

บทที่ 11 สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์และสวอปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

11.1 ทฤษฎีของฮีธ-จารีโรว์-มอร์ตัน

11.2 เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด

11.3 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผัน

11.4 สัญญาแคปอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

11.5 สัญญาสวอปชัน

บทนำ

สัญญาแคป (cap) สัญญาฟลอร์ (floor) สัญญาคอลลาร์ (collar) และสัญญาสวอปชัน (swaption) เป็นเครื่องมือหนึ่งในจัดการความเสี่ยงทางการเงินซึ่งมีความซับซ้อนและผันผวนมากในตลาดทุนโลก การมีความรู้ความเข้าใจที่ถ่องแท้ในสัญญาเหล่านี้ย่อมมีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน ไม่ว่าจะเป็นความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยน หรือความเสี่ยงอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องก็ตาม

สัญญาแคป (cap agreement) และ สัญญาฟลอร์ (floor agreement) คือสัญญาทางการเงินที่ช่วยให้ผู้ถือสัญญาสามารถจัดการความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยคือจำกัดการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของอัตราดอกเบี้ยที่ไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในอนาคต ช่วยลดความผันผวนและจำกัดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

สัญญาคอลลาร์ (collar agreement) เป็นสัญญาที่เกิดจากการรวมกันของสัญญาแคปและสัญญาฟลอร์ ทำให้ผู้ทำสัญญาสามารถกำหนดช่วงของอัตราดอกเบี้ยที่ต้องการจำกัด มีอัตราดอกเบี้ยสูงสุด (cap rate) และอัตราดอกเบี้ยต่ำสุด (floor rate) ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

ส่วนสัญญาสวอปชัน (swaption) หรือออปชันสวอป (swap option) เป็นสัญญาที่ผสมผสานระหว่างสวอปอัตราดอกเบี้ยและออปชัน สวอปชันเป็นเครื่องมือหนึ่งในการรับประกัน

ระดับดอกเบี้ยที่แน่นอนสำหรับการกู้ยืมระยะยาวในอนาคตหรือการฝากเงินระยะยาว ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะยาวที่เกิดขึ้นในอนาคต โดยสัญญาสวอปชั้นให้สิทธิแก่ผู้ถือเข้าทำสัญญา swap แบบจ่ายคงที่-รับลอยตัว (payer swaption) หรือ ให้สิทธิแก่ผู้ถือเข้าทำสัญญา swap แบบรับคงที่-จ่ายลอยตัว (receiver swaption) สวอปชั้นให้ผู้ถือสัญญามีความยืดหยุ่นในการตัดสินใจว่าจะใช้สิทธิตามสัญญาสวอปหรือลบล้างสัญญาสวอป นับว่าเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางการเงินและการวางแผนการเงินระยะยาว

ในบทที่ 11 นี้ จะอธิบายความหมายและการทำงานของสัญญาแคป สัญญาฟลอร์ สัญญาคอลลาร์และสัญญาสวอปชั้น รวมถึงการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาดังกล่าวนอกจากนี้ ยังเปรียบเทียบความแตกต่างของสัญญาเหล่านี้และความเหมาะสมของแต่ละสัญญาในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

11.1 กรอบโครงสร้างของตัวแบบ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน

ตัวแบบของ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน หรือตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton : HJM) คือตัวแบบทางการเงินที่ใช้ในการวิเคราะห์อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าหรืออัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด (forward rate) ตัวแบบ HJM พยากรณ์การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดโดยตรง ซึ่งต่างจากตัวแบบการเงินอื่น ๆ ที่พยายามจะพยากรณ์หรือจำลองอัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) ตัวแบบนี้ได้รับการคิดขึ้นโดยเดวิด ฮีธ (David Heath) โรเบิร์ต จาร์โรว์ (Robert Jarrow) และ แอนดรูว์ มอร์ตัน (Andrew Morton) ในปี ค.ศ.1992

กรอบโครงสร้างของตัวแบบ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน มีหลักการภายใต้เงื่อนไข 3 ประการ คือ

1) อัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดไม่เป็นการเคลื่อนที่สุ่ม

การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดต้องสอดคล้องกับการเคลื่อนไหวทางการเงินทั่วไป ซึ่งมักจะถูกแทนที่ด้วยอัตราดอกเบี้ยสั้น

2) ไม่มีการขาดทุนจากการคาดการณ์

ตัวแบบ HJM จะต้องสามารถป้องกันการขาดทุนจากการคาดการณ์ที่ผิดพลาด หากคาดการณ์อัตราดอกเบี้ยที่จะเกิดขึ้นในอนาคตและใช้ข้อมูลนั้นในการทำรายการทางการเงินจะสามารถทำได้โดยไม่มีความเสี่ยง

3) ความสามารถในการพยากรณ์ราคา

ตัวแบบ HJM ต้องสามารถใช้ในการพยากรณ์ราคาของตราสารทางการเงินที่เกี่ยวข้องกับอัตราดอกเบี้ย ราคาของสินค้าทั้งหมดที่มีความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยจะต้องสอดคล้องกับหลักการปราศจากการทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยง (no-arbitrage principle)

ตัวแบบ HJM ใช้สมการสัมพันธ์กับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย (volatility structure) ซึ่งใช้ความผันผวนในอดีตเพื่อพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอว์เวิร์ด โดยตัวแบบ HJM สามารถทำงานกับอัตราดอกเบี้ยที่มีโครงสร้างที่ซับซ้อน ในทางปฏิบัติการหาผลเฉลยรูปปิดของสมการของตัวแบบ HJM นั้นทำได้ยาก จำเป็นต้องใช้เทคนิคการทำความเข้าใจที่ซับซ้อน อย่างไรก็ตาม ตัวแบบนี้เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการทำความเข้าใจและวิเคราะห์อัตราดอกเบี้ยที่มีโครงสร้างที่ซับซ้อน

กำหนดอายุครบกำหนด $T \geq 0$ สำหรับเวลา t ใดๆ ตัวประกอบส่วนลด (discount factor), P_t^T ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q กำหนดโดย นิยามอยู่ในรูป

$$P_t^T = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right] \quad (11.1)$$

ในที่นี้อาจพิจารณา P_t^T เป็นราคาปัจจุบันของพันธบัตรที่นักลงทุนยินดีจ่ายในปัจจุบัน (t) เพื่อแลกกับเงิน 1 หน่วยที่จะได้รับในอนาคต ณ เวลา T โดยคำนึงถึงอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงและการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยนั้นตลอดช่วงเวลา t ถึง T

11.1.1 อัตราฟอว์เวิร์ดทันที (instantaneous forward rate)

