร์-มารูยามะ

```
\begin{verbatim}
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# พารามิเตอร์
mu = 0.05
sigma = 0.2
```

```

T = 1.0
N = 500
dt = T / N
t = np.linspace(0, T, N+1)
# สร้างเส้นทางของ W(t)
np.random.seed(0)
dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), N)
W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))
# เริ่มต้นค่า X
X = np.zeros(N+1)
X[0] = 1.0 # ค่าเริ่มต้น
# Euler-Maruyama
for i in range(N):
    X[i+1] = X[i] + mu * X[i] * dt + sigma * X[i] * dW[i]
# แสดงผล
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, X, label='Euler-Maruyama Approximation')
plt.title('Sample Path of SDE using Euler-Maruyama')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('X(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
\end{verbatim}
\end{remark}

```

การประยุกต์: การแยกส่วนของดูบ-เมเยอร์

การแยกสมการออกเป็น พจน์ดริฟท์ และ พจน์รบกวน ตามแนวคิดของการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ มีประโยชน์สำคัญใน 2 ด้าน ดังนี้

1) **การกำหนดราคาสินค้าอนุพันธ์:** ในการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์ เช่น ออปชันหรือฟิวเจอร์ส เราสามารถใช้พจน์ดริฟท์ ซึ่งเป็นส่วนที่พยากรณ์ได้ของสมการ เพื่อประมาณ “ค่าคาดหวัง” ของราคาในอนาคต ขณะเดียวกัน พจน์รบกวน ซึ่งเกิดจากความไม่แน่นอนหรือความผันผวนในตลาด จะสะท้อน “ความเสี่ยง” ที่ไม่สามารถควบคุมได้ การแยกทั้งสองพจน์นี้ทำให้การกำหนดราคามีความแม่นยำและมีเหตุผลทางคณิตศาสตร์มากขึ้น

2) **การบริหารความเสี่ยง:** พจน์ดริฟท์แทนความเสี่ยงที่สามารถพยากรณ์และวางแผนรับมือได้ เช่น ทิศทางของแนวโน้มราคาหรืออัตราดอกเบี้ย ส่วนพจน์รบกวนแทนความเสี่ยงที่เกิดจากเหตุการณ์สุ่ม เช่น ความผันผวนของตลาดที่ไม่สามารถควบคุมได้โดยตรง การแยกสองพจน์นี้ช่วยให้นักลงทุนสามารถออกแบบกลยุทธ์ในการป้องกันความเสี่ยง (hedging) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมุ่งจัดการกับพจน์ดริฟท์ และยอมรับความไม่แน่นอนจากพจน์รบกวน

สรุปคือ การแยกสมการออกเป็นพจน์ดริฟท์และพจน์รบกวน ช่วยให้เราวิเคราะห์ เข้าใจ และใช้ประโยชน์จากตัวแบบทางการเงินได้อย่างมีประสิทธิภาพทั้งในด้านการตั้งราคาและการบริหารความเสี่ยง

6.4 ทฤษฎีบทกิร์ซานอฟ

ทฤษฎีบทกิร์ซานอฟ (Girsanov theorem) เป็นหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการปรับเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็น (change of measure) ในกระบวนการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่งเป็นกระบวนการสโตแคสติกที่สำคัญในการพยากรณ์การเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์หรือการพยากรณ์ราคาของตราสารอนุพันธ์การเงิน ทฤษฎีบทกิร์ซานอฟช่วยให้เราสามารถเปลี่ยนตัววัดความน่าจะเป็นในโลกที่มีความเสี่ยงเป็นตัววัดความน่าจะเป็นในโลกที่ไม่มีความเสี่ยงหรือตัววัดความน่าจะเป็นเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) และทำให้เราสามารถคำนวณค่า

คาดหวัง (expected value) ในโลกที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งนั่นก็คือราคาที่เราคงจะกำหนดในการซื้อขายตราสารอนุพันธ์การเงิน เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายทฤษฎีบทกิริชานอฟ จะขออธิบายพอสังเขปที่เกี่ยวข้องกับคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่จะปรากฏในทฤษฎีบทกิริชานอฟ แต่จะไม่ลงรายละเอียดมากนักเกินไปจนทำให้ผู้อ่านรู้สึกอึดอัดและภาระให้ คำศัพท์เหล่านั้น ได้แก่ พีชคณิตซิกมา ตัวกรองหรือฟิลเตอร์ (filter) เป็นต้น

