

บทที่ 7 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

เนื้อหาประกอบด้วย

- 7.1 ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย
- 7.2 แบบจำลองของ Vasicek และแบบจำลอง CIR
- 7.3 แบบจำลอง Ho-Lee
- 7.4 แบบจำลอง Black-Derman-Toy

บทนำ

ในระบบการเงินที่มีพลวัตสูง อัตราดอกเบี้ยถือเป็นตัวแปรทางเศรษฐกิจที่มีผลกระทบโดยตรงต่อการประเมินมูลค่าตราสารหนี้ การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ และการบริหารความเสี่ยงทางการเงินในระดับสถาบันและระบบเศรษฐกิจ การสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยจึงเป็นภารกิจหลักในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะแบบจำลองที่สามารถจับการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในลักษณะต่อเนื่องของเวลา ซึ่งมีความผันผวนและไม่แน่นอนสูง ในบริบทนี้ การใช้ แคลคูลัสโตแคสติก (Stochastic Calculus) แทนแคลคูลัสของจำนวนจริงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากแบบจำลองที่มีตัวแปรสุ่มเชิงเวลา (เช่น Brownian Motion) จำเป็นต้องใช้เครื่องมือคณิตศาสตร์ที่สามารถจัดการกับการเปลี่ยนแปลงที่ไม่สามารถคาดการณ์ล่วงหน้าได้ ซึ่งเครื่องมือเหล่านี้ได้รับการพัฒนาและวางรากฐานโดย Itô (ค.ศ. 1951) และต่อมาถูกประยุกต์ใช้ในงานด้านการเงินอย่างเป็นระบบในงานของ Black & Scholes (ค.ศ. 1973), Merton (ค.ศ. 1973) และต่อเนื่องสู่การสร้างแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่ซับซ้อนมากขึ้น (Shreve, ค.ศ. 2004; Björk, ค.ศ. 2009)

บทนี้เริ่มต้นด้วยการพิจารณา ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย อาทิ ความสามารถในการอธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยแบบปัจจุบัน (Term Structure) ความไม่เป็น

ลบของอัตราดอกเบี้ย และความสามารถในการกำหนดราคาพันธบัตรในลักษณะของมาร์ติงเกล ภายใต้มาตรการ Risk-Neutral (Brigo & Mercurio, ค.ศ. 2006)

ต่อจากนั้น ผู้อ่านจะได้ศึกษาแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่ได้รับความนิยมและถูกนำไปใช้ในทางปฏิบัติ ดังนี้

- แบบจำลอง Vasicek (ค.ศ. 1977): เป็นแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยแรกที่มีโครงสร้าง Mean-Reverting โดยอิงการเคลื่อนไหวสุ่มแบบบราวเนียน มีความสะดวกในการวิเคราะห์เชิงปิด แม้จะมีข้อจำกัดด้านความเป็นลบของอัตราดอกเบี้ย
- แบบจำลอง Cir (Cox-Ingersoll-Ross, ค.ศ. 1985): พัฒนาเพื่อแก้ปัญหาอัตราดอกเบี้ยติดลบ โดยใช้เทอมสแควร์รูทในพจน์ความผันผวน ซึ่งสอดคล้องกับพฤติกรรมของตลาดจริงมากยิ่งขึ้น และสามารถเชื่อมโยงกับโครงสร้างอัตราผลตอบแทนได้ดี
- แบบจำลอง Ho-Lee (ค.ศ. 1986): เป็นแบบจำลอง Non-Stationary ที่สามารถกำหนดให้สอดคล้องกับโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยเริ่มต้นได้แบบ Explicit ซึ่งมีความยืดหยุ่นในการใช้งานจริง
- แบบจำลอง Black-Derman-Toy (ค.ศ. 1990): พัฒนาต่อจาก Ho-Lee โดยเพิ่มความสามารถในการสร้างความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามอัตราดอกเบี้ยเองได้ (State-Dependent Volatility)

แบบจำลองเหล่านี้นอกจากจะเป็นรากฐานในการวิเคราะห์ทางทฤษฎีแล้ว ยังสามารถนำไปใช้จริงในกระบวนการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ เช่น Bond Options, Swaptions, และ Callable Bonds ตลอดจนการประเมินความเสี่ยงในพอร์ตสินทรัพย์ที่ขึ้นอยู่กับเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย เช่น การวัด Duration, Convexity และ Value-At-Risk (Hull, ค.ศ. 2018)

ในทางทฤษฎี แบบจำลองเหล่านี้ยังเป็นรากฐานของการพัฒนาโมเดลที่ซับซ้อนขึ้น เช่น แบบจำลอง Heath-Jarrow-Morton (HJM) และแบบจำลองตลาดที่ขับเคลื่อนด้วยกระบวนการ Lévy หรือกระบวนการ Jump-Diffusion ที่ใช้ในการประเมินราคาภายใต้ตลาดที่ไม่สมบูรณ์หรือมีการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้าง

กล่าวโดยสรุป บทที่ 7 มีเป้าหมายเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจในกลไกการสร้างแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นอย่างเป็นระบบ ครอบคลุมทั้งด้านแนวคิด ทฤษฎี และการประยุกต์ใช้จริง โดยเฉพาะในด้านการเงินเชิงปริมาณและการบริหารความเสี่ยงที่ต้องการความแม่นยำเชิงคณิตศาสตร์ระดับสูง

แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยมีบทบาทสำคัญมากในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ โดยเฉพาะอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ย (interest-rate-contingent claims) เช่น cap ของอัตราดอกเบี้ย สวอป (swaps) ออปชันบนตราสารหนี้ และ ตราสารหนี้หนุนด้วยสินเชื่อที่อยู่อาศัย เป็นต้น แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีชื่อเสียง เช่น แบบจำลองของ Vasicek ในปี ค.ศ.1977 แบบจำลองของ Dothan ในปี ค.ศ.1978 แบบจำลองของ Richard ในปี ค.ศ.1979 แบบจำลองของ Brennan-Schwartz ในปี ค.ศ.1979 แบบจำลองของ Langetieg ในปี ค.ศ.1980 แบบจำลองของ Courtadon ในปี ค.ศ.1982 แบบจำลองของ Cox-Ingersoll-Ross ในปี ค.ศ.1985 แบบจำลองดังกล่าวมีจุดด้อยและจุดเด่นแตกต่างกันไป ต่อมาแบบจำลองต่าง ๆ ได้รับการพัฒนาและปรับปรุงอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ.1986 Ho-Lee ได้นำเสนอและแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยสามารถกำหนดให้สอดคล้องกับโครงสร้างเริ่มต้นตามที่ระบุได้อย่างไร ในเวลาต่อมา ในปี ค.ศ. 1987 Heath-Jarrow-Morton ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยเพื่ออธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยและโครงสร้างความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปเชิงทฤษฎี

ในบทนี้กล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบต่าง ๆ เช่น แบบจำลองของ Vasicek แบบจำลองของ Cox-Ingersoll-Ross: CIR (ค.ศ.1985) ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวจะอธิบายโครงสร้างปัจจุบันของอัตราดอกเบี้ยและโครงสร้างของความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าได้เป็นอย่างดี แบบจำลองดังกล่าวสามารถระบุความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยทันที (ความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนทันที) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (ความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า) ซึ่งสามารถนำไปการประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาออปชันและออปชันของตราสารหนี้แบบยุโรป (European bond options) อีกด้วย

7.1 ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ยเป็นตัวแปรที่สำคัญในการวิเคราะห์และการกำหนดราคาตราสารหนี้และตราสารอนุพันธ์ แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยสามารถใช้ในการอธิบายพฤติกรรมโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาของตราสารหนี้และอนุพันธ์ของตราสารหนี้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสม ภายใต้สมมติฐานว่าระดับอัตราดอกเบี้ย $r_t = r(t)$ ณ เวลา t มีการเคลื่อนที่ในลักษณะสุ่ม ราคาตราสารหนี้และราคาอนุพันธ์ที่ถูกกำหนดโดยระดับอัตราดอกเบี้ย r_t ก็จะมีลักษณะการเคลื่อนที่ในลักษณะสุ่มเช่นเดียวกัน ดังนั้น พฤติกรรมการเคลื่อนที่ในลักษณะสุ่มของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t จึงเป็นดัชนีชี้วัดค่าของเหตุการณ์ในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ (Δt) ระหว่างเวลา t ถึง $t + \Delta t$ ได้เป็นอย่างดี อัตราผลตอบแทนที่ปราศจากความเสี่ยงที่นักลงทุนจะได้รับสำหรับการลงทุนในช่วงเวลาดังตั้งแต่วันที่ t จนถึงเวลาที่ $t + \Delta t$ เท่ากับร้อยละ $r(t)\Delta t$

ลักษณะอันพึงประสงค์ของกระบวนการจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเพื่ออธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยจึงเป็นสิ่งที่สำคัญ โดยลักษณะอันพึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ มีอยู่ 3 ประการ ดังนี้

ประการที่ 1) อัตราดอกเบี้ยที่เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองควรมีค่าเป็นบวกเท่านั้น เพราะหากแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมีโอกาสให้ผลลัพธ์เป็นอัตราดอกเบี้ยที่เป็นลบได้ จะหมายความว่าทางเลือกในการลงทุนนั้นไม่ใช่ทางเลือกในการลงทุนที่ดี ซึ่งถึงการลงทุนในโครงข่ายขาดทุน ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีโอกาสให้ผลลัพธ์อัตราดอกเบี้ยที่เป็นลบได้เป็นแบบที่ไม่ดี ไม่สมเหตุสมผล

ประการที่ 2) อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ที่ได้จากแบบจำลองควรมีพฤติกรรมรูปถดถอยอัตโนมัติ (autoregressive) ซึ่งหมายถึง การที่สามารถใช้ค่าอัตราดอกเบี้ยของในตัวแบบในการพยากรณ์อัตราดอกเบี้ยต่อไบนั่นเอง ค่าของอัตราดอกเบี้ย r_t ที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาจะถูกดึงกลับเข้าสู่ค่าอัตราดอกเบี้ยเฉลี่ยระยะยาว และจะไม่ลู่ออก นั่นคือ อัตราดอกเบี้ยจะไม่สามารถเคลื่อนออกนอกเส้นทางสู่ค่าที่เป็นบวกอนันต์ ($+\infty$) หรือลบอนันต์ ($-\infty$) ได้ ($\lim_{t \rightarrow \infty} r_t \neq \pm\infty$) ซึ่ง

ถ้าหากแบบจำลองไม่มีคุณสมบัติการดึงอัตราดอกเบี้ยกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาวแล้ว ค่าอัตราดอกเบี้ยที่ได้อาจจะไม่สมเหตุสมผล กล่าวคือ ค่าอัตราดอกเบี้ยจากแบบจำลองอาจจะอยู่ที่อัตรามากเกินไปไม่สอดคล้องกับความเป็นจริงและทำให้แบบจำลองขาดประสิทธิภาพในการนำไปใช้งานจริง