อัตราฟอว์เวิร์ดทันที เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ใช้สำหรับสัญญาซื้อขายตราสารหนี้ระหว่างสองเวลา ซึ่งอัตรานี้ถูกกำหนดจากราคาตลาดของตราสารหนี้ในปัจจุบัน โดยอัตราฟอว์เวิร์ดทันทีแสดงถึง

อัตราดอกเบี้ยที่คาดว่าจะได้รับในช่วงเวลาเล็ก ๆ ในอนาคตที่กำหนดจากเวลาปัจจุบัน ในที่นี้จะเขียนแทนอัตราฟอร์เวิร์ดทันที ด้วยสัญลักษณ์ $f(t, T)$ กำหนดโดย

$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^{T+\Delta T} r_s ds \right) \right]}{E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right]} - 1 \right) = - \frac{\partial \ln(P_t^T)}{\partial T} \quad (11.2)$$

สมมติว่ามีความเสี่ยงจำนวน N ปัจจัยซึ่งแต่ละปัจจัยนั้นเกิดจากการเคลื่อนที่บราวน์ที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน, $W_t^k, t > 0, k = 1, 2, \dots, N$ สมมติว่าภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง, P_t^T สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \mu(t, T)dt + \sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)dW_t^k \quad (11.3)$$

เมื่อ $\mu(t, T), \sigma_k(t, T)$ เป็นอัตราดริฟท์ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (instantaneous mean) และค่าความผันผวน ตามลำดับ สมมติว่าภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$\mu(t, T) = r_t \quad (11.4)$$

เมื่อ $r_t \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{1}{P_t^{t+\Delta T}} - 1 \right) = \left[- \frac{\partial \ln(P_t^T)}{\partial T} \right]_{T=t}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (short-term rate)

ดังนั้นจากสมการ (11.4) จะได้ว่า

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = r_t dt + \sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)dW_t^k \quad (11.5)$$

โดยการประยุกต์บทตั้งของอิตโต้ ได้ว่า

$$d \ln P_t^T = r_t dt + \sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)dW_t^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)\sigma_k(t, T)dt \quad (11.6)$$

จากสมการ (11.6) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร T ได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P_t^T}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}(r_t dt) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)dW_t^k \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k(t, T)\sigma_k(t, T)dt \right) \\ -df(t, T) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) dW_t^k - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) \sigma_k(t, T)dt \end{aligned}$$

$$df(t, T) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) d(-W_t^k) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) \left(\int_t^T \frac{\partial \sigma_k(t, s)}{\partial s} ds \right) dt \quad (11.7)$$

เนื่องจาก $-W_t^k$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์เช่นเดียวกับ W_t^k เพื่อความสะดวกเขียน $-W_t^k$ แทนด้วย W_t^k เช่นเดิม ดังนั้นจะได้ว่า

$$df(t, T) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) \left(\int_t^T \frac{\partial \sigma_k(t, s)}{\partial s} ds \right) dt + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) dW_t^k \quad (11.8)$$

สมการ (11.8) เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “สมการฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน (Heath-Jarrow-Morton equation:

HJM) สัมประสิทธิ์ $\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T}$ แทนสัดส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราฟอว์เวิร์ด $f(t, T)$

จากปัจจัยที่ k ข้อสังเกตคือ สัมประสิทธิ์ $\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T}$ ค่าความผันผวนของอัตราฟอว์เวิร์ด

เนื่องจาก

$$\text{cov}(df(t, T_1), df(t, T_2)) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) \bigg|_{T=T_1} \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) \bigg|_{T=T_2} dt \equiv \sum_{k=1}^N (\sigma'_k(t, T_1)) (\sigma'_k(t, T_2)) dt \quad (11.9)$$

รูปสมการเชิงอนุพันธ์ (11.8) สามารถเขียนในรูปสมการเชิงปริพันธ์ได้ในรูป

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(s, T)}{\partial T} \right) \left(\int_s^T \frac{\partial \sigma_k(s, u)}{\partial u} du \right) \right) ds + \sum_{k=1}^N \int_0^t \left(\frac{\partial \sigma_k(s, T)}{\partial T} \right) dW_s^k \quad (11.10)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $T=t$ เนื่องจาก $f(t, t) = r_t$ จะได้ว่า

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(s, t)}{\partial t} \right) \left(\int_s^t \frac{\partial \sigma_k(s, u)}{\partial u} du \right) \right) ds + \sum_{k=1}^N \int_0^t \left(\frac{\partial \sigma_k(s, t)}{\partial t} \right) dW_s^k \quad (11.11)$$

กำหนดให้ Z_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่ง $dZ_t = \left(\sum_{k=1}^N (\sigma'_k(t, t))^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^N \sigma'_k(t, t) dW_t^k \right)$

และเพื่อความสะดวกในที่นี้ให้ $\frac{\partial \sigma_k(s, T)}{\partial T} \bigg|_{T=t} \equiv \sigma'_k(s, t)$ และ $\frac{\partial^2 \sigma_k(s, T)}{\partial T^2} \bigg|_{T=t} \equiv \sigma''_k(s, t)$ จะได้ว่า

$$dr_t = \mu_r(t)dt + \sigma_r(t)dZ_t \quad (11.12)$$

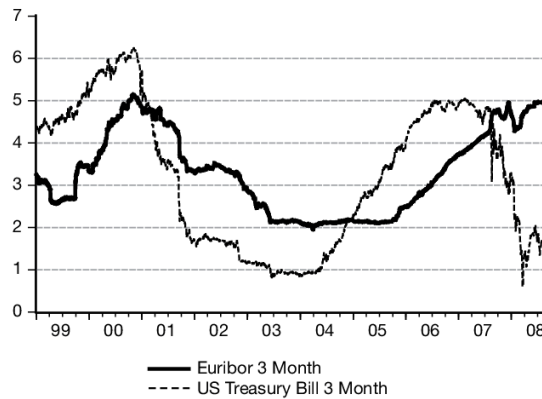
เมื่อ

$$\mu_r(t) = f'(0,t) + \sum_{k=1}^N \int_0^t \left((\sigma'_k(s,t))^2 + (\sigma''_k(s,t)) \left(\int_s^t \sigma'_k(s,u) du \right) \right) ds + \sum_{k=1}^N \int_0^t \sigma''_k(s,t) dW_s^k \quad (11.13)$$

และ

$$\sigma_r(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\sigma'_k(t,t))^2} \quad (11.14)$$

จากสมการ (11.13) จะเห็นว่า ในกรณีที่ ค่าความผันผวนเท่ากับศูนย์ $\mu_r(t) = r'_t = f'(0,t)$ นั่นคือ อัตราดริฟท์ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเท่ากับความชันของเส้นโค้งของอัตราฟอร์เวิร์ดซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในอดีต



รูปที่ 11.1 อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น euribor ระยะ 3 เดือน เปรียบเทียบกับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น อัตราผลตอบแทนตั๋วเงินคลังสหรัฐฯอายุ 3 เดือน (อัตราดอกเบี้ยจริง)