พีชคณิตซิกมา (sigma-algebra: σ -algebra) หรือ สนามซิกมา (sigma-field) เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในคณิตวิเคราะห์และทฤษฎีความน่าจะเป็น มีบทนิยามทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ กำหนดให้ X เป็นเซตและ 2^X เป็นเซตกำลัง (power set) ของเซต X

บทนิยาม 6.8 กำหนดให้ $\Sigma \subseteq 2^X$ จะกล่าวว่า Σ เป็นพีชคณิตซิกมาบน X ก็ต่อเมื่อ Σ มีสมบัติต่อไปนี้

- 1) $\phi \in \Sigma$
- 2) ถ้า $E \in \Sigma$ แล้ว $E^c \in \Sigma$ และ
- 3) ถ้า $E_1, E_2, E_3, \dots \in \Sigma$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$

การวัดความน่าจะเป็น (probability measure) คือฟังก์ชันที่ใช้วัดการกระจายตัวของความน่าจะเป็น การวัดความน่าจะเป็นมีสมบัติตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.9 ถ้า Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง (sample space) และ $\mathcal{F}$ เป็นพีชคณิตซิกมาบน Ω การวัดความน่าจะเป็น P บน $(\Omega, \mathcal{F})$ คือ ฟังก์ชัน $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

- 1) $P(\Omega) = 1$: ตัววัดความน่าจะเป็นของเซตของทุกโอกาสที่เป็นไปได้เท่ากับ 1
- 2) $P(\phi) = 0$: ตัววัดความน่าจะเป็นของเซตว่างเท่ากับศูนย์
- 3) Σ -additivity: ถ้า A_n เป็นลำดับของเซตที่ไม่ร่วมกัน ($A_n \cap A_m = \phi$ สำหรับทุกๆ $n \neq m$) แล้ว $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$

การวัดความน่าจะเป็นใช้ในการระบุถึงความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดๆ ขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในกรณีของการเกมลูกเต๋าที่เป็นธรรม การวัดความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าลูกเต๋าคือเป็นเลข 6 คือ $1/6$ โดยที่ทุกหน้ามีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากันทั้งหมด เป็นต้น

บทนิยาม 6.10 ตัวกรองหรือฟิลเตอร์ (filtration) $\{\mathcal{F}_t\}$ คือ ลำดับของพีชคณิตซิกมาที่เรียงตามลำดับที่กำหนดโดยระยะเวลา โดยสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

- 1) $\mathcal{F}_s$ เป็นสับเซตของ $\mathcal{F}_t$ สำหรับทุก ๆ $0 \leq s \leq t$ (สมบัติของการเพิ่มขึ้น)
- 2) $\mathcal{F}_t$ เป็น พีชคณิตซิกมา สำหรับทุก ๆ t (สมบัติการวัด)
- 3) สำหรับทุก $s < t$ ถ้า $A \in \mathcal{F}_s$ แล้ว $A \in \mathcal{F}_t$ (สมบัติที่สอดคล้องกับการเลื่อนเวลาที่แน่นอน)

การใช้ฟิลเตอร์ในการเคลื่อนไหวแบบบราวน์หรือกระบวนการสโตแคสติกที่เกี่ยวข้องกับเวลาช่วยให้สามารถแสดงถึงปริมาณข้อมูลที่มีในแต่ละจุดเวลาที่ใช้เพื่อพยากรณ์การเคลื่อนไหวในอนาคต

บทนิยาม 6.11 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (moment generating function - mgf) ของ X (ถ้ามี) คือฟังก์ชัน $M_X(t)$ ที่ถูกกำหนดในรูป

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad (6.24)$$

เมื่อ E ตัวดำเนินการค่าคาดหวัง

ฟังก์ชันสร้างโมเมนต์ เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งช่วยในการคำนวณโมเมนต์ (moments) หรือค่าคาดหวังของกำลังของตัวแปรสุ่ม คือ ถ้า $M_X(t)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X แล้ว ค่าคาดหวังของ X^n สำหรับ n ใด ๆ จะเท่ากับอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $M_X(t)$ ที่ $t=0$