ประการที่ 3) แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยควรมีสถูรูปปิด (closed form formula) เพื่อให้สะดวกสำหรับการนำไปใช้งาน รวมทั้งสูตรรูปปิดในการคำนวณราคาของตราสารหนี้และราคาของอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องเพื่อความสะดวกของผู้ใช้งาน ซึ่งสูตรรูปปิดสำหรับใช้ในการคำนวณราคาดังกล่าวควรอยู่ในรูปแบบที่เรียบง่าย ตรงไปตรงมา สะดวกและง่ายต่อการนำไปใช้งาน แบบจำลองที่ให้สูตรในการคำนวณราคาที่ซับซ้อนเกินไปทำให้การใช้งานยุ่งยากและเสียเวลาในการคำนวณซึ่งอาจไม่เหมาะสมกับการนำมาใช้งานจริง

นอกจากลักษณะอันพึงประสงค์ทั้ง 3 ประการข้างต้นแล้ว ยังมีลักษณะอันพึงประสงค์อื่น ๆ อีกที่ควรนำมาพิจารณาในการเลือกแบบจำลองเพื่อนำไปใช้งานจริง เช่น แบบจำลองควรมีความยืดหยุ่นเพียงพอและสามารถปรับใช้กับเครื่องมือทางการเงิน อื่น ๆ อาทิ อนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น หรือผลิตภัณฑ์ทางการเงินใหม่ ๆ แบบจำลองพึงจะมีค่าผลลัพธ์ที่มีลักษณะพลวัต (dynamic) และสมเหตุสมผล เช่น แบบจำลองพึงให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสิ่งที่ผู้ใช้งานสามารถสังเกตเห็นได้ทั้งจากปัจจุบันและอดีต โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยที่ได้จากแบบจำลองควรสามารถอธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยในตลาดได้เป็นอย่างดีหรืออย่างน้อยควรต้องให้ค่าโดยประมาณที่ดีได้ในระดับที่ผู้ปฏิบัติยอมรับได้ มีความเชื่อมั่นในการนำแบบจำลองนั้นไปใช้งานจริง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ที่เป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันทั่วไป เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานพอสังเขป แบบจำลองดังกล่าว ได้แก่ แบบจำลองของ Vasicek แบบจำลอง CIR แบบจำลอง Ho-Lee และแบบจำลอง Black-Derman-Toy

7.2 แบบจำลองของ Vasicek และแบบจำลอง CIR

แบบจำลอง Vasicek และ แบบจำลอง CIR เป็นแบบจำลองตัวแปรหนึ่งสถานะที่อธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r ที่มีกระบวนการค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean-reverting process) ซึ่งเป็นกระบวนการที่อธิบายว่าเมื่ออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นสูงกว่าปกติ จะถูก

ดึงกลับไปสู่ระดับค่าเฉลี่ยระยะยาว เมื่ออัตราระยะสั้น r เปลี่ยนแปลงลดต่ำกว่าปกติก็จะมีการเลื่อนขึ้นไปสู่ระดับเฉลี่ยระยะยาวเช่นกัน โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r สามารถอธิบายได้ดังสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกได้ดังสมการต่อไปนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t \quad (7.1)$$

โดยที่ a , b , σ เป็นค่าคงที่บวก, β เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นลบ, b เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะยาว และ a เป็นค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean reversion) ซึ่งทำหน้าที่ปรับการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย r ระยะสั้นให้มีแนวโน้มเข้าสู่ค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ยระยะยาวโดยมีความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2 r^{2\beta}$

เมื่อ σ คือ ความผันผวน (volatility) หรือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

β คือ ค่าความยืดหยุ่นที่ใช้วิเคราะห์รูปแบบของแบบจำลอง Vasicek และแบบจำลอง CIR

dt คือ ขนาดการเปลี่ยนแปลงของช่วงเวลา

dW_t เป็นตัวแปรเชิงสุ่มบราวน์โดยที่ $dz \sim N(0, dt)$

สมการ (7.1) ในรูปการณัประมาณค่าสามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta r = a(b - r_i)\Delta t + \sigma r_i^\beta \Delta W_t$$

เมื่อ $\Delta r = r_{i+1} - r_i$ นั้นคือสามารถพิจารณาว่า $a(b - r_i)\Delta t$ เป็นค่าประมาณของ Δr เทอมของ $\sigma r_i^\beta \Delta W_t$ ถูกพิจารณาเป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณซึ่งมีการแจกแจงปกติซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2 r^{2\beta} \Delta t$ ในที่นี้จะพิจารณาค่าพารามิเตอร์ β เป็นสองกรณีดังนี้ $\beta = 0$ และ $\beta = 0.5$

7.2.1 แบบจำลอง Vasicek

แบบจำลอง Vasicek คือแบบจำลอง (7.1) ในกรณีที่ $\beta = 0$ ซึ่งได้รับการนำมาพิจารณาเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1977 โดยแบบจำลอง Vasicek อยู่ในรูป

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (7.2)$$

สำหรับแบบจำลอง Vasicek จะได้ $r_t \sim N\left(e^{-at}r_0 + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$ ซึ่งทำค่าอัตราดอกเบี้ย r ตามทฤษฎีสามารถมีค่าเป็นศูนย์และเป็นลบได้ หากเราพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้นหรืออัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของหุ้นก็สามารถประยุกต์ใช้แบบจำลองเพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาหรือผลตอบแทนของหุ้นดังกล่าวได้

ตัวอย่างที่ 7.1 สมมติหุ้น aaa มีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังเป็นดังตาราง ในที่นี้เราพิจารณาอัตราการการเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จะเห็นว่าค่าอัตราดอกเบี้ยในที่นี้สามารถมีค่าเป็นศูนย์และเป็นลบได้เนื่องจากเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง การสร้างแบบจำลอง

Vasicek กรณีที่ $\beta=0$ ตามสมการ (7.20), $dr = a(b-r)dt + \sigma dW_t$

วิธีทำ เริ่มต้นโดยกำหนดให้ $\Delta t=1$ และพิจารณาว่า $a(b-r_t)$ เป็นค่าประมาณของ Δr และ เทอมของ $\sigma \Delta z$ เป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณซึ่งมีการแจกแจงปกติซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 จากข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้
ขั้นที่ 1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น (โดยสุ่ม) $a = a_0, b = b_0, \sigma = \sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $a = b = \sigma = 0.02$)

ขั้นที่ 2) สร้างคอลัมน์ $dr \approx \Delta r = r_{t+1} - r_t, a(b-r_t), x \equiv a(r_t - b) - dr$,

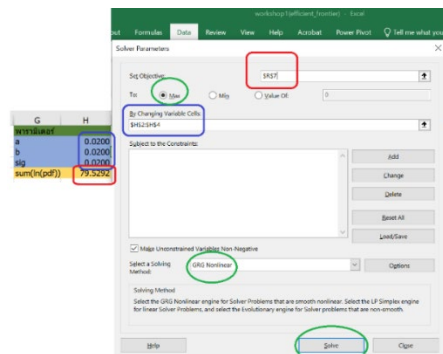
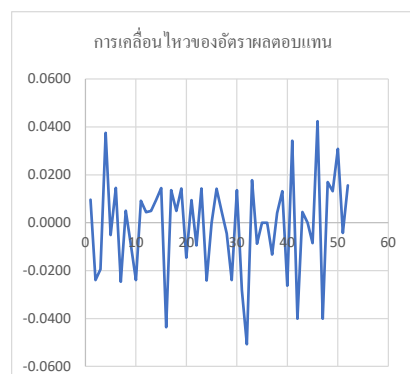
$pdf \equiv \text{NORMDIST}(x,0,\sigma_0,\text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.1

ขั้นที่ 3) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, σ โดย excel solver ในโปรแกรม excel แก้ปัญหาค่าสูงสุด โดย $\text{sum}(\ln(pdf))$

เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ a, b, σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้วผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ a, b และ σ ของแบบจำลอง Vasicek ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa ซึ่งอยู่ในรูป

$$dr = 1.3894(0.0000 - r)dt + 0.0190dW_t$$

ตารางที่ 7.1 (สมมติ) อัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้น aaa



	พารามิเตอร์					
	a	1.3894				
	b	0.0000				
	sig	0.0190				
	sum(ln(pdf))	129.8854				
วันเดือนปี	r	dr	a(b-r)	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
Jan 04, 2022	0.0096					
Jan 05, 2022	-0.0239	-0.0335	-0.0133	-0.0202	11.9538	2.4810
Jan 06, 2022	-0.0194	0.0045	0.0332	-0.0287	6.6855	1.8999
Jan 07, 2022	0.0375	0.0569	0.0270	0.0299	6.0421	1.7988
Jan 10, 2022	-0.0051	-0.0426	-0.0521	0.0095	18.5622	2.9211
Jan 11, 2022	0.0146	0.0197	0.0071	0.0126	16.8666	2.8253
Jan 12, 2022	-0.0246	-0.0392	-0.0203	-0.0189	12.7925	2.5489
Jan 13, 2022	0.0050	0.0296	0.0342	-0.0046	20.4421	3.0176
Jan 14, 2022	-0.0095	-0.0145	-0.0069	-0.0076	19.4409	2.9674
Jan 17, 2022	-0.0239	-0.0144	0.0132	-0.0276	7.2914	1.9867
Jan 18, 2022	0.0092	0.0331	0.0332	-0.0001	21.0471	3.0468
Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	-0.0128	0.0080	19.2613	2.9581
Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	-0.0061	0.0066	19.8045	2.9859
Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	-0.0068	0.0113	17.6162	2.8688
Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	-0.0131	0.0182	13.3005	2.5878
Jan 25, 2022	-0.0436	-0.0581	-0.0201	-0.0380	2.8350	1.0420
Jan 26, 2022	0.0136	0.0572	0.0606	-0.0034	20.7160	3.0309
Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	-0.0189	0.0102	18.2125	2.9021
Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	-0.0068	0.0162	14.6023	2.6812
Feb 01, 2022	-0.0146	-0.0289	-0.0199	-0.0090	18.7886	2.9332
Feb 02, 2022	0.0094	0.0240	0.0203	0.0037	20.6470	3.0276
Feb 03, 2022	-0.0095	-0.0189	-0.0131	-0.0058	20.0718	2.9993
Feb 04, 2022	0.0143	0.0238	0.0132	0.0106	18.0001	2.8904
Feb 07, 2022	-0.0241	-0.0384	-0.0199	-0.0185	13.0505	2.5688
Feb 08, 2022	0.0000	0.0241	0.0335	-0.0094	18.6197	2.9242
Feb 09, 2022	0.0142	0.0142	0.0000	0.0142	15.8974	2.7662
Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	-0.0197	0.0100	18.2980	2.9068
Feb 11, 2022	-0.0045	-0.0090	-0.0063	-0.0027	20.8274	3.0363
Feb 14, 2022	-0.0239	-0.0194	0.0063	-0.0257	8.4232	2.1310
Feb 15, 2022	0.0136	0.0375	0.0332	0.0043	20.5142	3.0211
Feb 17, 2022	-0.0281	-0.0417	-0.0189	-0.0228	10.2066	2.3230
Feb 18, 2022	-0.0507	-0.0226	0.0390	-0.0616	0.1063	-2.2413
Feb 21, 2022	0.0178	0.0685	0.0704	-0.0019	20.9372	3.0415
Feb 22, 2022	-0.0088	-0.0266	-0.0247	-0.0019	20.9453	3.0419
Feb 23, 2022	0.0000	0.0088	0.0122	-0.0034	20.7063	3.0304
Feb 24, 2022	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	21.0474	3.0468
Feb 25, 2022	-0.0133	-0.0133	0.0000	-0.0133	16.4545	2.8006
Feb 28, 2022	0.0041	0.0174	0.0185	-0.0011	21.0133	3.0452
Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	-0.0057	0.0148	15.5193	2.7421
Mar 01, 2022	-0.0263	-0.0395	-0.0183	-0.0212	11.2869	2.4236
Mar 02, 2022	0.0342	0.0605	0.0365	0.0240	9.4676	2.2479
Mar 03, 2022	-0.0401	-0.0743	-0.0475	-0.0268	7.7560	2.0485
Mar 04, 2022	0.0045	0.0446	0.0557	-0.0111	17.7230	2.8749
Mar 07, 2022	0.0000	-0.0045	-0.0063	0.0018	20.9576	3.0425
Mar 08, 2022	-0.0085	-0.0085	0.0000	-0.0085	19.0340	2.9462
Mar 09, 2022	0.0424	0.0509	0.0118	0.0391	2.5098	0.9202
Mar 10, 2022	-0.0401	-0.0825	-0.0589	-0.0236	9.7017	2.2723
Mar 11, 2022	0.0170	0.0571	0.0557	0.0014	20.9912	3.0441
Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	-0.0236	0.0198	12.1837	2.5001
Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	-0.0183	0.0360	3.4526	1.2391
Mar 16, 2022	-0.0043	-0.0352	-0.0429	0.0077	19.3671	2.9636
Mar 17, 2022	0.0156	0.0199	0.0060	0.0139	16.0690	2.7769