เพื่อความเข้าใจพิจารณาตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาอัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$ และตัวประกอบส่วนลด $P(t,T)$ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11.1 กำหนดข้อมูลดังต่อไปนี้ สมมติให้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 3\%$ จำนวนปัจจัย $N=1$ จงใช้คำนวณหาตัวประกอบส่วนลด P_t^T และ อัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$

วิธีทำ 1) การคำนวณตัวประกอบส่วนลด P_t^T

จากนิยามของ P_t^T ตามสมการที่ (11.1) และ จากข้อมูลที่กำหนดให้ $r_s = 0.03$

$$\text{จะได้ } P_t^T = \mathbb{E}^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right] = e^{-0.03(T-t)}$$

2) การคำนวณอัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$ โดยใช้สมการ (11.2)

$$\text{จะได้ } f(t,T) = - \frac{\partial \ln(P_t^T)}{\partial T} = - \frac{\partial \ln(e^{-0.03(T-t)})}{\partial T} = - \frac{\partial (-0.03(T-t))}{\partial T} = 0.03 \quad \square$$

11.1.2 ตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย และ $\sigma'(t, T) = \sigma =$ ค่าคงที่

สำหรับตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย และ $\sigma'(t, T) = \sigma =$ ค่าคงที่ นั่นคือ

$$\sigma(t, T) = \int_t^T \sigma ds = (T - t)\sigma \text{ จากสมการ (11.8) จะได้ว่า}$$

$$df(t, T) = \sigma \left(\int_t^T \sigma ds \right) dt + \sigma dW_t = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma dW_t \quad (11.15)$$

โดยการอินทิเกรตเทียบกับ t จะได้

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 \left(Tt - \frac{t^2}{2} \right) + \sigma W_t \quad (11.16)$$

เรียกตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย ในกรณีนี้ที่ $\sigma'(t, T) = \sigma =$ ค่าคงที่ ว่า “ตัวแบบโฮ-ลี (ho-lee model)”

จากสมการ (11.16) แทน $T = t$ จะได้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t \quad (11.17)$$

นั่นคือ $\sigma W_t = r_t - f(0, t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ เมื่อแทนในสมการ (11.16) จะได้ว่าสามารถเขียนอัตราฟอว์เวิร์ด

$f(t, T)$ ในรูปอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t โดย

$$f(t, T) = f(0, T) - f(0, t) + r_t + \sigma^2 t(T - t) \quad (11.18)$$

เนื่องจาก $f(t, T) = -\frac{\partial \ln(P_t^T)}{\partial T}$ และจากสมการ (11.16) ได้ว่า

$$\begin{aligned} P_t^T &= \exp \left(-\int_t^T f(t, s) ds \right) = \exp \left(-\int_t^T \left(f(0, s) + \sigma^2 \left(st - \frac{t^2}{2} \right) + \sigma W_s \right) ds \right) \\ &= \left(\exp \left(-\int_t^T f(0, s) ds \right) \right) \left(\exp \left(-\int_t^T \sigma^2 \left(st - \frac{t^2}{2} \right) ds \right) \right) \left(\exp \left(-\int_t^T \sigma W_s ds \right) \right) \\ &= P_0^T \left(e^{-\frac{\sigma^2 Tt(T-t)}{2}} \right) \left(e^{-\int_t^T \sigma W_s ds} \right) \end{aligned} \quad (11.19)$$

นั่นคือ

$$P_t^T = P_0^T \left(e^{-\frac{\sigma^2 Tt(T-t)}{2}} \right) \left(e^{-\int_t^T \sigma W_s ds} \right) \quad (11.20)$$

สูตรของตัวประกอบส่วนลด P_t^T ตามสมการ (11.20) สามารถใช้ในการหาสูตรรูปปิดสำหรับการกำหนดราคาอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ยเช่น สัญญาแคป สัญญาฟลอร์ เป็นต้น ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมของตัวแบบโฮ-ลีไนบท์ที่ 7

ตัวอย่างที่ 11.2 พิจารณาพันธบัตรที่มีอายุ 2 ปี เราต้องการจำลองราคาพันธบัตรในช่วงเวลาต่างๆ โดยใช้ตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton) โดยสมมติว่า อัตราผลตอบแทนล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0, T) = 5\%$, ค่าความผันผวน $\sigma = 2\%$, วันครบกำหนด $T = 2$ ปี จงคำนวณหา

1) อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t, T)$ ที่เวลา $t = 0.5$

2) ราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t = 0.5$

วิธีทำ 1) คำนวณอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t, T)$

จากสมการตัวแบบ HJM (11.16), $f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 \left(Tt - \frac{t^2}{2} \right) + \sigma W_t$ และข้อมูลที่กำหนดให้

$$f(t, 2) = 0.05 + (0.02)^2 \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) + 0.02W_t$$

ดังนั้น อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t, T)$ ที่เวลา $t = 0.5$,

$$\begin{aligned} f(0.5, 2) &= 0.05 + (0.02)^2 \left(2(0.5) - \frac{(0.5)^2}{2} \right) + 0.02W_t \\ &= 0.05035 + 0.02W_t \end{aligned}$$

เนื่องจาก W_t เป็นกระบวนการการเคลื่อนที่บราวน์โดยทั่วไปแล้ว W_t แสดงถึงความผันผวนทางสุ่มในตลาดการเงินและเป็นฟังก์ชันของเวลา t และ $W_t \sim N(0, t)$ สำหรับในตัวอย่างนี้ เราสามารถใช้ค่าเฉลี่ยของ W_t ที่เท่ากับ 0 เพื่อความง่ายในการคำนวณจะกำหนด $W_t = 0$

ดังนั้น $f(0.5, 2) = 0.05035 + 0.02 \times 0 = 0.05035$

2) คำนวณราคาพันธบัตร P_t^T

$$\text{จากสมการ (11.20), } P_t^T = P_0^T \left(e^{-\frac{\sigma^2 T t (T-t)}{2}} \right) \left(e^{-\int_t^T \sigma W_s ds} \right)$$

$$P_t^T = P_0^T \exp \left(-\frac{\sigma^2 T (T-t)}{2} \right) \exp \left(-\int_t^T \sigma W_s ds \right)$$

สมมติว่า $P_0^T = 1$ (ราคาพันธบัตรที่ $t = 0$) และ $W_s = 0$

$$P_{0.5}^T = \exp \left(-\frac{(0.02)^2 \cdot 2 \cdot (2 - 0.5)}{2} \right) \approx 0.9994$$

□

11.1.3 ตัวแบบ HJM- 1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$

ตัวแบบ HJM- 1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$ ในกรณีนี้ค่าความผันผวนของอัตราฟอว์เวิร์ดมีการเปลี่ยนแปลงลดลงเมื่ออายุครบกำหนดของสัญญา T มีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่เงื่อนไข $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$ เป็นการกำหนดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในตัวแบบ HJM-1 ปัจจัยเดียว มีความหมายดังนี้