ทฤษฎีบท 6.12 (ทฤษฎีบทกิริซานอฟ) สมมติว่า P เป็นตัววัดความน่าจะเป็นในปริภูมิของวิถีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ W_t สมมติว่า $\mu(\omega, t)$ เป็นกระบวนการปรับตัวตาม

$$M_t(\mu) = \exp\left(\int_0^t \mu(\omega, s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\mu(\omega, s))^2 ds\right) \text{ สำหรับ } t \leq T \text{ และ } E^P[M_T(\mu)] = 1 \quad (6.24)$$

มีสมบัติมาร์ติงเกลแล้วจะได้ว่าจะมีตัววัดความน่าจะเป็น Q บนปริภูมิของวิถีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ W_t ที่ซึ่ง

- 1) ตัววัดความน่าจะเป็น Q สมมูลกับ ตัววัดความน่าจะเป็น P

$$\text{นั่นคือ} \quad Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

$$2) \quad \frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \mu(\omega, t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T (\mu(\omega, t))^2 dt\right)$$

- 3) $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \mu(\omega, s) ds$ สำหรับ $t \leq T$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์บนปริภูมิความน่าจะเป็น

เป็น $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ที่มีฟิลเตอร์ $\{\mathcal{F}_t\}$

พิสูจน์ นิยามตัววัดความน่าจะเป็น Q โดย

$$E^Q[A] = E^P[1_A M_T] \quad (6.25)$$

โดยที่ $M_t(\mu) = \exp\left(\int_0^t \mu(\omega, s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\mu(\omega, s))^2 ds\right)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E^Q\left[\exp\left(\int_0^T f(s) dX_s\right)\right] &= E^Q\left[\exp\left(\int_0^T f(s) dW_s + \int_0^T \mu(\omega, s) ds\right)\right] \\ &= E^P\left[\exp\left(\int_0^T (f(s) - \mu(\omega, s)) dW_s + \int_0^T f(s) \mu(\omega, s) ds - \frac{1}{2} \int_0^T (\mu(\omega, s))^2 ds\right)\right] \\ &= E^P\left[\exp\left(\int_0^T (f(s) - \mu(\omega, s)) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T (f(s) - \mu(\omega, s))^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T (f(s))^2 ds\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^T (f(s))^2 ds\right) E^P\left[\exp\left(\int_0^T (f(s) - \mu(\omega, s)) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T (f(s) - \mu(\omega, s))^2 ds\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^T (f(s))^2 ds\right) E^P[M_T(f - \mu)] = \frac{1}{2} \int_0^T (f(s))^2 ds \end{aligned}$$

และยิ่งไปกว่านั้นได้ว่า $E^Q[\exp(i\lambda(X_t - X_s))] = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right)$ ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของ

การเคลื่อนที่บราวน์ ดังนั้น $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \mu(\omega, s) ds$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ □

การนำทฤษฎีบทกิริซานอฟไปใช้งาน

ในการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นเพื่อการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ ในการวิเคราะห์ราคาของสินทรัพย์ในตลาดการเงิน เรามักใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ โดยเฉพาะกระบวนการสุ่มแบบบราวน์เชิงเรขาคณิต เช่น

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$$

โดยที่ μ คืออัตราผลตอบแทนเฉลี่ยของสินทรัพย์ในโลกความเป็นจริงภายใต้มาตรวัดความน่าจะเป็น $\mathbb{P}$, σ คือค่าความผันผวน และ $W^{\mathbb{P}}(t)$ คือกระบวนการบราวน์ในโลกจริง

แม้สมการนี้จะสะท้อนพฤติกรรมของราคาหุ้นในตลาดจริง แต่เมื่อต้องการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชัน เราไม่สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{P}$ ได้โดยตรง เนื่องจากค่าคาดหวังนั้นรวมความเสี่ยงของนักลงทุนเข้าไปแล้ว ซึ่งอาจไม่เหมาะสมกับการคำนวณราคาที่ยุติธรรม

เพื่อแก้ปัญหานี้ เราใช้ทฤษฎีบทกิริซานอฟ (Girsanov's Theorem) ซึ่งช่วยให้สามารถเปลี่ยนมุมมองความน่าจะเป็นจากโลกจริง $\mathbb{P}$ ไปสู่โลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral world) หรือมาตรวัด $\mathbb{Q}$ ซึ่งเหมาะสมต่อการประเมินมูลค่าทางคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบทกิริซานอฟ ระบุว่าหากนิยามกระบวนการใหม่