ขั้นที่ 4) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยภายใต้แบบจำลอง Vasicek เพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง

4.1) กำหนดพารามิเตอร์: a ความเร็วในการคืนกลับสู่ค่าเฉลี่ย b ค่าเฉลี่ยระยะยาว

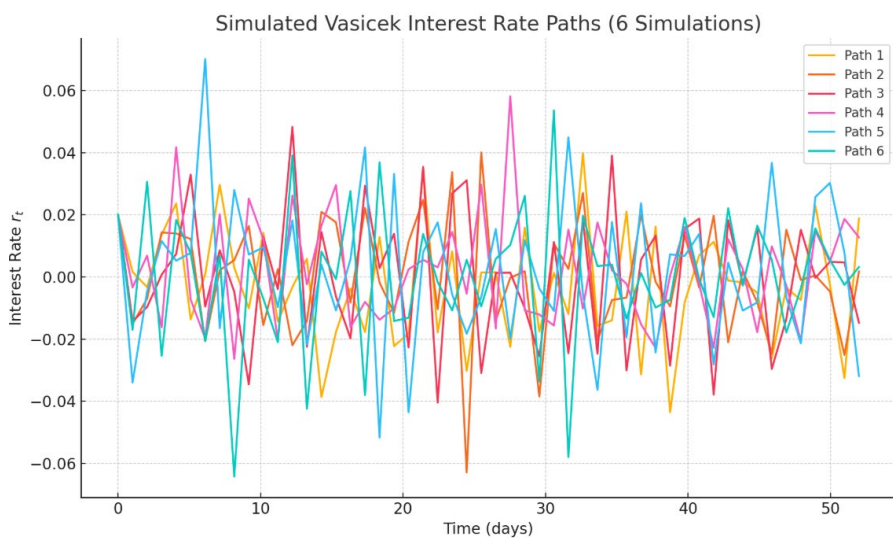
σ ค่าความผันผวน r_0 อัตราดอกเบี้ยเริ่มต้น T เวลาจำลองทั้งหมด

(วัน) Δt ขนาดช่วงเวลา N จำนวนเส้นทางที่ต้องการจำลอง

4.2) เตรียมอาร์เรย์เก็บค่าการจำลอง: สร้างเมทริกซ์ขนาด $N \times \text{steps}$ เพื่อเก็บค่าของ r_t สำหรับทุกเส้นทางและทุกช่วงเวลา

4.3) วาดรูปจำลองแต่ละเส้นทางโดยใช้สูตรของ Vasicek

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t \text{ โดย } Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$



รูปที่ 7.1 การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Vasicek

จากกราฟแสดงการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ยภายใต้แบบจำลอง Vasicek เป็นระยะเวลา 52 วัน โดยแต่ละเส้นทางแสดงความเป็นไปได้ของอัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลมาจากความแปรปรวนที่ถูกควบคุมโดยพารามิเตอร์ σ เส้นแต่ละสีแทนเส้นทางจำลองของ r_t โดยมีลักษณะ mean-reverting คือมีแนวโน้มกลับเข้าใกล้ค่าศูนย์ตามพารามิเตอร์ $b = 0$ □

หมายเหตุ โค้ด Python สำหรับจำลอง 6 เส้นทาง ตามตัวอย่างที่ 7.7

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

# === Parameters ===
a = 1.3894    # mean reversion speed
b = 0.0000    # long-term mean
sigma = 0.0190 # volatility
r0 = 0.02     # initial rate
T = 52        # total time (days)
dt = 1        # time step
n_steps = int(T / dt)
n_paths = 6   # number of paths to simulate

# === Time grid and result matrix ===
time = np.linspace(0, T, n_steps)
rates = np.zeros((n_paths, n_steps))
rates[:, 0] = r0 # set initial value for all paths

# === Simulate each path ===
np.random.seed(42)
for i in range(n_paths):
    for t in range(1, n_steps):
        Z = np.random.randn()
        dr = a * (b - rates[i, t-1]) * dt + sigma * np.sqrt(dt) * Z
        rates[i, t] = rates[i, t-1] + dr