- 1) σ เป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลา t
- 2) $e^{-\kappa(T-t)}$ เป็นตัวประกอบที่ลดทอนค่าความผันผวนตามเวลาที่ผ่านไป โดยมี κ เป็นค่าเฉลี่ยการรอกกลับ (mean reversion rate)

โดยเงื่อนไขข้อ 2) นี้ หมายความว่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยจะลดลงตามเวลาที่ใกล้วันครบกำหนด T และความผันผวนนี้จะถูกควบคุมโดยค่า κ หาก κ มีค่าสูง การรอกกลับสู่ค่าเฉลี่ยจะเร็วขึ้นทำให้ความผันผวนลดลงอย่างรวดเร็ว

ตัวแบบ HJM -1ปัจจัย กรณี $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$ สำหรับอัตราฟอว์เวิร์ดจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \sigma e^{-\kappa(T-t)} \left(\int_t^T \sigma e^{-\kappa(s-t)} ds \right) dt + \sigma e^{-\kappa(T-t)} dW_t \\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)}) + \sigma e^{-\kappa(T-t)} dW_t \end{aligned} \quad (11.21)$$

อินทิเกรตเทียบ t ของทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa T})^2 - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW_s \quad (11.22)$$

กำหนดตัวแปรสถานะ $X_t = \sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW_s$ ซึ่งได้ว่า

$$e^{-\kappa(T-t)} X_t = \sigma e^{-\kappa(T-t)} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s = \sigma \int_0^t e^{-\kappa(T-s)} dW_s \quad (11.23)$$

เมื่อแทนใน (11.22) ทำให้ได้

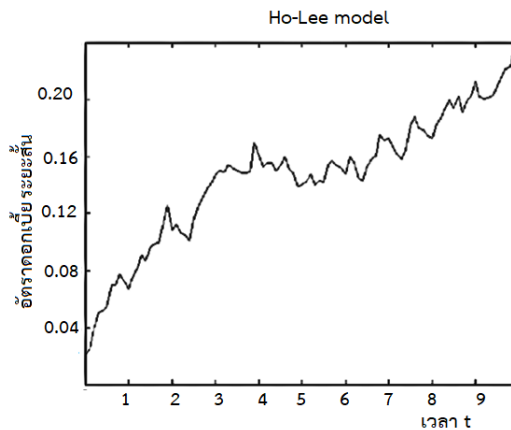
$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa T})^2 - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 + e^{-\kappa(T-t)} X_t \quad (11.24)$$

และ

$$\begin{aligned}
 f(t,t) &= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t})^2 - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa(t-t)})^2 + e^{-\kappa(t-t)} X_t \\
 &= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t})^2 + X_t
 \end{aligned} \tag{11.25}$$

นั่นคือ
$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t})^2 + X_t \tag{11.26}$$

ตัวแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามสมการ (11.26) เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อ “ตัวแบบวาสิเชคดัดแปลงหรือตัวแบบฮัลล์-ไวท์ (modified vasicek model or hull-white model)” ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างตัวแบบโฮ-ลี และ ตัวแบบวาสิเชคดัดแปลง คือ หากพิจารณาอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในลักษณะระยะยาว ($t \rightarrow \infty$) จากสมการ (11.17) จะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบโฮ-ลี นั้นลู่ออก เนื่องจากพจน์ทางขวาประกอบด้วยพจน์ $\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ ของสมการ (11.17) นั้นลู่ออก



รูปที่ 11.2 อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบโฮ-ลี นั้นลู่ออก เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ในขณะที่ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัลล์-ไวท์ นั้นลู่เข้าเมื่อ $t \rightarrow \infty$ นั่นคือเมื่อ $t \gg 1$

$$r_t \approx f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + X_t \equiv r_t^\infty \tag{11.27}$$

ซึ่งพจน์ทางขวาของ (11.27) เป็นตัวแปรสุ่ม r_t^∞ มีการแจกแจงปกติ ซึ่งค่าเฉลี่ยของ r_t^∞ เท่ากับ

$$\mu_t^\infty = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa} \tag{11.28}$$

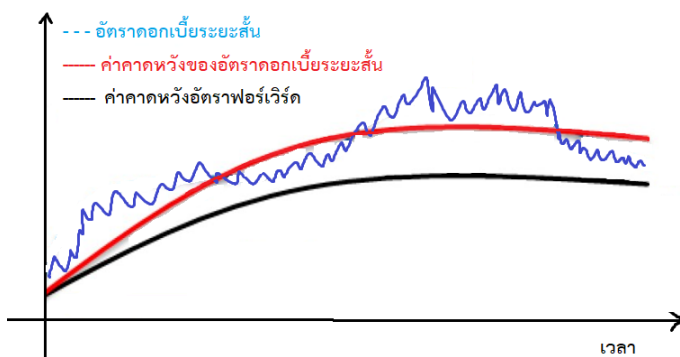
และความแปรปรวนของ r_t^∞ เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 (\sigma_t^\infty)^2 &= E[(r_t^\infty - \mu_t^\infty)^2] = E[(X_t)^2] = E\left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s\right)^2\right] = \sigma^2 E\left[\left(\int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s\right)^2\right] \\
 &= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds = \sigma^2 \left[\frac{e^{-2\kappa(t-s)}}{-2\kappa} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \approx \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (\text{เมื่อ } t \gg 1) \quad (11.29)
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าเมื่อ $t \gg 1$ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัลล์-ไวท์จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นเชิงกำกับ (asymptotic probability distribution) ในที่นี้คือ $r_{t \gg 1} \sim N\left(f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa}, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$ ซึ่งกล่าวได้ว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t เคลื่อนที่ววกกลับสู่ค่าเฉลี่ยของ r_t เอง โดยจะเรียกพารามิเตอร์ κ ว่า “อัตราการววกกลับของค่าเฉลี่ย (rate of mean reverion)”

ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับในกรณีที่ $T \gg 1$ จากสมการ (11.24) ได้ว่าอัตราฟอร์เวิร์ด

$$f(t,T) \approx f(0,T) + e^{-\kappa(T-t)} X_t \quad (11.30)$$



รูปที่ 11.3 เปรียบเทียบอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัลล์-ไวท์ ค่าคาดหวังอัตราฟอร์เวิร์ด และค่าคาดหวังอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น เมื่อ $T \gg 1$

ตัวอย่างที่ 11.3 พิจารณาตัวแบบ HJM-1 ปัจจัยเดียว ในกรณีที่ $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$ โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0,t) = 5\%$, ความผันผวน $\sigma = 1\%$, อัตราการววกกลับสู่ค่าเฉลี่ย $\kappa = 0.1$, ระยะเวลา $T = 10$ ปี