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + \theta(t)dt$$

และนิยามฟังก์ชัน Radon–Nikodym derivative ซึ่งทำให้ $\mathbb{Q}$ สมมูลกับ $\mathbb{P}$ แล้ว $W^{\mathbb{Q}}(t)$ จะเป็นกระบวนการบราวน์ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$

ตัวอย่างประกอบ เช่น สมมติว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาหุ้น A ตามกลไกตลาดเป็นดังสมการ

$$dS(t) = 0.08S(t)dt + 0.2S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$$

โดย $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.2$, และใช้อัตราคิดลด $\delta = 0.05$

เมื่อเราคำนวณค่าพารามิเตอร์ $\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma} = \frac{0.08 - 0.05}{0.2} = 0.15$

จากนั้นเปลี่ยนกระบวนการบราวน์

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + 0.15dt$$

ทำให้สมการภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ กลายเป็น

$$dS(t) = \delta S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

ซึ่งเป็นตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาหุ้น A ตามกลไกภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยงหรือภายใต้โลกที่ไม่มีความเสี่ยง นั่นเอง

ดังนั้น จะเห็นว่าทฤษฎีบทกิริชานอฟช่วยให้เราสามารถเปลี่ยนมุมมองของความน่าจะเป็นจากโลกจริงไปสู่โลกที่ไม่มีความเสี่ยง ทำให้สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ ในการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เช่นในการประเมินราคาของยุโรปียนคอลออปชัน ซึ่งสามารถประเมินราคาได้โดยใช้สูตร

$$C = e^{-\delta T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0)]$$

ตัวอย่างที่ 6.8 (การประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ภายใต้การเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นด้วยทฤษฎีบทกิริชานอฟ) สมมติบริษัทหลักทรัพย์แห่งหนึ่งกำลังพิจารณาออกตราสารอนุพันธ์ประเภทคอลออปชันแบบยุโรป สำหรับลูกค้าระดับสถาบัน โดยอิงกับราคาของสินทรัพย์อ้างอิงประเภทหนึ่งซึ่งมีพฤติกรรมเคลื่อนไหวตามกระบวนการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขา ซึ่งเป็นที่ยอมรับในตลาดการเงินว่าเหมาะสมสำหรับการจำลองราคาหุ้นในระยะสั้น

สมมติราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ ถูกกำหนดให้เป็นไปตามสมการ

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad S(0) = 100$$

โดยมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการประเมินดังนี้

- $\mu = 0.08$ (อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังในโลกจริง)
- $\sigma = 0.2$ (ค่าความผันผวนของสินทรัพย์)
- $\delta = 0.05$ (อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง)
- $K = 105$ (ราคาการใช้สิทธิ)
- $T = 1$ ปี (ระยะเวลาคงเหลือจนถึงวันหมดอายุ)

จงตอบคำถาม ต่อไปนี้

- 1) (การเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น) เพื่อใช้หลักการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ภายใต้แนวคิดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral valuation) บริษัทต้องเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นจากโลกจริง $\mathbb{P}$ ไปเป็นมาตรวัดความน่าจะเป็นภายใต้โลกที่ไม่มีความเสี่ยง $\mathbb{Q}$ (มาตรวัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) จงระบุสมการที่ใช้ในการแปลงมาตรวัด และอธิบายแนวคิดพื้นฐานของการเปลี่ยนพจน์ดริฟต์โดยใช้พารามิเตอร์ θ

- 2) (การคำนวณค่าพารามิเตอร์ θ) จงคำนวณค่า $\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma}$ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดในโจทย์ พร้อมอธิบายความหมายของค่า θ ในเชิงการเงิน และผลกระทบต่อการจำลองกระบวนการภายใต้มาตรวัดใหม่
- 3) (แบบจำลองราคาสินทรัพย์ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$) จงเขียนสมการของราคาสินทรัพย์ $S(t)$ ที่อยู่ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ และอธิบายว่าพจน์ดริฟต์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับมาตรวัด $\mathbb{P}$
- 4) (การจำลองมอนติคาร์โล: Monte Carlo Simulation) สมมติว่าบริษัทสามารถจำลองเส้นทางราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ ได้จำนวน 10,000 เส้นทาง ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ อธิบายขั้นตอนหลักของการจำลองเส้นทางดังกล่าว และการใช้ผลลัพธ์เพื่อวิเคราะห์ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจากออปชัน
- 5) (สูตรการประเมินมูลค่าคอลออปชันและหลักการคิดลด) จงเขียนสูตรที่ใช้สำหรับการประมาณราคาของออปชันดังกล่าว และ อธิบายหลักการของการคิดลดค่าคาดหวังกลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบัน โดยใช้สูตร

$$C = e^{-\delta T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0)]$$

วิธีทำ ข้อ 1) ในโลกจริงกระบวนการราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ มีพจน์ดริฟต์เป็น μ และแสดงด้วยสมการ