# === Plot results ===
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(n_paths):
    plt.plot(time, rates[i], label=f'Path {i+1}')
plt.title("Multiple Simulations of Vasicek Interest Rate Process")
plt.xlabel("Time (days)")
plt.ylabel("Interest Rate $r_t$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.legend()
plt.show()

```

อย่างไรก็ตาม ในการนำแบบจำลอง Vasicek ตามรูปสมการ (7.2) ในการอธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยและอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ซึ่งค่าของอัตราดอกเบี้ยมีค่าเป็นบวกเสมอ พบว่ามีค่าสูงความผันผวน ในปี ค.ศ. 1985 จอห์นซีค็อกซ์ , โจนาธานอีอิงเงอร์โซลล์ และสตีเฟนเฮอร์สส์ (John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll and Stephen A. Ross) ได้ปรับปรุงสมการของแบบจำลอง Vasicek ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นเพื่อแก้จุดด้อยที่เกิดขึ้นซึ่งทำให้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นมีค่าติดลบ ซึ่งเรียกชื่อว่า แบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross หรือแบบจำลอง CIR ดังสมการที่ (7.3)

7.2.2 แบบจำลอง CIR

แบบจำลอง CIR คือแบบจำลอง (7.1) ในกรณีที่ $\beta = 0.5$ เป็นแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นเพื่อลดความผันผวนที่สูงจากแบบจำลอง Vasicek โดยแบบจำลอง CIR อธิบายในรูปสมการดังนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (7.3)$$

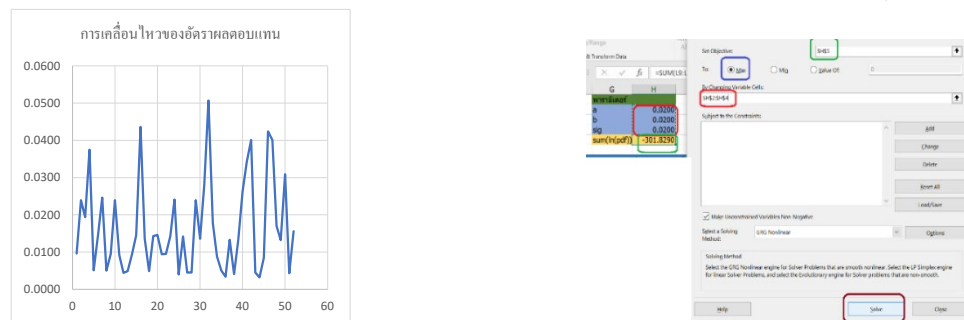
โดยที่ $2ab > \sigma^2$ ซึ่งจะทำให้อัตราดอกเบี้ย r_t มีค่าเป็นบวกเสมอ สำหรับแบบจำลองนี้

ตัวอย่างที่ 7.2 สมมติอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของหุ้นกู้ aaa เป็นไปตามตารางที่ 7.2 สามารถสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0.5$ ตามสมการ (7.1), $dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$

วิธีทำ จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น (โดยสุ่ม) $a = a_0$, $b = b_0$, $\sigma = \sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $a = b = \sigma = 0.02$)

ตารางที่ 7.2 (สมมติ) อัตราการดอกเบี้ยรายวัน ย้อนหลัง 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นกู้ aaa



พารามิเตอร์						
a	0.6572					
b	0.0166					
sig	0.1003					
sum(ln(pdf))	157.0656					
วันเดือนปี	r	dr	a(b-r)	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
Jan 04, 2022	0.0096					
Jan 05, 2022	0.0239	0.0143	0.0046	0.0097	24.9473	3.2168
Jan 06, 2022	0.0194	-0.0045	-0.0048	0.0003	25.7333	3.2478
Jan 07, 2022	0.0375	0.0181	-0.0018	0.0199	10.3089	2.3330
Jan 10, 2022	0.0051	-0.0324	-0.0137	-0.0187	12.9440	2.5606
Jan 11, 2022	0.0146	0.0095	0.0076	0.0019	53.7087	3.9836
Jan 12, 2022	0.0246	0.0100	0.0013	0.0087	25.4698	3.2375
Jan 13, 2022	0.0050	-0.0196	-0.0053	-0.0143	16.7356	2.8175
Jan 14, 2022	0.0095	0.0045	0.0076	-0.0031	51.0601	3.9330
Jan 17, 2022	0.0239	0.0144	0.0047	0.0097	24.8631	3.2134
Jan 18, 2022	0.0092	-0.0147	-0.0048	-0.0099	20.9856	3.0438
Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	0.0049	-0.0097	25.0346	3.2203
Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	0.0080	-0.0075	31.6536	3.4549
Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	0.0077	-0.0032	51.2598	3.9369
Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	0.0047	0.0004	41.0111	3.7138
Jan 25, 2022	0.0436	0.0291	0.0014	0.0277	2.3688	0.8624
Jan 26, 2022	0.0136	-0.0300	-0.0177	-0.0123	16.0549	2.7760
Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	0.0020	-0.0107	22.4936	3.1132
Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	0.0077	0.0017	55.1829	4.0107
Feb 01, 2022	0.0146	0.0003	0.0015	-0.0012	33.1041	3.4997
Feb 02, 2022	0.0094	-0.0052	0.0013	-0.0065	28.4954	3.3497
Feb 03, 2022	0.0095	0.0001	0.0047	-0.0046	36.6325	3.6009
Feb 04, 2022	0.0143	0.0048	0.0047	0.0001	40.8199	3.7092
Feb 07, 2022	0.0241	0.0098	0.0015	0.0083	26.2044	3.2659
Feb 08, 2022	0.0040	-0.0201	-0.0049	-0.0152	15.9379	2.7687
Feb 09, 2022	0.0142	0.0102	0.0083	0.0019	60.1027	4.0961
Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	0.0016	-0.0113	21.3848	3.0627
Feb 11, 2022	0.0045	0.0000	0.0080	-0.0080	29.4750	3.3835
Feb 14, 2022	0.0239	0.0194	0.0080	0.0114	13.9412	2.6348
Feb 15, 2022	0.0136	-0.0103	-0.0048	-0.0055	24.1655	3.1849
Feb 17, 2022	0.0281	0.0145	0.0020	0.0125	19.2206	2.9560
Feb 18, 2022	0.0507	0.0226	-0.0076	0.0302	4.7459	1.5573
Feb 21, 2022	0.0178	-0.0329	-0.0224	-0.0105	15.8630	2.7640
Feb 22, 2022	0.0088	-0.0090	-0.0008	-0.0082	24.7005	3.2068
Feb 23, 2022	0.0050	-0.0038	0.0051	-0.0089	27.0312	3.2970
Feb 24, 2022	0.0034	-0.0016	0.0076	-0.0092	24.1314	3.1835
Feb 25, 2022	0.0133	0.0099	0.0087	0.0012	66.7626	4.2011
Feb 28, 2022	0.0041	-0.0092	0.0022	-0.0114	21.2746	3.0575
Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	0.0082	0.0009	61.5566	4.1200
Mar 01, 2022	0.0263	0.0131	0.0022	0.0109	22.1998	3.1001
Mar 02, 2022	0.0342	0.0079	-0.0064	0.0143	16.6901	2.8148
Mar 03, 2022	0.0401	0.0059	-0.0116	0.0175	13.8065	2.6251
Mar 04, 2022	0.0045	-0.0356	-0.0154	-0.0202	12.0044	2.4853
Mar 07, 2022	0.0032	-0.0013	0.0080	-0.0093	23.0180	3.1363
Mar 08, 2022	0.0085	0.0053	0.0088	-0.0035	58.0895	4.0620
Mar 09, 2022	0.0424	0.0339	0.0053	0.0286	0.3631	-1.0131
Mar 10, 2022	0.0401	-0.0023	-0.0170	0.0147	15.0201	2.7094
Mar 11, 2022	0.0170	-0.0231	-0.0154	-0.0077	18.4766	2.9165
Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	-0.0003	-0.0035	29.4196	3.3817
Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	0.0022	0.0155	14.0657	2.6437
Mar 16, 2022	0.0043	-0.0266	-0.0094	-0.0172	14.0574	2.6431
Mar 17, 2022	0.0156	0.0113	0.0081	0.0032	53.8438	3.9861

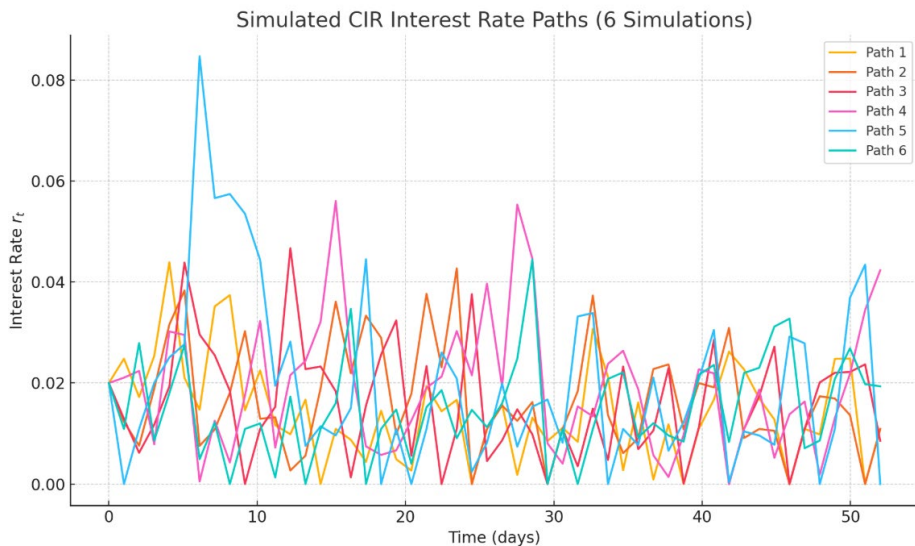
ขั้นที่ 2) สร้างคอลัมน์ $dr \approx \Delta r = r_{t+1} - r_t$, $a(b-r_t)$, $x \equiv a(r_t - b) - dr$,

$pdf \equiv \text{NORMDIST}(x, 0, \sigma_0 \sqrt{r_t}, \text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.2

ขั้นที่ 3) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, σ โดยใช้ excel solver คำนวณปัญหาค่าสูงสุด โดย $\text{sum}(\ln(pdf))$ เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ a, b, σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้วผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ a, b และ σ ที่ได้จากข้อมูล ดังนั้นแบบจำลอง Vasicek ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa คือ

$$dr_t = 0.6572(0.0166 - r_t)dt + 0.1003\sqrt{r_t}dW_t$$

ขั้นที่ 4) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยเพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง



รูปที่ 7.2 การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Vasicek

กราฟนี้แสดงผลการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ย ตามแบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross (CIR) ตามพารามิเตอร์ ความเร็วในการคืนกลับสู่ค่าเฉลี่ย $a = 0.6572$, $b = 0.0166$ ค่าเฉลี่ยระยะยาว, ค่าความผันผวน $\sigma = 0.1003$ และค่าเริ่มต้นของอัตราดอกเบี้ย $r_0 = 0.02$ จากกราฟการจำลองจะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ยจะไม่เป็นลบ (เพราะใช้ $\sqrt{r_t}$ ในเทอมของการสุ่ม) โดยแต่ละเส้นทางเส้นทางจะมีความผันผวนขึ้นกับค่าของ r_t ในแต่ละช่วงเวลา □

7.3 แบบจำลอง Ho-Lee

จากสมการ (7.1) เนื่องจากในการคาดการณ์ตลาดที่เกี่ยวกับอัตราดอกเบี้ยในอนาคตมีความเกี่ยวข้องกับเวลา จึงได้มีการเพิ่มพารามิเตอร์ $\theta(t)$ ซึ่งถูกกำหนดบนตัวแปรที่มีแนวโน้มวกกลับมายังอัตราดอกเบี้ยระยะยาว b และพิจารณาพารามิเตอร์ a และ σ ขึ้นอยู่กับเวลา t ด้วย ดังนั้นสมการ (7.1) จึงมีความทั่วไปมากขึ้น ซึ่งอธิบายได้สมการต่อไปนี้

$$dr_t = [\theta(t) + a(t)(b - r_t)]dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t \quad (7.4)$$

จากสมการที่ (7.4) กรณีที่ $a(t) \neq 0$ จะได้ว่า

$$dr_t = a(t)[\theta(t)/a(t) + b - r_t]dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t$$

7.3.1 แบบจำลอง Ho-Lee

แบบจำลอง Ho-Lee คือแบบจำลองตามสมการ (7.4) ในกรณี $\beta = 0$, $a(t) = 0$ โดยการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r อธิบายได้ด้วยสมการสโตแคสติก ดังนี้

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad (7.5)$$

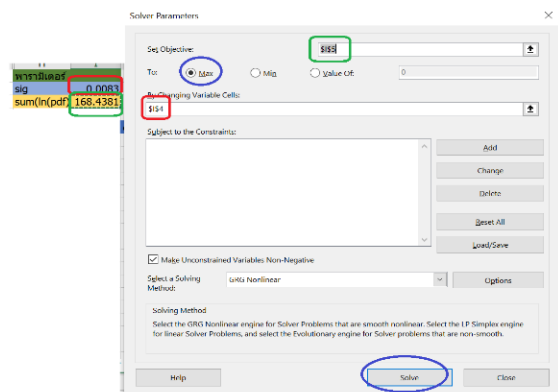
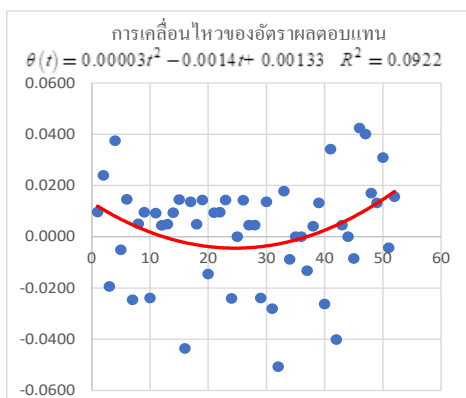
จากสมการ (7.5) ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชัน $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถเลือกให้เหมาะสมซึ่งทำให้ตัวแปรเชิงสุ่ม r มีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 อย่างไรก็ตามแบบจำลองนี้มีข้อด้อย คือ ไม่สามารถปรับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r ให้เข้าสู่อัตราดอกเบี้ยระยะยาวได้

ตัวอย่างที่ 7.3 สมมติอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของหุ้นกู้ aaa เป็นไปตามตารางที่ 7.2 สามารถสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0$, $a(t) = 0$ และ $\sigma(t) = \sigma$ ตามสมการ (7.5), $dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$ จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น (โดยสุ่ม) $\sigma = \sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $\sigma = 0.02$)

ขั้นที่ 2) กำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$ ในที่นี้ใช้คำสั่งการหา format trendline ใน excel โดยจากการพิจารณาลักษณะแนวโน้มของข้อมูลเลือก format trendline โดยเลือกเส้นแนวโน้มจากค่า R^2 (r-square) ที่มีค่าสูงสุด โดยในที่นี้เลือกเป็น เส้นแนวโน้มพหุนามกำลัง 2 ในรูป $\theta(t) = 0.00003t^2 - 0.0014t + 0.00133$ สำหรับ $t = (0, 51]$ (วัน) ซึ่งมี $R^2 = 0.0922$ จะเห็นว่าค่า R^2 ค่อนข้างต่ำ อย่างไรก็ตามก็สูงกว่าเส้นแนวโน้มเส้นตรง และ logarithmic ในที่นี้เพียงยกตัวอย่างเป็นแนวทาง ผู้อ่านสามารถใช้แนวทางอื่นในการกำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$