- 1) จงคำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t,T)$ ณ เวลา $t = 5$ ปี
- 2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t = 5$ ปี โดยสมมติว่า $X_t \approx 0.002$

วิธีทำ 1) คำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t,T)$ ณ เวลา $t = 5$ ปี

$$\sigma'(5,10) = 0.01e^{-0.1(10-5)} = 0.006065$$

ดังนั้น ความผันผวน ณ เวลา $t = 5$ ปี จะเท่ากับ 0.006065 หรือประมาณ 0.61%

2) คำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t = 5$ ปี

จากสมการ (11.26), $r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})^2 + X_t$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด

$$\text{จะได้ } r_5 \approx 0.05 + \frac{0.01^2}{2(0.1^2)}(1 - e^{-0.1(5)})^2 + 0.002 = 0.052775 = 5.2775\% \quad \square$$

11.2 เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด

เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด หรือตัววัดฟอร์เวิร์ด (forward measure) คือการวัดความน่าจะเป็นที่ใช้ในการคำนวณความเสี่ยงในการเงินซึ่งเป็นการเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็นจากการวัดด้วยเมเชอร์ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) มาใช้ตัววัดเมเชอร์ฟอร์เวิร์ดในการวัดค่าคาดหวัง ในการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดการดอกเบี้ยเงินกู้ ปกติเราจะต้องคำนวณค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่ได้จากการวัดที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง แต่เมื่อเปลี่ยนไปใช้ตัววัดเมเชอร์ฟอร์เวิร์ดจะทำให้การวัดค่าคาดหวังทำได้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะกับสัญญาที่ขึ้นอยู่กับมูลค่าของตราสารหนี้หรืออัตราดอกเบี้ยในวันสิ้นสุดของสัญญา อย่างไรก็ตามการใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ดในการวัดค่าคาดหวังนั้นจำเป็นต้องมีความรู้ทางด้านทฤษฎีการวัดความน่าจะเป็น วิธีคำนวณความไม่แน่นอน และหลักการของกระบวนการสโตแคสติก จึงจะสามารถทำให้ผู้อ่านมีความรู้ความเข้าใจมากขึ้น โดยผู้อ่านสามารถศึกษาความรู้พื้นฐานเหล่านี้ได้ในบทที่ 6

พิจารณาหลักทรัพย์ซึ่งมีการจ่ายปันผล $D_k, k=1,2,\dots,N$ ที่เวลา $T_k < T, k=1,2,\dots,N$ และ S_D เป็นมูลค่าปัจจุบันจากการคิดลดกระแสเงินสดการจ่ายปันผลด้วยอัตราดอกเบี้ย r_t ซึ่งเป็นกระบวนการสโตแคสติก กำหนดให้ Q เป็นเมเชอร์ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง และ

$$P_t^{T_k} = E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}] \text{ เป็นฟังก์ชันส่วนลด นั่นคือ}$$

$$S_D = \sum_{k=1}^N P_t^{T_k} D_k = \sum_{k=1}^N E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}] D_k = \sum_{k=1}^N E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds} D_k] \quad (11.31)$$

กำหนดให้กระบวนการสโตแคสติก S_t , $t < T$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือราคาที่ยรวมมูลค่าจากการจ่ายปันผลของหลักทรัพย์ และกำหนดให้ $\tilde{S}_t$ เป็นราคาที่ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล ดังนั้น

$$S_t = \tilde{S}_t + S_D = \tilde{S}_t + \sum_{k=1}^N P_t^{T_k} D_k \quad (11.32)$$

กำหนดให้ $(f_T S)_t$ แทนราคาฟอว์เวิร์ดหรือราคาล่วงหน้าของหลักทรัพย์ (ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล) ซึ่งพิจารณาเป็นมูลค่าสะสมของ $\tilde{S}_t$ ด้วยฟังก์ชันสะสม $\frac{1}{P_t^T}$ นั่นคือ

$$(f_T S)_t = \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} \quad (11.33)$$

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงราคาที่ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล $d\tilde{S}_t$ ภายใต้ตัวแบบที่ประกอบด้วยความเสี่ยง N ปัจจัย (N -factors model) ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก ดังนี้

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t (\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt) \quad (11.34)$$

เมื่อ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (short-term interest rate), $\sigma_{\tilde{S}} = \langle \sigma_{\tilde{S}_1}, \sigma_{\tilde{S}_2}, \dots, \sigma_{\tilde{S}_N} \rangle$ เวกเตอร์ความเสี่ยงหรือความผันผวนของราคาหลักทรัพย์ และ $Z_t = \langle Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^N \rangle$ เป็นเวกเตอร์การเคลื่อนที่สุ่มบราวน์เนียนใน ν มิติ ในทำนองเดียวกันถ้าพิจารณา P_t^T เป็นราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง อายุของสัญญา T ปี และมีราคาไถ่ถอน 1 บาท จะได้ว่า

$$dP_t^T = P_t^T (\sigma(t; T) \cdot dZ_t + r_t dt) \quad (11.35)$$

ต่อไปพิจารณาอนุพันธ์ไอโต้ (ito differential) ของราคาฟอว์เวิร์ดของหลักทรัพย์ $(f_T S)_t = \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}$, โดย

บทแทรกของไอโต้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(f_T S)_t &= d\left(\frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\right) = \frac{d\tilde{S}_t}{P_t^T} - \frac{\tilde{S}_t}{(P_t^T)^2} dP_t^T - \frac{1}{(P_t^T)^2} d\tilde{S}_t dP_t^T + \frac{\tilde{S}_t}{(P_t^T)^3} dP_t^T dP_t^T \\ &= \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} (\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt) - \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} (\sigma(t; T) \cdot dZ_t + r_t dt) - \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} (\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt) (\sigma(t; T) \cdot dZ_t + r_t dt) \\ &\quad + \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} (\sigma(t; T) \cdot dZ_t + r_t dt)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} \left[(\sigma_{\tilde{s}} \cdot dZ_t + r_t dt) - (\sigma(t;T) \cdot dZ_t + r_t dt) - \sigma_{\tilde{s}} \cdot \sigma(t;T) dt + \|\sigma(t;T)\|^2 dt \right] \\
&= (f_T S)_t \left[(\sigma_{\tilde{s}} - \sigma(t;T)) \cdot dZ_t - (\sigma_{\tilde{s}} \cdot \sigma(t;T) - \|\sigma(t;T)\|^2) dt \right] \\
&= (f_T S)_t (\sigma_{\tilde{s}} - \sigma(t;T)) \cdot (dZ_t - \sigma(t;T) dt)
\end{aligned} \tag{11.36}$$

โดยที่ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ และ $x \cdot y = \sum_{k=1}^N (x_k y_k)$ นั่นคือ

$$d(f_T S)_t = (f_T S)_t (\sigma_{\tilde{s}} - \sigma(t;T)) \cdot (dZ_t - \sigma(t;T) dt) \tag{11.37}$$

กำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ของกระบวนการสุ่มสโตแคสติก $dW_t \equiv dZ_t - \sigma(t;T) dt$ ดังนั้นได้ว่า

$$\frac{d(f_T S)_t}{(f_T S)_t} = (\sigma_{\tilde{s}} - \sigma(t;T)) \cdot dW_t \tag{11.38}$$

โดยทฤษฎีบทของกิร์ซานอฟ (Girsanov's theorem) จะได้ว่า กระบวนการสุ่มสโตแคสติก W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์เนียนภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ที่สมนัยกับ ตัววัดความน่าจะเป็น Q ดังนั้นราคาฟอว์เวิร์ดสอดคล้องกับสมบัตินี้ที่แปลงภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} โดยที่ Q^{*T} เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่นิยามขึ้นอยู่กัเวลา T ซึ่งอธิบายด้วยอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ (Radon-Nikodym derivative) ในรูป

$$\frac{dQ^{*T}}{dQ} = \exp \left(\int_0^T \sigma(t;T) \cdot dZ_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\sigma(t;T)\|^2 dt \right) \tag{11.39}$$

หมายเหตุ ค่าอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแปลงค่าระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นที่แตกต่างกันซึ่งจะช่วยให้สามารถเปลี่ยนจากการวัดความน่าจะเป็นที่หนึ่งไปยังอีกการวัดความน่าจะเป็นหนึ่ง ในสาขาทางการเงิน มักใช้ค่านี้เมื่อเราต้องการเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็นที่มีความเสี่ยง (risk probability measure) ไปสู่การวัดความน่าจะเป็นที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral probability measure) การคำนวณอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ นั้นขึ้นอยู่กับ การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต้องการที่จะแปลงค่าการวัดความน่าจะเป็น โดยอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์เป็นอัตราส่วนของความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density functions) ทั้งสอง

การแจกแจงความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น ถ้า P และ Q เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น f และ g ตามลำดับ แล้ว อนุพันธ์เรดอน-นิโคโดม์ของ Q เทียบกับ P สามารถเขียนได้เป็น $dQ/dP = g/f$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 11.4 บริษัท abc มีหุ้นที่จ่ายปันผล D_k สำหรับ $k=1,2,3$ ที่เวลาต่าง ๆ T_k โดยมีอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t คงที่เท่ากับ 0.05 (5%) และจ่ายปันผลตามตารางด้านล่าง

เวลา T_k (ปี)	ปันผล D_k (บาท)
1	100
2	120
3	150

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

วิธีทำ ในการคำนวณนี้ จะใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ดในการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลในอนาคตโดยใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ที่เป็นค่าคงที่ ซึ่งช่วยให้สามารถคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับจากการลงทุนในหุ้นได้ โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล P_t^T

จาก $P_t^T = E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}]$ และเนื่องจาก r_s เป็นค่าคงที่เท่ากับ 0.05 ดังนั้น $P_t^{T_k} = e^{-0.05(T_k-t)}$

จะได้มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลแต่ละช่วงเวลา ดังนี้

สำหรับ $T_1=1$ ปี $P_0^T = e^{-0.05(1-0)} = e^{-0.05} \approx 0.9512$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_1 ที่ T_1 คือ $P_0^T D_1 = 0.9512 \times 100 = 95.12$ บาท

สำหรับ $T_2=2$ ปี $P_0^T = e^{-0.05(2-0)} = e^{-0.1} \approx 0.9048$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_2 ที่ T_2 คือ $P_0^T D_2 = 0.9048 \times 120 = 108.58$ บาท

สำหรับ $T_3=3$ ปี $P_0^T = e^{-0.05(3-0)} = e^{-0.15} \approx 0.8607$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_3 ที่ T_3 คือ $P_0^T D_3 = 0.8607 \times 150 = 129.11$ บาท

ดังนั้น รวมมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด

$$S_D = 95.12 + 108.58 + 129.11 = 332.81 \text{ บาท}$$



การคำนวณในตัวอย่างที่ 11.4 แสดงให้เห็นว่าเมเชอร์ฟอร์เวิร์ดสามารถใช้ในการประเมินมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลในอนาคตได้ ทำให้ผู้ลงทุนสามารถตัดสินใจเกี่ยวกับการลงทุนในหุ้นได้ดีขึ้น โดยพิจารณาจากมูลค่าที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต

ทฤษฎีบท 11.1 ให้ T เป็นจุดเวลาที่กำหนดและสมมติให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะมีตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ที่สมนัยกับ ตัววัดความน่าจะเป็น Q ที่ซึ่งราคาฟอร์เวิร์ดสำหรับส่งมอบวันที่ T ของหลักทรัพย์ใด ๆ สอดคล้องกับสมบัติมาร์ติงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} โดยเรียกตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} นี้ว่า “เมเชอร์ฟอร์เวิร์ดสำหรับวันส่งมอบที่ T ” ที่สมนัยกับตัววัดความน่าจะเป็น Q

เราทราบว่าภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง Q ราคาของยุโรปียนคอลลอปชัน C_0 ที่มีราคาใช้สิทธิ K วันส่งมอบวันที่ T โดยตัวแบบคิดลดกระแสเงินสดคำนวณได้จาก

$$C_t = P_t^T E^Q[C(T)] = E^Q[P_t^T C(T)] = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} \max\{S_T - K, 0\}] \quad (11.40)$$

โดยที่ $C(T) = [S_T - K]^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ เป็นผลประโยชน์ของคอลลอปชันที่เวลา T

จากทฤษฎีบท 11.1 ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลลอปชัน $(f_T C)_t$ มีสมบัติมาร์ติงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง Q^{*T} นั่นคือ

$$C_t = P_t^T E^Q[C(T)] = E^{Q^{*T}}[P_t^T (f_T C)_t] = E^{Q^{*T}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \max\{S_T - K, 0\}] \quad (11.41)$$

จากสมการ (11.41) จะเห็นว่าการใช้ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลลอปชัน $(f_T C)_t$ มีข้อดีกว่าการใช้ราคาทันที (spot prices) คือสามารถแยกผลกระทบที่เกิดจากความผันผวนจากการคิดลดกระแสเงินสดได้

ตัวอย่างที่ 11.5 พิจารณาคอลลอปชันสำหรับหุ้นของบริษัทหนึ่งที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 50$ บาท อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 0.05$ (5%) ราคาการใช้สิทธิ (strike price) $K = 45$ บาท และเวลาครบกำหนด $T = 1$ ปี จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชันนี้โดยใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด (forward measure) และราคาฟอร์เวิร์ดของคอลลอปชัน $f_T C$ ในการประเมินมูลค่าของคอลลอปชัน (call option) สำหรับหุ้นดังกล่าว