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$$

เพื่อเปลี่ยนไปสู่มาตรวัดที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง $\mathbb{Q}$ เราใช้ทฤษฎีบทกิริซานอฟโดยนิยามกระบวนการใหม่ $W^{\mathbb{Q}}(t)$ ดังนี้

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + \theta dt$$

โดย $\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma}$ เป็นค่าที่ปรับพจน์ดริฟต์เพื่อให้ $W^{\mathbb{Q}}(t)$ กลายเป็นกระบวนการบราวน์ภายใต้มาตรวัดใหม่ $\mathbb{Q}$ ซึ่งทำให้สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้ $\mathbb{Q}$ เพื่อประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างเป็นกลางต่อความเสี่ยง

ข้อ 2) จากข้อมูลโจทย์ $\mu = 0.08$, $\delta = 0.05$, $\sigma = 0.2$ ดังนั้น

$$\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma} = \frac{0.08 - 0.05}{0.2} = 0.15$$

ความหมายของ θ เป็นอัตราส่วนของผลตอบแทนส่วนเกินเมื่อเทียบกับความเสี่ยงของสินทรัพย์สื่อถึง "ราคาของความเสี่ยง" (market price of risk) และใช้ในการแปลงกระบวนการแบบสุ่มจากโลกจริงไปยังโลกที่ไม่มีความเสี่ยงหรือโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง

ข้อ 3) เมื่อเปลี่ยนมาตรวัดจาก $\mathbb{P}$ ไปยัง $\mathbb{Q}$ โดยใช้ทฤษฎีบทกิริชานอฟ พจน์ดริฟท์จะเปลี่ยนจาก μ เป็น δ ส่งผลให้สมการกลายเป็น

$$dS(t) = \delta S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

ดังนั้น พจน์ดริฟท์ภายใต้ $\mathbb{Q}$ จะแสดงถึงอัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งช่วยให้เราสามารถใช้มาตรวัดนี้สำหรับการประเมินราคาที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

ข้อ 4) การจำลองมอนติคาร์โล มีขั้นตอนในการจำลอง ดังต่อไปนี้

- แบ่งช่วงเวลาระหว่าง 0 ถึง T ออกเป็น N ขั้น และตั้งค่าเริ่มต้น $S(0) = 100$
- สุ่มค่าจากการแจกแจงปกติ $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ แล้วคำนวณ $\Delta W_i = \sqrt{\Delta t} Z_i$
- ใช้สมการจำลองด้วยวิธีออยเลอร์-มารูยามะ

$$S_{i+1} = S_i + \delta S_i \Delta t + \sigma S_i \Delta W_i$$

- ทำซ้ำกระบวนการนี้ 10,000 เส้นทาง เพื่อได้ $S^{(j)}(T)$ แต่ละเส้น

จากนั้นนำค่าที่ได้มาใช้คำนวณค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลออปชัน (payoff of call option) ในข้อถัดไป

ข้อ 5) สูตรการประเมินมูลค่า Call Option ตามหลักการคิดลด

ราคาของคอลออปชันสามารถประเมินได้ด้วยสูตร

$$C = e^{-\delta T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S(T) - K, 0)]$$

โดยที่ δ คืออัตราคิดลด และ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ คือค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ ซึ่งหมายถึงการคำนวณจากโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง การคูณด้วย $e^{-\delta T}$ คือการนำมูลค่าในอนาคตกลับมาเป็นราคาปัจจุบัน โดยผลลัพธ์จากการจำลอง Monte Carlo จำนวน 10,000 เส้นทางโดยใช้โปรแกรมภาษาไพธอนมีดังนี้