ตารางที่ 7.3 (สมมติ) อัตราการดอกเบี้ยรายวัน ย้อนหลัง 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นกู้ aaa



		พารามิเตอร์					
		sig	0.0325				
		sum(ln(pdf))	102.4571				
วันที่ t	วันเดือนปี	r	dr	$\theta(t)$	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
0	Jan 04, 2022	0.0096					
1	Jan 05, 2022	0.0239	0.0143	0.0119	0.0024	12.2594	2.5063
2	Jan 06, 2022	-0.0194	-0.0433	0.0106	-0.0539	3.0922	1.1289
3	Jan 07, 2022	0.0375	0.0569	0.0094	0.0475	4.2064	1.4366
4	Jan 10, 2022	-0.0051	-0.0426	0.0082	-0.0508	3.6144	1.2849
5	Jan 11, 2022	0.0146	0.0197	0.0071	0.0127	11.3930	2.4330
6	Jan 12, 2022	-0.0246	-0.0392	0.0060	-0.0452	4.6647	1.5400
7	Jan 13, 2022	0.0050	0.0296	0.0050	0.0246	9.2165	2.2210
8	Jan 14, 2022	0.0095	0.0045	0.0040	0.0005	12.2908	2.5089
9	Jan 17, 2022	-0.0239	-0.0334	0.0031	-0.0365	6.5242	1.8755
10	Jan 18, 2022	0.0092	0.0331	0.0023	0.0308	7.8354	2.0587
11	Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	0.0015	-0.0063	12.0606	2.4899
12	Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	0.0008	-0.0003	12.2916	2.5089
13	Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	0.0002	0.0043	12.1833	2.5001
14	Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	-0.0004	0.0055	12.1157	2.4945
15	Jan 25, 2022	-0.0436	-0.0581	-0.0010	-0.0572	2.6080	0.9586
16	Jan 26, 2022	0.0136	0.0572	-0.0014	0.0586	2.4056	0.8778
17	Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	-0.0018	-0.0069	12.0198	2.4866
18	Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	-0.0022	0.0116	11.5341	2.4453
19	Feb 01, 2022	-0.0146	-0.0289	-0.0025	-0.0264	8.8231	2.1774
20	Feb 02, 2022	0.0094	0.0240	-0.0027	0.0267	8.7632	2.1706
21	Feb 03, 2022	0.0095	0.0001	-0.0029	0.0030	12.2408	2.5048
22	Feb 04, 2022	0.0143	0.0048	-0.0030	0.0078	11.9440	2.4802
23	Feb 07, 2022	-0.0241	-0.0384	-0.0030	-0.0354	6.7877	1.9151
24	Feb 08, 2022	0.0000	0.0241	-0.0030	0.0271	8.6697	2.1598
25	Feb 09, 2022	0.0142	0.0142	-0.0029	0.0172	10.6904	2.3693
26	Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	-0.0028	-0.0069	12.0191	2.4865
27	Feb 11, 2022	0.0045	0.0000	-0.0026	0.0026	12.2519	2.5057
28	Feb 14, 2022	-0.0239	-0.0284	-0.0024	-0.0260	8.9136	2.1876
29	Feb 15, 2022	0.0136	0.0375	-0.0021	0.0396	5.8457	1.7657
30	Feb 17, 2022	-0.0281	-0.0417	-0.0017	-0.0400	5.7515	1.7495
31	Feb 18, 2022	-0.0507	-0.0226	-0.0013	-0.0213	9.9046	2.2930
32	Feb 21, 2022	0.0178	0.0685	-0.0008	0.0693	1.2594	0.2306
33	Feb 22, 2022	-0.0088	-0.0266	-0.0002	-0.0264	8.8364	2.1789
34	Feb 23, 2022	0.0000	0.0088	0.0004	0.0084	11.8854	2.4753
35	Feb 24, 2022	0.0000	0.0000	0.0011	-0.0011	12.2857	2.5084
36	Feb 25, 2022	-0.0133	-0.0133	0.0018	-0.0151	11.0344	2.4010
37	Feb 28, 2022	0.0041	0.0174	0.0026	0.0148	11.0736	2.4046
38	Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	0.0034	0.0057	12.1054	2.4936
39	Mar 01, 2022	-0.0263	-0.0395	0.0043	-0.0438	4.9385	1.5971
40	Mar 02, 2022	0.0342	0.0605	0.0053	0.0552	2.8938	1.0626
41	Mar 03, 2022	-0.0401	-0.0743	0.0063	-0.0806	0.5615	-0.5771
42	Mar 04, 2022	0.0045	0.0446	0.0074	0.0372	6.3775	1.8528
43	Mar 07, 2022	0.0000	-0.0045	0.0086	-0.0131	11.3348	2.4279
44	Mar 08, 2022	-0.0085	-0.0085	0.0098	-0.0183	10.4892	2.3503
45	Mar 09, 2022	0.0424	0.0509	0.0111	0.0399	5.7843	1.7551
46	Mar 10, 2022	0.0401	-0.0023	0.0124	-0.0147	11.0969	2.4067
47	Mar 11, 2022	0.0170	-0.0231	0.0138	-0.0369	6.4474	1.8637
48	Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	0.0152	-0.0190	10.3526	2.3372
49	Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	0.0167	0.0010	12.2867	2.5085
50	Mar 16, 2022	-0.0043	-0.0352	0.0183	-0.0535	3.1591	1.1503
51	Mar 17, 2022	0.0156	0.0199	0.0199	0.0000	12.2922	2.5090

ขั้นที่ 3) สร้างคอลัมน์ $dr = \Delta r = r_{t+1} - r_t$, $\theta(t)$,

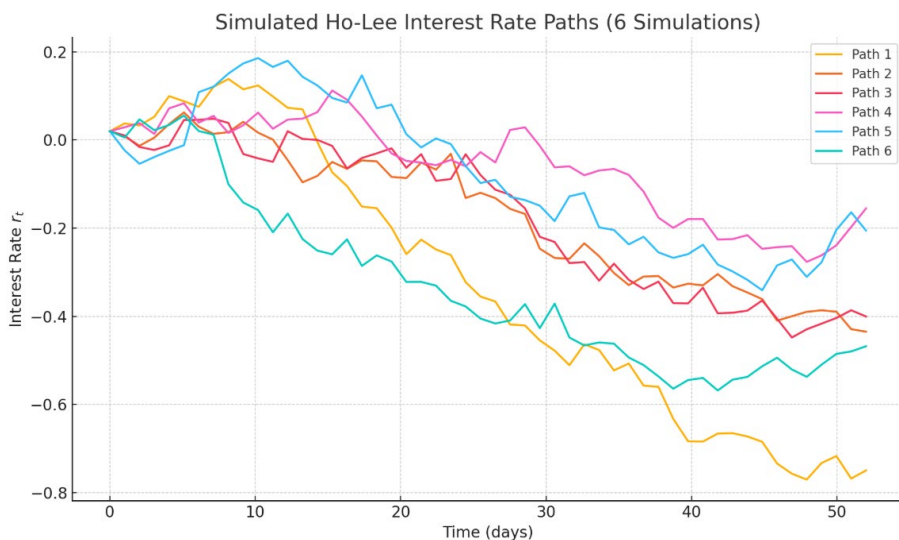
$x \equiv dr - \theta(t)$, $pdf \equiv \text{NORMDIST}(x, 0, \sigma_0, \text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.3

ขั้นที่ 4) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ โดยใช้ excel solver คำนวณปัญหาค่าสูงสุด โดย $\sum(\ln(pdf))$ เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้วผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ σ ที่ได้จากข้อมูล ดังนั้น แบบจำลอง Ho-Lee ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa คือ

$$dr_t = (0.00003t^2 - 0.0014t + 0.00133)dt + 0.0325dW_t \text{ สำหรับ } t = (0, 51] \text{ (วัน)}$$

ในตัวอย่างนี้แสดงการหาแบบจำลอง Ho-Lee โดยประยุกต์ใช้ format trendline ในโปรแกรม excel ในการกำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$ จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยในอดีต

ขั้นที่ 5) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยเพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง



รูปที่ 7.3 การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Ho-Lee

กราฟนี้แสดงผลการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ยรายวัน ตามแบบจำลอง Ho-Lee ในช่วงเวลา 52 วัน โดยใช้พารามิเตอร์และฟังก์ชัน $\theta(t)$ จากตัวอย่างที่ 7.9

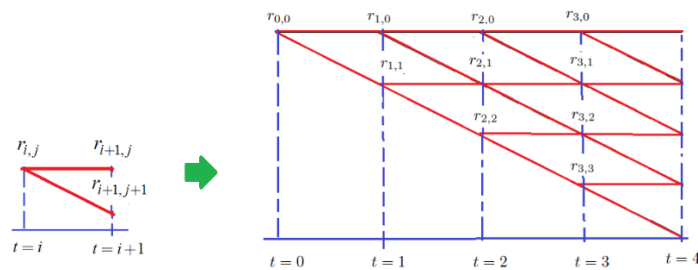
$$\theta(t) = 0.00003t^2 - 0.0014t + 0.00133, \sigma = 0.0325, r_0 = 0.02$$

โดยจากกราฟการจำลองของตัวแบบ Ho-Lee จะเห็นว่า ไม่จำกัดค่า r_t ให้อยู่เหนือศูนย์ คือ r_t สามารถติดลบได้ การเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยสะท้อนแนวโน้มของตลาดผ่านฟังก์ชัน $\theta(t)$ แบบกำลังสองที่ได้จากข้อมูลจริง ซึ่งเหมาะกับการใช้งานในตลาดที่ต้องการ “ความยืดหยุ่นในการกำหนดแนวโน้ม” □

7.3.2 แบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค (binomial-lattice models) ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นซึ่งสามารถพิจารณาเป็นการประมาณค่าของแบบจำลองเวลาต่อเนื่องของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (continuous-time one factor short-rate model) โดยแบบจำลองโครงสร้างต้นไม้ทวิภาคโดยทั่วไปนิยมใช้ในการกำหนดราคาคอพันธบัตรของอัตราดอกเบี้ยซึ่งมีการซื้อขายในตลาดการเงิน

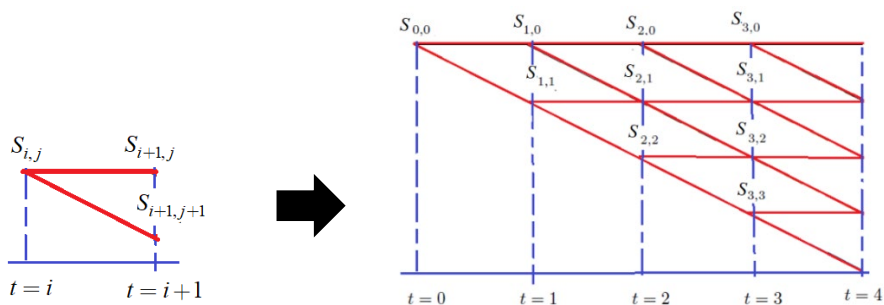
กำหนดให้ $N(i, j)$ แทนโหนดระยะเวลาที่ $t = i$ สภาวะที่ j , $r_{i,j}$ แทนอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t = i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i, i+1]$



รูปที่ 7.4 โครงสร้างตาข่ายของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

โดยการประยุกต์ใช้มาร์ติงเกลสำหรับการกำหนดราคาสินทรัพย์ ให้ $S_{i,j}$ แทนราคาของสินทรัพย์ที่เวลา $t = i$ สภาวะที่ j

$$S_{i,j} = (1 + r_{i,j})^{-1} (pS_{i+1,j+1} + (1-p)S_{i+1,j}) \quad (7.6)$$



รูปที่ 7.5 โครงสร้างตาข่ายของราคาสินทรัพย์

แบบจำลอง Ho-Lee เวลาต่อเนื่อง : $dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t$

แบบจำลอง Ho-Lee เวลาไม่ต่อเนื่อง : $\Delta r = \theta(t)\Delta t + \varepsilon(0, \sigma^2(t)\Delta t)$

ให้ $r_{i,j}$ แทนอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t=i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i, i+1]$

นิยาม $R_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดย

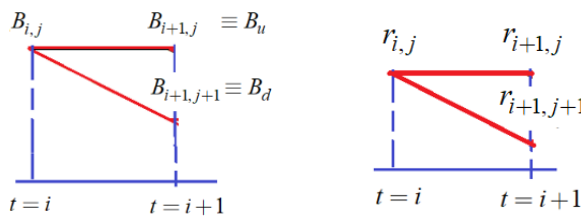
$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases}, (\because \Delta t = 1) \quad (7.7)$$

เป็นการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยจากโหนด (i, j) ตามรูปที่ 7.3

จากสมการ (7.7) จะได้ว่า

$$\theta_i = \frac{r_{i+1,j} + r_{i+1,j+1} - 2r_{i,j}}{2} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = \frac{r_{i+1,j} - r_{i+1,j+1}}{2}$$

กำหนดให้ $B_{i,j}$ เป็นราคาตราสารหนี้ที่เวลาที่ i ($t=i$) สภาวะที่ j โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับ C บาท ที่เวลาที่ N ($t=N$) สำหรับทุก ๆ สภาวะ j , $j=0,1,\dots,N$ ในโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลาของตราสารหนี้



รูปที่ 7.6 โครงร่างตาข่ายแสดงการเคลื่อนไหวของราคาตราสารหนี้และอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

กำหนดให้ y_k (ต่อปี) เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) อายุไถ่ถอน (year to maturity) ที่ปี k , $k=1,\dots,N$ และกำหนดให้ B_0^k เป็นราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง มีราคาไถ่ถอนเท่ากับ 1 บาทที่อายุไถ่ถอน (year to maturity) k โดยใช้สมการมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดสามารถคำนวณอัตราดอกเบี้ย y_k ได้ดังนี้

$$B_0^k = \frac{C}{(1+y_k)^k} \Rightarrow y_k = \sqrt[k]{\frac{C}{B_0^k}} - 1, \quad k=1,\dots,N$$

สมมติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาของตราสารหนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้น $p=0.5$ สามารถเขียนโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค ได้ดังนี้

โครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

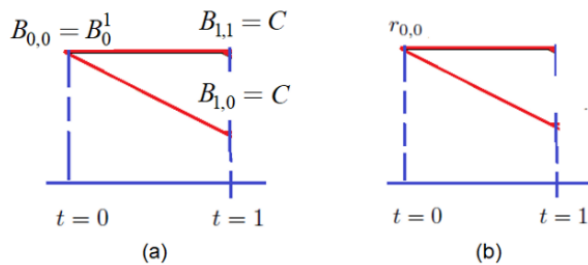
$$B_{0,0} = B_0^1 = C(1+y_1)^{-1}, \quad B_{1,0} = B_{1,1} = C$$

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) แก้สมการ จากขั้นที่ 2) เพื่อหา $r_{0,0}$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0} = y_1$ ในโครงสร้างตาข่าย 0 คาบเวลา



รูปที่ 7.7 (a) โครงสร้างตาข่ายราคา 1 คาบเวลา (b) โครงสร้างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 0 คาบเวลา

โครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