- ค่าเฉลี่ยของ $S(T)$ ประมาณ 105.10

- ราคาของคอลออปชัน ประมาณ 8.02

□

หมายเหตุ: ตัวอย่างโค้ดไพธอนในการจำลองและการคำนวณตามตัวอย่างที่ 6.8

```
import numpy as np

# Parameters
S0 = 100      # Initial asset price
delta = 0.05  # Risk-free rate or discount rate
sigma = 0.2   # Volatility
T = 1.0       # Time horizon
K = 105       # Strike price
n_paths = 10000 # Number of Monte Carlo simulations

# Simulate S(T) under Q measure
np.random.seed(42)
Z = np.random.randn(n_paths)
ST = S0 * np.exp((delta - 0.5 * sigma**2) * T + sigma * np.sqrt(T) * Z)

# Compute average S(T)
average_ST = np.mean(ST)

# Compute price of European call option
payoffs = np.maximum(ST - K, 0)
call_price = np.exp(-delta * T) * np.mean(payoffs)

average_ST, call_price
```

บทสรุปท้ายบทที่ 6

บทที่ 6 ได้นำเสนอองค์ความรู้พื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัสสโตแคสติก ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักในการวิเคราะห์กระบวนการสุ่มที่มีการเปลี่ยนแปลงต่อเนื่องในเวลา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริบทของแบบจำลองทางการเงินที่มีลักษณะสุ่มและไม่สามารถพยากรณ์ได้อย่างแน่นอน บทนี้เริ่มต้นด้วยบทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของแคลคูลัสสโตแคสติก ซึ่งครอบคลุมแนวคิดของการอินทิเกรตเชิงสโตแคสติก การวิเคราะห์พฤติกรรมของกระบวนการบราวน์ และการประยุกต์ใช้ **บทตั้งของอิโต้ (Ito's Lemma)** ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลของกระบวนการสุ่ม

เนื้อหาในส่วนของ สมบัติมาร์ติงเกล (Martingale Property) และ การจำแนก ส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ (Doob-Meyer Decomposition) ได้แสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์ พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มในเชิงโครงสร้าง โดยการแยกกระบวนการออกเป็น ส่วนที่สามารถ พยากรณ์ได้ (bounded variation component) และส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้ (martingale component) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการประเมินค่าคาดหวังของราคาทรัพย์สินทางการเงินภายใต้ กรอบการประเมินแบบไม่มีโอกาสทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition)

หัวข้อ ทฤษฎีบทกิริซานอฟ (Girsanov's Theorem) ซึ่งเป็นส่วนสำคัญในท้ายบท ได้ แสดงให้เห็นถึงกลไกการแปลงมาตรวัดความน่าจะเป็นจากโลกแห่งความเสี่ยง (real-world measure) ไปสู่โลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) ซึ่งเป็นแนวคิด พื้นฐานในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ การเปลี่ยนมาตรวัดนี้มีความสำคัญต่อการหาค่า คาดหมายภายใต้สมมุติฐานความเป็นกลางต่อความเสี่ยง เพื่อใช้เป็นมูลค่ายุติธรรมของเครื่องมือทาง การเงินที่มีลักษณะไม่แน่นอน

บทนี้ยังได้นำเสนอแนวคิดของกระบวนการสุ่มปรับตัวตาม (adapted process), กระบวนการมาร์ติงเกลในรูปชี้กำลัง (exponential martingale) ฟังก์ชันสร้างโมเมนต์ (moment generating function) และโครงสร้างทางทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เช่น พีชคณิตซิกมา (sigma-algebra) และฟิลเตอร์ (filtration) เพื่อวางพื้นฐานทางทฤษฎีสำหรับการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำในระดับสูง และเพื่อสร้างกรอบการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับแนวคิดของ stochastic differential equations ที่ ใช้กันอย่างแพร่หลายในวงการการเงิน

โดยสรุป บทที่ 6 ได้นำเสนอเนื้อหาที่ครอบคลุมทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ ใช้เป็น พื้นฐานสำหรับการศึกษาวิชาในระดับที่สูงขึ้น อาทิ แบบจำลอง Black-Scholes, แบบจำลองอัตรา ดอกเบี้ย Vasicek และ CIR ตลอดจนการประยุกต์ใช้ในด้าน การประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ การ คำนวณ Value at Risk (VaR) และการบริหารความเสี่ยงเชิงปริมาณ ซึ่งล้วนเป็นเครื่องมือที่มี ความสำคัญในโลกการเงินร่วมสมัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [2] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- [3] Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90016-2)
- [4] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- [5] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-Time Models*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40101-4>
- [6] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd Ed.). Oxford University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และสำหรับทุก ๆ ฟังก์ชันจริง f บน $\mathbb{R}^+$

นิยาม $G_f(t) = \int_0^t f(s)dB_s$ จงแสดงว่า

$$1.1) E[G_f(t)] = 0$$

$$1.2) Cov(G_f(t), G_g(t)) = \int_0^{t \wedge s} f(u)g(u)du$$

2) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int \sigma e^{\sigma B_s} dB_s + \int \frac{\sigma^2}{2} e^{\sigma B_s} ds$
(แนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = e^{\sigma x}$)

3) กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (sde) $dX_t = A_t X_t dB_t$, $X_0 = x_0$

จงแสดงว่า $X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t A_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t A_s^2 ds\right)$

(แนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x) = x_0 e^x$)

4) ใช้ สูตรของอิโต้ (Ito's formula) หาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกของ $f(t, B_t)$

เมื่อ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และ

$$4.1) f(t, x) = \sin x$$

$$4.2) f(t, x) = e^{-t} (x/t)^2$$

5) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t \geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E[X_t]$

และ $Var[X_t]$ เมื่อ X_t เท่ากับค่าต่อไปนี้

$$5.1) \int_0^t \sigma dB_s$$

$$5.2) \int_0^t B_s dB_s$$

$$5.3) \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

$$5.4) \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s$$

6) กำหนดให้ $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ เป็นกระบวนการอิโต้ โดยที่ $W(t)$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์ จงหาค่า $dY(t)$ เมื่อ $Y(t) = \ln(X(t))$ โดยใช้ Ito's Lemma

7) ให้ $f(t, X(t)) = e^{X(t)}$ และ $X(t) = W(t)^2$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา df และเปรียบเทียบผลที่ได้กับแคลคูลัสปกติ พร้อมอธิบายผลต่างในเชิงคณิตศาสตร์

8) สมมติให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้นที่เป็นไปตามสมการ $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา $d \ln S(t)$ และอธิบายความหมายทางการเงินของผลลัพธ์

9) จงพิสูจน์ว่า หาก $\phi(t)$ เป็นฟังก์ชันไม่สุ่ม และ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์ แล้ว

$$\int_0^T \phi(t) dW(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \int_0^T \phi(t)^2 dt \right)$$

10) ให้ $X(t) = \int_0^t \sin(s) dW(s)$ จงหาค่าคาดหวังและความแปรปรวนของ $X(t)$ โดยใช้ Ito Isometry

11) ให้ $f(t, W(t)) = W(t)^3$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา df และวิเคราะห์ว่า $\mathbb{E}[W(t)^3]$ ขึ้นกับ t หรือไม่

12) จงแสดงว่า $M(t) = W(t)^2 - t$ เป็นมาร์ติงเกล โดยพิสูจน์จากนิยามมาร์ติงเกล

13) กำหนดให้ $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ จงจำแนก $X(t)^2$ ให้อยู่ในรูปส่วนประกอบมาร์ติงเกลและส่วนประกอบการแปรผันจำกัดตามแนวคิด Doob-Meyer Decomposition

14) ให้ $X(t) = \exp \left(\sigma W(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right)$ จงแสดงว่า $X(t)$ เป็นมาร์ติงเกล และอธิบายความเชื่อมโยงกับการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์

15) พิจารณากระบวนการ $dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$ จงเปลี่ยนมาตรวัดจาก $\mathbb{P}$ เป็น $\mathbb{Q}$ โดยใช้ Girsanov's Theorem และเขียนรูปสมการ $dX(t)$ ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$

16) จงอธิบายและแสดงให้เห็นว่า Girsanov's Theorem ช่วยให้สามารถประเมินราคาคอลอปชันยุโรปได้ภายใต้ risk-neutral measure โดยใช้ตัวแบบ Black-Scholes

17) กำหนดให้ $Z(t) = \exp \left(-\int_0^t \theta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds \right)$ โดยที่ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันกำหนด จงวิเคราะห์ว่า $Z(t)$ เป็นมาร์ติงเกลหรือไม่ และอธิบายบทบาทของ $Z(t)$ ในการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น