$$B_{0,0} = B_0^2 = C(1+y_2)^{-2}, \quad B_{2,0} = B_{2,1} = B_{2,2} = C$$

กำหนด $r_{0,0} = y_1$ จากโครงสร้างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 0 คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา

$$B_{1,0} = 0.5(1+r_{1,0})^{-1}(B_{2,0} + B_{2,1})$$

$$B_{1,1} = 0.5(1+r_{1,1})^{-1}(B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

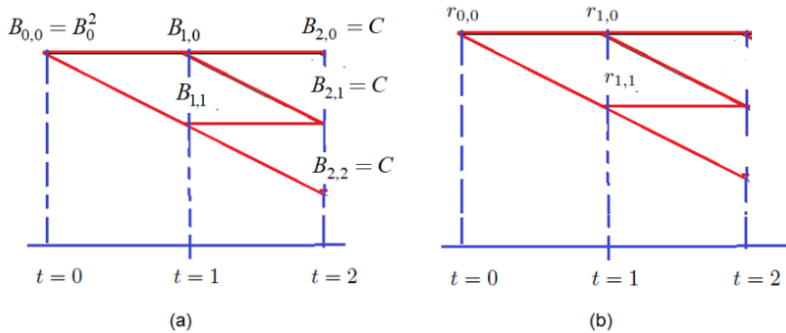
$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i \equiv r_u & ; \text{prob} = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i \equiv r_d & ; \text{prob} = 0.5 \end{cases}$$

จะได้ $r_{1,0} = r_{0,0} + \theta_0 + \sigma_0$ และ $r_{1,1} = r_{0,0} + \theta_0 - \sigma_0$

จะเห็นว่าค่าของ $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ σ_0 และ θ_0 เท่านั้น ดังนั้นหากเราทราบค่า σ_0 และ θ_0 ก็จะทำให้เราทราบค่าของ $r_{1,0}$, $r_{1,1}$

ขั้นที่ 4) แก่ระบบสมการตามขั้นที่ 1), 2) และ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_0 และ ค่า θ_0
แทนค่ากลับในสมการ ขั้นที่ 3)

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ ในโครงร่างตาข่าย 1 คาบเวลา



รูปที่ 7.8 (a) โครงร่างตาข่ายราคา 2 คาบเวลา (b) โครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 1 คาบเวลา

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

$$B_{0,0} = B_0^3 = C(1+y_3)^{-3}, \quad B_{3,0} = B_{3,1} = B_{3,2} = B_{3,3} = C,$$

กำหนด $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 1 คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

$$B_{2,0} = 0.5(1+r_{2,0})^{-1}(B_{3,0} + B_{3,1})$$

$$B_{2,1} = 0.5(1+r_{2,1})^{-1}(B_{3,1} + B_{3,2})$$

$$B_{2,2} = 0.5(1+r_{2,2})^{-1}(B_{3,2} + B_{3,3})$$

$$B_{1,0} = 0.5(1+r_{1,0})^{-1}(B_{2,0} + B_{2,1})$$

$$B_{1,1} = 0.5(1+r_{1,1})^{-1}(B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

$$r_{2,0} = r_{1,0} + \theta_1 + \sigma_1$$

$$r_{2,1} = r_{1,0} + \theta_1 - \sigma_1 \quad \text{หรือ} \quad r_{2,1} = r_{1,1} + \theta_1 + \sigma_1$$

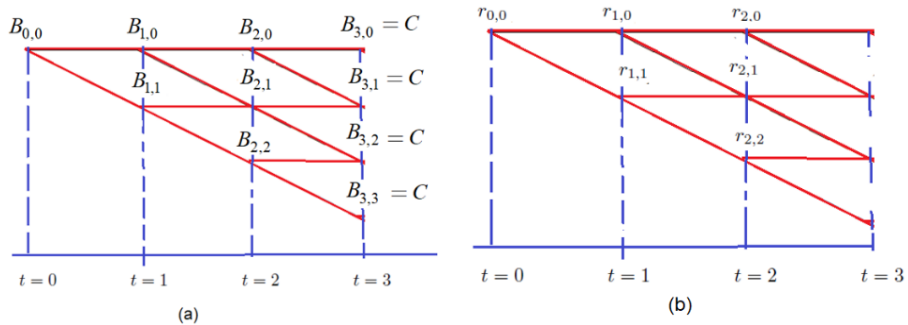
$$r_{2,2} = r_{1,1} + \theta_1 - \sigma_1$$

ขั้นที่ 4) แก่ระบบสมการตามขั้นที่ 1) ,2) และ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_1 และ ค่า θ_1

แทนค่ากลับในสมการ ขั้นที่ 3)

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$, $r_{2,0}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$ ในโครงร่างตาข่าย 2

คาบเวลา



รูปที่ 7.9 (a) โครงร่างตาข่ายราคา 3 คาบเวลา (b) โครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 2 คาบเวลา

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

$$B_{0,0} = B_0^N = C(1+y_N)^{-N} \quad , \quad B_{N,j} = C, \quad j = 0,1,...,N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$

คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1}(B_{N,0} + B_{N,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

$$r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i$$

$$r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i$$

ขั้นที่ 4) แก้มการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหา เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนดอายุไถ่ถอน ละอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอน เท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตรา สารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

อายุไถ่ถอน k	ราคาไถ่ถอน C	อัตราดอกเบี้ย y_k	ราคาปัจจุบัน B_0^k
1	1000	0.0900	917.40
2	1000	0.0950	834.00
3	1000	0.1000	751.30
4	1000	0.1050	670.70
5	1000	0.1100	593.50

วิธีทำ จากราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง $B_0^k = \frac{C}{(1+y_k)^k}$

$$\text{จะได้ } B_0^1 = \frac{1000}{(1+0.0900)^1} = 917.40, \quad B_0^2 = \frac{1000}{(1+0.0950)^2} = 834.00,$$

$$B_0^3 = \frac{1000}{(1+0.1000)^3} = 751.30,$$

$$B_0^4 = \frac{1000}{(1+0.1050)^4} = 670.70 \text{ และ } B_0^5 = \frac{1000}{(1+0.1100)^4} = 593.50 \text{ ผลลัพธ์ใส่ไว้ในคอลัมน์}$$

สุดท้ายของตารางด้านบน ต่อไปเป็นการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N = 1, 2, 3, 4, 5$ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ สำหรับแต่ละ $N = 1, \dots, 5$

$$B_{0,0} = B_0^N = 1,000(1+y_N)^{-N}, \quad B_{N,j} = 1000, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \dots, N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สำหรับแต่ละ $N = 1, \dots, 5$ สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1}(B_{N,0} + B_{N,1})$$

ตารางที่ 7.4 ผลลัพธ์โครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

B(0,j)	B(1,j)				
917.40	1000				
	1000				
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)			
834.00	734.02	1000			
	1084.17	1000			
		1000			
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)		
751.30	608.71	777.31	1000		
	1029.18	881.26	1000		
		1017.31	1000		
			1000		
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	
670.70	498.31	594.66	720.77	1000	
	963.86	763.12	809.28	1000	
		1014.95	922.59	1000	
			1072.78	1000	
				1000	
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	B(5,j)
593.50	402.74	447.73	510.10	669.83	1000
	891.14	649.62	641.91	745.62	1000
		994.30	832.38	840.74	1000
			1122.39	963.70	1000
				1128.78	1000
					1000

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

$$r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i$$

$$r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i$$

ขั้นที่ 4) แก่สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j = 0,1,...,N-1$ ในโครงสร้างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

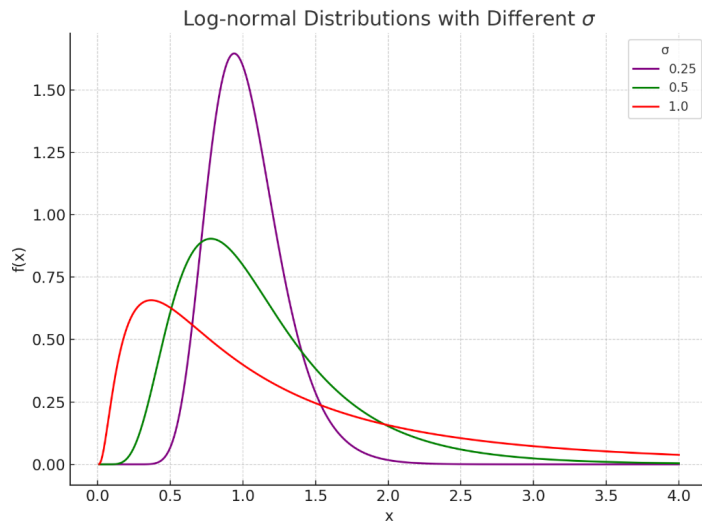
ในที่นี้แก้ระบบสมการโดยใช้ excel solver ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตารางที่ 7.4 และตารางที่ 7.5

[illegible]

แบบจำลอง Black-Derman-Toy หรือ แบบจำลอง BDT เป็นแบบจำลองที่อธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยโดยพิจารณาภายใต้สมมติฐานว่าตัวแปรเชิงสุ่ม r มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล (log-normal distribution) โครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยตามตัวแบบ BDT สามารถอธิบายได้ด้วยสมการดังนี้

มีลักษณะการพิจารณาค่ายสมการที่ (7.5) โดยพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $\ln r$ เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติ และกำหนดให้ค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean reversion) เท่ากับ $-\sigma'(t)/\sigma(t)$ เนื่องจาก

$a(t)$ และ $\sigma(t)$ จะมีค่ามากกว่า 0 จะได้ว่า $\sigma'(t) < 0$ ซึ่งหมายถึง ความแปรผันของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเมื่อเวลาผ่านไปจะมีค่าความผันผวนลดลง



รูปที่ 7.10 ตัวแปรเชิงสุ่ม r เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล

แบบจำลอง Black-Derman-Toy (BDT) เป็นหนึ่งในแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีชื่อเสียงและได้รับความนิยมอย่างมากในทฤษฎีโครงสร้างของอัตราผลตอบแทน (fixed income interest theory) โดยประยุกต์ใช้กับแบบจำลองต้นไม้ทวิภาคที่แต่ละโหนดมีการเปลี่ยนแปลงเท่ากันซึ่งทำให้ง่ายและมีความยืดหยุ่นในการใช้งาน โดยยังให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำ โดยค่าความผันผวนของแบบจำลอง BDT จะขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้นและไม่เกี่ยวกับมูลค่าของอัตราดอกเบี้ย

แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง BDT

$$\text{จากแบบจำลอง BDT} \quad d(\ln r) = [\theta(t) + (\sigma'(t)/\sigma(t)) \ln r] dt + \sigma(t) dw_t$$

เพื่อความสะดวกให้ $z = \ln r$ จะได้

$$\text{แบบจำลอง BDT เวลาต่อเนื่อง : } dz = [\theta(t) + (\sigma'(t)/\sigma(t)) z] dt + \sigma(t) dw_t$$

$$\text{แบบจำลอง BDT เวลาไม่ต่อเนื่อง : } \Delta z = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma} z \right] \Delta t + \varepsilon(0, \sigma^2(t) \Delta t)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่ค่าความผันผวน $\sigma(t) = \sigma$ คงที่ ($\sigma'(t) = 0$) จะได้

แบบจำลอง BDT เวลาต่อเนื่อง : $dz = [\theta(t) + z]dt + \sigma dW_t$

แบบจำลอง BDT เวลาไม่ต่อเนื่อง : $\Delta z = \theta(t)z\Delta t + \varepsilon(0, \sigma^2 \Delta t)$

ให้ $z_{i,j} = \ln r_{i,j}$ แทนลอการิทึมของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t=i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i, i+1]$ นิยาม $Z_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดย

$$Z_{i,j} = \begin{cases} z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] + \sigma_i \equiv z_u & ; prob = 0.5 \\ z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] - \sigma_i \equiv z_d & ; prob = 0.5 \end{cases}, (\because \Delta t = 1) \quad (7.9)$$

และ $R_{i,j} = e^{Z_{i,j}} = \begin{cases} r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}} \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j+1}} \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases}$ เป็นการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยจาก

โหนด (i, j) ตามรูปที่ 7.4 จากสมการ (7.10) จะได้ว่า

$$\theta_i = \frac{z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1} - 2z_{i,j}}{2} - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = \frac{z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}}{2}$$

นั่นคือ $\theta_i = 0.5 \left[\ln \left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i,j}} \right) + \ln \left(\frac{r_{i+1,j+1}}{r_{i,j}} \right) \right] - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \ln r_{i,j}$ และ $\sigma_i = 0.5 \ln \left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}} \right)$

พิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม Y นิยามโดย

$$K_Y(n) = \begin{cases} y_u & ; prob = 0.5 \\ y_d & ; prob = 0.5 \end{cases}$$

เมื่อ $0 < y_d < y_u$ จะได้ว่า $E[\ln K_Y] = 0.5(\ln y_d + \ln y_u) = 0.5 \ln(y_d y_u)$ และ

$$\begin{aligned} \beta_n^2 &= Var(\ln K_Y) = 0.5(\ln y_d - 0.5 \ln y_d y_u)^2 + 0.5(\ln y_u - 0.5 \ln y_d y_u)^2 \\ &= 0.5^3 \left[(2 \ln y_d - \ln y_d y_u)^2 + (2 \ln y_u - \ln y_d y_u)^2 \right] = \left[0.5 \ln \left(\frac{y_u}{y_d} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

นั่นคือ ค่าความผันผวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $\beta_n = 0.5 \ln \left(\frac{y_u}{y_d} \right)$ ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $R_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่ม

นิยามโดย

$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases} \quad (7.11)$$

และให้ σ_i เป็นค่าความผันผวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $\ln R_{i,j}$ จะได้ว่า

$$E[\ln R_{i,j}] = 0.5(\ln r_{i+1,j} + \ln r_{i+1,j+1}) = 0.5 \ln(r_d r_u) \quad (7.12)$$

$$\text{และ} \quad \sigma_i = \sqrt{\text{Var}(\ln R_{i,j})} = 0.5 \ln \left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}} \right) = 0.5 \ln \left(\frac{r_u}{r_d} \right) \quad (7.13)$$

จะเห็นว่า σ_i ในสมการ (7.8) และ สมการ (7.13) มีค่าเท่ากัน

สมมติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาของตราสารหนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้น $p=0.5$ และกำหนดให้ y_k (ต่อปี) เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) อายุไถ่ถอน (year to maturity) ที่ปี k , $k=1, \dots, N$ สามารถเขียนโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง BDT ได้เช่นเดียวกับแบบจำลอง Ho-Lee โดยมีความแตกต่างกันในขั้นที่ 3 ดังนี้

โครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

$$B_{0,0} = B_0^N = C(1+y_N)^{-N}, \quad B_{N,j} = C, \quad j=0,1,\dots,N \quad (7.14)$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i,j=0,1,\dots,N-2$ จากโครงสร้างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงสร้างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1} (B_{N,0} + B_{N,1}) \quad r_{i,j} = e^{z_{i,j}} \quad (7.15)$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ BDT

$$z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] + \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}}$$

$$z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] - \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j+1}}$$

$$\text{หรือ } \theta_i = 0.5 \left[\ln \left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i,j}} \right) + \ln \left(\frac{r_{i+1,j+1}}{r_{i,j}} \right) \right] - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \ln r_{i,j} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = 0.5 \ln \left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}} \right)$$

ขั้นที่ 4) แก้มสมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2}

แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j=0,1,\dots,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j=0,1,\dots,N-1$ ในโครงสร้างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ตัวอย่างที่ 7.5 กำหนดอายุไถ่ถอน และราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1 และ 2 ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค

อายุไถ่ถอน k	ราคาปัจจุบัน B_0^k	ราคาไถ่ถอน C	อัตราดอกเบี้ย y_k
1	917.40	1000	0.0900
2	834.00	1000	0.0950
3	751.30	1000	0.1000
4	670.70	1000	0.1050
5	593.50	1000	0.1100

วิธีทำ จาก (7.8) ได้

$$y_1 = \frac{1000}{917.40} - 1 = 0.0900, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1000}{834.00}} - 1 = 0.0950$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{1000}{751.30}} - 1 = 0.1000, \quad y_4 = \sqrt[4]{\frac{1000}{670.70}} - 1 = 0.1050$$

$$y_5 = \sqrt[5]{\frac{1000}{593.50}} - 1 = 0.1100$$

อัตราดอกเบี้ย $y_k, k=1, \dots, 5$ ที่คำนวณแสดงในคอลัมน์สุดท้ายในตารางด้านบน

ต่อไปเป็นการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยโครงข่ายตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1, 2, 3, 4, 5$ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ สำหรับแต่ละ $N=1, \dots, 5$

$$B_{0,0} = B_0^N = 1,000(1+y_N)^{-N}, \quad B_{N,j} = 1000, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

กำหนด $r_{i,j}, i, j = 0, 1, \dots, N-2$ จากโครงข่ายตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สำหรับแต่ละ $N=1, \dots, 5$ สร้างสมการจากโครงข่ายตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N

คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1}(B_{N,0} + B_{N,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ BDT

$$z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] + \sigma_i \Rightarrow r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}}$$

$$z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \right] - \sigma_i \Rightarrow r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j+1}}$$

ขั้นที่ 4) แก้มการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0,1,...,N-1$
 ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j = 0,1,...,N-1$ ในโครงสร้างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา
 ในขั้นนี้แก้ระบบสมการโดยใช้ excel solver ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตารางที่ 7.6 และตารางที่ 7.7

ตารางที่ 7.6 ผลลัพธ์โครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

B(0,j)	B(1,j)				
917.40	1000				
	1000				
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)			
834.00	862.41	1000			
	955.78	1000			
		1000			
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)		
751.30	730.77	772.76	1000		
	907.12	921.97	1000		
		976.22	1000		
			1000		
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	
670.70	609.73	577.89	636.71	1000	
	852.44	836.14	858.94	1000	
		947.64	954.87	1000	
			986.58	1000	
				1000	
B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	B(5,j)
593.50	512.28	446.99	435.51	587.33	1000
	781.60	741.02	721.37	780.67	1000
		894.50	886.12	899.00	1000
			946.47	957.01	1000
				961.68	1000
					1000

[illegible]

ในโลกการเงินสมัยใหม่ การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยมีผลกระทบโดยตรงต่อการกำหนดราคาสินทรัพย์ การบริหารพอร์ตการลงทุน และการควบคุมความเสี่ยงเชิงระบบและเชิงกลยุทธ์ การทำความเข้าใจแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจึงเป็นเครื่องมือสำคัญในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะเมื่อใช้วิเคราะห์การเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยที่มีลักษณะสุ่มและไม่เป็นเชิงเส้น ในบทนี้ได้อธิบายแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นซึ่งครอบคลุมทั้งแบบจำลองแบบดั้งเดิม เช่น แบบจำลอง Vasicek (ค.ศ.1977), CIR (ค.ศ.1985) ตลอดจนแบบจำลองที่พัฒนาต่อมา เช่น Ho-Lee (ค.ศ.1986) และ Black-Derman-Toy (ค.ศ.1990) ซึ่งมีความยืดหยุ่นและสามารถสะท้อนความผัน

ผวนของตลาดได้อย่างแม่นยำ แบบจำลองเหล่านี้สามารถอธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ย ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย และความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จุดเด่นและข้อจำกัดของแต่ละแบบจำลองได้รับการวิเคราะห์เปรียบเทียบเพื่อใช้เลือกให้เหมาะสมกับบริบทของการใช้งาน

ในเชิงการประยุกต์ใช้งานจริง แบบจำลองเหล่านี้มีบทบาทสำคัญ เช่น

- การกำหนดราคา **ตราสารหนี้ที่มีสิทธิไถ่ถอนล่วงหน้า (callable bonds)** ด้วยแบบจำลอง BDT หรือ Ho-Lee เพื่อสะท้อนโครงสร้างอัตราผลตอบแทน
- การประเมินมูลค่า **ออปชันบนพันธบัตร (bond options)** และ **สวอปชัน (swaptions)** ด้วยแบบจำลอง CIR ที่สามารถควบคุมความเป็นบวกของอัตราดอกเบี้ย
- การวัดความเสี่ยงของพอร์ตผ่าน **Duration, Convexity, และ Value-at-Risk (VaR)** ภายใต้แบบจำลองที่อิงอัตราดอกเบี้ยแบบสุ่ม

ตัวอย่างเชิงปฏิบัติ เช่น ธนาคารพาณิชย์ที่มีพอร์ตสินเชื่อแบบอัตราลอยตัวสามารถใช้แบบจำลอง CIR เพื่อประเมินผลกระทบจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยต่อรายได้จากดอกเบี้ยสุทธิ (Net Interest Margin) ได้อย่างแม่นยำและตอบโจทย์การกำกับดูแลความเสี่ยงตามแนวทาง Basel III

นอกจากนี้ แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นยังเป็นรากฐานของแบบจำลองขั้นสูง เช่น แบบจำลอง Heath–Jarrow–Morton (HJM) ที่สามารถวิเคราะห์โครงสร้างความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยได้อย่างลึกซึ้ง รวมถึงโมเดลที่ใช้กระบวนการ Jump-Diffusion และ Lévy ซึ่งถูกพัฒนาเพื่อรองรับตลาดที่ไม่สมบูรณ์และไม่เป็นเชิงเส้น เช่น ตลาดที่มี default risk หรือการซื้อขายที่มีข้อจำกัด กล่าวโดยสรุป บทที่ 7 ได้ถ่ายทอดแนวคิด ทฤษฎี และการประยุกต์ใช้แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นอย่างเป็นระบบ ทั้งในมิติของการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและการนำไปใช้งานจริงในตลาดตราสารหนี้และอนุพันธ์ ตอบโจทย์ความซับซ้อนของตลาดการเงินยุคใหม่ และสร้างพื้นฐานที่แข็งแกร่งสำหรับการพัฒนาเครื่องมือทางการเงินที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

- [1] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd ed.). Oxford University Press.
- [2] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [3] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.
- [4] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- [5] Ho, T. S., & Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011–1029.
- [6] Hull, J. C. (2018). *Options, futures, and other derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [7] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- [8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40101-4>
- [9] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1) นำเข้าข้อมูลอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นที่จดทะเบียนในบริษัทหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย พิจารณาอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จงสร้างแบบจำลอง Vasicek กรณีที่ $\beta = 0$ ตามสมการ $dr = a(b-r)dt + \sigma dW_t$ จากอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นดังกล่าว

2) นำเข้าข้อมูลอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นที่จดทะเบียนในบริษัทหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย พิจารณาอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จงสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0.5$ ตามสมการ $dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$ จากอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นดังกล่าว

3) กำหนดอายุไถ่ถอน และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

อายุไถ่ถอน k	ราคาไถ่ถอน C	อัตราดอกเบี้ย y_k
1	1000	0.0500
2	1000	0.0450
3	1000	0.0420
4	1000	0.0470
5	1000	0.0380
6	1000	0.0400
7	1000	0.0032

4) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007512$ (ต่อวัน), $b = 0.00006675$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000449$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 365 วัน โดยสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006003

91.25	0.00005468
182.5	0.00006749
273.75	0.00006770
365	0.00006562
456.25	0.00005232
547.5	0.00006423
638.75	0.00006277
730	0.00006109

5) สมมติตราสารหนี้อายุ 5 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 20 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00006212$ (ต่อวัน), $\phi = 5.24922 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000519$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0035234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

6) นำเข้าข้อมูลอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของพันธบัตรรัฐบาล จงสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0$, $a(t) = 0$ และ $\sigma(t) = \sigma$ ตามสมการ $dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$ จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลังของของพันธบัตรดังกล่าว

7) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 5.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00006402$ (ต่อวัน), $\phi = 8.42524 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000422$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0038234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

8) กำหนดอายุไถ่ถอน และราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1 และ 2 ตามตาราง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยายและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค กำหนด $b = 0.0019999862$

อายุไถ่ถอน k	ราคาปัจจุบัน B_0^k	ราคาไถ่ถอน C
1	900.20	1000
2	844.00	1000
3	761.20	1000
4	680.70	1000
5	623.50	1000
6	560.23	1000
7	521.20	1000

9) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) จงหาราคาตราสารหนี้มีคูปองโดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00005012$ (ต่อวัน), $\phi = 8.26543 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000612$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0035032\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

10) สมมติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ กำหนดราคาใช้สิทธิเท่ากับ 9800 บาท ของอปชันที่ปลายปีที่ 2 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005812$ (ต่อวัน), $b = 0.00006212$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000438$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006883
182.5	0.00005671
365	0.00005430
547.5	0.00006805
730	0.00005976
912.5	0.00005992
1095	0.00006465
1277.5	0.00006436
1460	0.00006577

10.1) จงคำนวณพหุคูณขั้นบันไดสำหรับตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek

10.2) จงใช้สมการความเสมอภาคระหว่างคอลอปชันและพหุคูณขั้น ในการคำนวณค่าของคอลอปชันบันไดตราสารหนี้ไม่มีคูปองดังกล่าว

11) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 6 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005712$ (ต่อวัน), $\phi = 8.42934 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000395$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0042334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน) จงคำนวณราคาพรีเมียมของคอลอปชันบันไดตราสารหนี้ที่มีคูปอง ที่มีเวลาใช้สิทธิตามสัญญาที่ปลายปีที่ 1 (นับจากวันออกตราสาร) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย $r^* = r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนจากการถือครองตราสารหนี้จนครบกำหนดไถ่ถอน

12) สมมติตราสารหนี้อายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.20 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 8 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007112$ (ต่อวัน), $\phi = 8.26641 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000512$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0039314\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

13) อธิบายเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และเศรษฐศาสตร์ที่ว่า ทำไมแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจึงควรให้ผลลัพธ์ที่เป็นค่าบวกเสมอ พร้อมยกตัวอย่างแบบจำลองที่ไม่ตอบโจทย์ข้อนี้ เช่น Vasicek Model ที่สามารถให้ $r(t) < 0$

14) เปรียบเทียบสมรรถนะของแบบจำลองที่ให้ค่าอัตราดอกเบี้ยติดลบ กับแบบจำลองที่กำหนดอัตราดอกเบี้ยให้เป็นค่าบวกเท่านั้น โดยใช้อัตราดอกเบี้ยจำลองแบบ Monte Carlo เพื่อเปรียบเทียบผลกระทบต่อการกำหนดราคาตราสารหนี้

15) กำหนดพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Vasicek $a = 0.1$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.02$, $r(0) = 0.03$

จงคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีอายุ 1 ปี และ 2 ปี ตามแบบจำลอง Vasicek

16) ใช้ข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง 60 วันของพันธบัตรรัฐบาล (รายวัน) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง CIR โดยใช้วิธี Maximum Likelihood Estimation (MLE) และอธิบายผลที่ได้ในเชิงเศรษฐศาสตร์

17) สมมติว่าราคา Zero-Coupon Bond ในแต่ละช่วงอายุตามตารางด้านล่าง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในแต่ละช่วงเวลาตามแบบจำลอง Ho-Lee แบบตาข่ายต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

18) อธิบายข้อดีและข้อจำกัดของแบบจำลอง Ho-Lee ในบริบทของการจัดทำ Yield Curve ให้สอดคล้องกับข้อมูลตลาด และเปรียบเทียบกับแบบจำลอง CIR

19) สมมติว่าราคา Zero-Coupon Bond ในแต่ละช่วงอายุตามตารางด้านล่าง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในแต่ละโหนดของแบบจำลอง BDT สำหรับ 3 คาบเวลา

20) อธิบายผลของการเปลี่ยนแปลงค่าความผันผวน $\sigma(t)$ ที่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไปตามแบบจำลอง BDT ต่อราคาของ Callable Bond

21) (การจำลองอัตราผลตอบแทนด้วยแบบจำลอง Vasicek จากข้อมูลราคาหุ้นจริง) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาปิดรายวันของหุ้น AOT จากเว็บไซต์ Yahoo Finance ย้อนหลัง 60 วัน แล้ว

21.1) คำนวณอัตราผลตอบแทนรายวัน r_t โดยใช้สูตร $r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ จากนั้นประมาณ

ค่าพารามิเตอร์ a , b , และ σ ของแบบจำลอง Vasicek ด้วยวิธี Maximum Likelihood Estimation (MLE) โดยใช้แบบจำลอง

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

21.2) ทำการจำลองอัตราผลตอบแทน 10,000 เส้นทางในช่วงเวลา 30 วันข้างหน้า แล้วเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเส้นทางจำลองกับข้อมูลจริง

22) (การจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR จากข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลไทย) ดาวน์โหลดข้อมูลอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรรัฐบาลไทยอายุ 1 ปี จากธนาคารแห่งประเทศไทยหรือ SETSMART ในช่วง 3 เดือนล่าสุด

22.1) แปลงข้อมูลเป็นอัตราผลตอบแทนรายวัน และประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , และ σ ของแบบจำลอง CIR โดยใช้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

22.2) จำลองเส้นทางอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลา 60 วันข้างหน้าอย่างน้อย 10 เส้นทาง และวิเคราะห์ลักษณะ mean-reverting และการไม่เป็นค่าลบของแบบจำลอง

23) (การประเมินแบบจำลอง Ho-Lee ด้วยข้อมูลราคาทองคำจริง) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาทองคำ (Gold Spot USD) จากเว็บไซต์ Investing.com ย้อนหลัง 90 วัน

23.1) คำนวณอัตราผลตอบแทนรายวัน r_t จากข้อมูลดังกล่าว ใช้แบบจำลอง Ho-Lee

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

โดยประมาณค่า $\theta(t)$ ด้วยพหุนามดีกรีสองผ่าน Excel หรือ Python แล้วจำลองเส้นทางราคาทองคำ 30 วัน จำนวน 5 เส้นทาง วิเคราะห์ความเหมาะสมของแบบจำลอง Ho-Lee ต่อพฤติกรรมราคาทองคำ

24) (การเปรียบเทียบแบบจำลอง BDT กับเหรียญดิจิทัล Bitcoin) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาของ Bitcoin (BTC-USD) จาก Yahoo Finance ย้อนหลัง 60 วัน

24.1) คำนวณ log-return รายวัน ใช้แบบจำลอง Black-Derman-Toy (BDT)

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)r_t dW_t$$

โดยประมาณฟังก์ชัน $\theta(t)$ และ $\sigma(t)$ ด้วยเทคนิค regression หรือ trendline ผ่าน Excel จากข้อมูล log-return ที่ได้ จากนั้นจำลองเส้นทางราคาในอนาคตอย่างน้อย 5 เส้นทาง และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับแบบจำลอง Ho-Lee และ Vasicek เพื่อประเมินความเหมาะสมของแต่ละแบบจำลองต่อข้อมูลเหรียญดิจิทัล