วิธีทำ ขั้นตอนการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชัน เป็นดังนี้

1) คำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้น f_T

เนื่องจาก $f_T = S_0 e^{rT} = 50e^{0.05 \times 1} \approx 52.565$ บาท

2) คำนวณมูลค่าของคอลลอปชันโดยใช้ราคาฟอร์เวิร์ด

คำนวณโดยใช้ราคาฟอร์เวิร์ด $C(T) = \max\{S_T - K, 0\} = \max\{f_T - K, 0\}$

$$= \max\{52.565 - 45, 0\} = \max\{7.565, 0\} = 7.565$$

และเนื่องจาก $P_t^T = E_t^Q[e^{-\int_t^T r_s ds}] = e^{-0.05(T-t)}$ ดังนั้น $P_0^1 = e^{-0.05 \times (1-0)} = e^{-0.05} \approx 0.9512$

คำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชันโดยใช้สมการ (11.40), $C_t = P_t^T E^Q[C(T)]$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชันคือ $C_t = 0.9512 \times 7.565 \approx 7.20$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชันนี้ ณ เวลา $t=0$ คือ 7.20 บาท เนื่องจากราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้นมากกว่าราคาการใช้สิทธิ K ทำให้มีมูลค่าในการใช้สิทธิในอนาคต $\square$

11.3 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันที่มีสินค้าอ้างอิงเป็นสินค้าโภคภัณฑ์ (commodity option) ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผันหรืออัตราดอกเบี้ยสุ่ม (stochastic interest rate) สินค้าโภคภัณฑ์เหล่านี้ ได้แก่ ทองคำ น้ำมันดิบ ข้าว กาแฟ ฯลฯ ในที่นี้จะหมายถึงสินทรัพย์ทางการเงินด้วย เช่น หุ้น เป็นต้น โดยในที่นี้ใช้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยโฮ-ลีปัจจัยเดียว (1-factor ho-lee interest rate) ในการอธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย

11.3.1 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์

พิจารณาสัญญาออปชันที่มีสินค้าอ้างอิงเป็นสินค้าโภคภัณฑ์ชนิดหนึ่งภายใต้อัตราดอกเบี้ยสุ่มตามตัวแบบอัตราดอกเบี้ยโฮ-ลีปัจจัยเดียว ส่งมอบ ณ วันที่ T กำหนดให้ S_t แทนราคาสินค้าโภคภัณฑ์นั้น กำหนดให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวร่วมกันของราคาสินค้าโภคภัณฑ์และราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่อายุ T ซึ่งการเคลื่อนไหวของราคาอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_s dZ_t + (r_t - d_t) dt \quad (11.42)$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \sigma_r (T-t) dX_t + r_t dt \quad (11.43)$$

เมื่อ d_t เป็นกระบวนการสโตแคสติกการจ่ายปันผล, σ_s และ σ_r เป็นค่าคงที่ และ Z_t และ X_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่ง $E^Q[Z_t X_t] = \rho dt$ ดังนั้นจะมีการเคลื่อนที่บราวน์ Y_t ที่เป็นอิสระกับ Z_t และ X_t สามารถเขียนได้ในรูป

$$X_t = \rho Z_t + \sqrt{(1-\rho^2)} Y_t \quad (11.44)$$

จาก (11.44) สามารถเขียน (11.43) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \sigma_r (T-t) \rho dZ_t + \sigma_r (T-t) \sqrt{(1-\rho^2)} dY_t + r_t dt \quad (11.45)$$

จากสมการ (11.38) ค่าความผันผวนของราคาพอร์เวิร์ดของสินค้าโภคภัณฑ์ $(f_T S)_t$ เท่ากับผลต่างระหว่างความผันผวนสำหรับ $\frac{dS_t}{S_t}$ และ $\frac{dP_t^T}{P_t^T}$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกของราคาพอร์เวิร์ดสำหรับสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$\frac{d(f_T S)_t}{(f_T S)_t} = (\sigma_s - \rho \sigma_r (T-t)) dW_t^1 - \sqrt{1-\rho^2} \sigma_r (T-t) dW_t^2 \quad (11.46)$$

เมื่อ W_t^1 และ W_t^2 เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ที่เป็นอิสระกัน

จากสมการ (11.46) ทำให้ได้ว่าค่าความผันผวนของราคาพอร์เวิร์ด $(f_T S)_t$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\sigma_f(t)$ คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} (\sigma_f(t))^2 &= (\sigma_s - \rho \sigma_r (T-t))^2 + (1-\rho^2) (\sigma_r)^2 (T-t)^2 \\ &= (\sigma_s)^2 - 2\sigma_s \rho \sigma_r (T-t) + (\sigma_r)^2 (T-t)^2 \end{aligned} \quad (11.47)$$

เทอมค่าความผันผวน $(f_T S)_T$ (จาก 0 ถึง T) เขียนแทนด้วย $\bar{\sigma}_T$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของค่าความผันผวน $(f_T S)_t$ คำนวณได้จาก

$$\bar{\sigma}_T = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\sigma_f(t))^2 dt}$$

$$= \sqrt{(\sigma_s)^2 - \sigma_s \rho \sigma_r T + \frac{(\sigma_r)^2 T^2}{3}} \quad (11.48)$$

โดยใช้เมเซอร์ฟอร์เวิร์ด จะได้ว่าราคาคอลลอปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ อยู่ในรูป

$$C_0 = P_0^T E^{Q^*T} [C(T)] = P_0^T E^{Q^*T} [\max \{(f_T S)_T - K, 0\}] \quad (11.49)$$

จาก (11.45), $(f_T S)_T$ มีการแจกแจงแบบล็อก-นอร์มอลและสมบัติมาร์ติงเกลที่มีความผันผวน $\bar{\sigma}_T$

โดยประยุกต์ใช้สูตรแบล็ก-โชลส์

$$C_0 = P_0^T ((f_T S)_0 N(d_1) - KN(d_2)) \quad (11.50)$$

$$\text{โดยที่ } d_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_T \sqrt{T}} \ln \left(\frac{(f_T)_0}{K} \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_T \sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \bar{\sigma}_T \sqrt{T}$$

จะเห็นว่าการคำนวณค่าความผันผวน $\bar{\sigma}_T$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของค่าความผันผวน $(f_T S)_T$ ง่ายและสะดวกต่อการใช้ในการคำนวณราคาคอลลอปชันตามสูตรของแบล็ก-โชลส์

ตัวอย่างที่ 11.6 สำหรับการคำนวณราคาของคอลลอปชันของกาแฟเกรด a ณ เวลา $t = 0$ พิจารณาคอลลอปชันสำหรับกาแฟเกรด a ที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 200$ บาท/กก. อัตราดอกเบี้ย $r_t = 0.05$ (5%) ราคาการใช้สิทธิ $K = 220$ บาท/กก. เวลาครบกำหนด $T = 1$ ปี ความผันผวน $\sigma_s = 0.2$, $\sigma_r = 0.15$ และความสัมพันธ์ $\rho = 0.3$ จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลลอปชัน

วิธีทำ 1) คำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของกาแฟเกรด a f_T

$$\text{เนื่องจาก } f_T = S_0 e^{rT}$$

$$\text{โดยการแทนค่าได้ } f_T = 200 e^{0.05 \times 1} = 200 e^{0.05} \approx 200 \times 1.0513 = 210.26$$

2) คำนวณค่า σ_T

$$\text{เนื่องจาก } \sigma_T = \sqrt{\sigma_s^2 - \sigma_s \rho \sigma_r T + \frac{\sigma_r^2 T^2}{3}}$$

$$\text{โดยการแทนค่าได้ } \sigma_T = \sqrt{(0.2)^2 - 2 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.15 + \frac{(0.15)^2 \times 1^2}{3}} \approx 0.1718$$

3) คำนวณค่า d_1 และ d_2

$$\text{เนื่องจาก } d_1 = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{f_T}{K} \right) + \frac{\sigma_r^2 T}{2} \right) \text{ และ } d_2 = d_1 - \sigma_T \sqrt{T}$$

โดยการแทนค่าได้

$$d_1 = \frac{1}{0.1718\sqrt{1}} \left(\ln \left(\frac{210.26}{220} \right) + \frac{(0.1718)^2}{2} \right) \approx -0.1736$$

และ $d_2 = -0.1736 - 0.1718 \approx -0.3454$

4) คำนวณ $N(d_1)$ และ $N(d_2)$

โดยการเปิดตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ ได้

$$N(d_1) \approx 0.4310, \quad N(d_2) \approx 0.3646$$

5) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลอปชัน

เนื่องจาก $C_0 = P_0^T (f_T N(d_1) - KN(d_2))$

และ $P_0^T = e^{-rT} = e^{-0.05 \times 1} \approx 0.9512$

โดยการแทนค่าได้ $C_0 = 0.9512(210.26 \times 0.4310 - 220 \times 0.3646)$
 $= 0.9512 \times 9.818 \approx 9.34$ บาท

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของคอลอปชันสำหรับกาแฟเกรด a ณ เวลา $t = 0$ คือ 9.34 บาท



ทฤษฎีบท 11.2 กำหนดให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นเมเชอร์ฟอร์เวิร์ด Q^{*T} จะได้ว่าอัตราฟอร์เวิร์ด $f(t, T)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$df(t, T) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k(t, T)}{\partial T} \right) dW_t^k = \dot{\sigma}(t, T) \cdot dW_t \quad (11.51)$$

เมื่อ $\dot{\sigma}(t, T) = \left\langle \frac{\partial \sigma_1(t, T)}{\partial T}, \dots, \frac{\partial \sigma_N(t, T)}{\partial T} \right\rangle$ เป็นอนุพันธ์ของค่าความผันผวนของ $f(t, T)$ เมื่อ

$W_t = \langle W_t^1, \dots, W_t^N \rangle$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ ยิ่งไปกว่านั้น $f(t, T)$ มีสมบัติมาร์ติงเกลภายใต้ Q^{*T}

พิสูจน์ เนื่องจาก $f(t, T) = -\frac{\partial \ln(P_t^T)}{\partial T}$ โดยสมการ (11.5) จะได้ว่า $\dot{\sigma}(t, T) = -\frac{\partial \sigma(t, T)}{\partial T}$ เป็นส่วน

เบี่ยงเบนมาตรฐานของ $df(t, T)$ นั่นคือ $\sigma(t, T) = -\int_t^T \dot{\sigma}(t, s) ds$ พิจารณาตัวแบบ HJM ภายใต้ตัว

ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$df(t, T) = \sigma'(t, T) \cdot dZ_t + \left(\sigma'(t, T) \cdot \int_t^T \sigma'(t, s) ds \right) dt$$

$$= \sigma'(t, T) \cdot dZ_t - \sigma'(t, T) \cdot \sigma(t, s) dt \quad (11.52)$$

โดยการแทน $dZ_t = dW_t + \sigma(t; T) dt$ ในสมการ (11.52) จะได้

$$df(t, T) = \sigma'(t, T) \cdot (dW_t + \sigma(t; T) dt) - \sigma'(t, T) \cdot \sigma(t, s) dt = \sigma'(t, T) \cdot dW_t \quad (11.53)$$

เมื่อ W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการ $\square$

ตัวอย่างที่ 11.7 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอว์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent โดยใช้นิพจน์ HJM (heath-jarrow-morton) ที่มีการคำนวณราคาฟอว์เวิร์ด $f(t, T)$ สำหรับสินค้าโภคภัณฑ์โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma(t, T)$ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยกำหนดให้ความผันผวน $\sigma(t, T)$ ของน้ำมันดิบ brent มีค่าเท่ากับ $0.03 \times e^{-0.2(T-t)}$ และเวลา $T=1$ ปี จงคำนวณราคาฟอว์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent โดยใช้สมการ HJM ดังนี้

$$df(t, T) = \sigma'(t, T) \cdot dZ_t + \left(\sigma'(t, T) \cdot \int_t^T \sigma'(s, T) ds \right) dt$$

วิธีทำ เราสามารถคำนวณราคาฟอว์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent ได้ตามขั้นตอน ดังนี้

1) คำนวณ $\sigma(t, T)$ และหาอนุพันธ์ $\sigma'(t, T)$

เนื่องจาก $\sigma(t, T)$ ของน้ำมันดิบ brent มีค่าเท่ากับ $0.03 \times e^{-0.2(T-t)}$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\sigma(t, T)$ เทียบกับตัวแปร T

$$\sigma'(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} (0.03 \times e^{-0.2(T-t)}) = -0.2 \times 0.03 \times e^{-0.2(T-t)} = -0.006 \times e^{-0.2(T-t)}$$

เมื่อแทนค่า $t=0$ และ $T=1$ จะได้

$$\sigma'(0, 1) = -0.006 \times e^{-0.2(1-0)} = -0.006 \times e^{-0.2} \approx -0.006 \times 0.8187 \approx -0.004912$$

2) คำนวณ $\int_t^T \sigma(s, T) ds$

จากที่กำหนดให้ $\int_t^T \sigma(s, T) ds = \int_0^1 0.03 \times e^{-0.2(1-s)} ds$

$$= 0.03 \times \int_0^1 e^{-0.2+0.2s} ds = 0.03 \times e^{-0.2} \int_0^1 e^{0.2s} ds$$

$$= 0.03 \times 0.8187 \left[\frac{e^{0.2s}}{0.2} \right]_0^1 = 0.03 \times 0.8187 \left[\frac{e^{0.2} - 1}{0.2} \right]$$

$$= 0.02717397$$

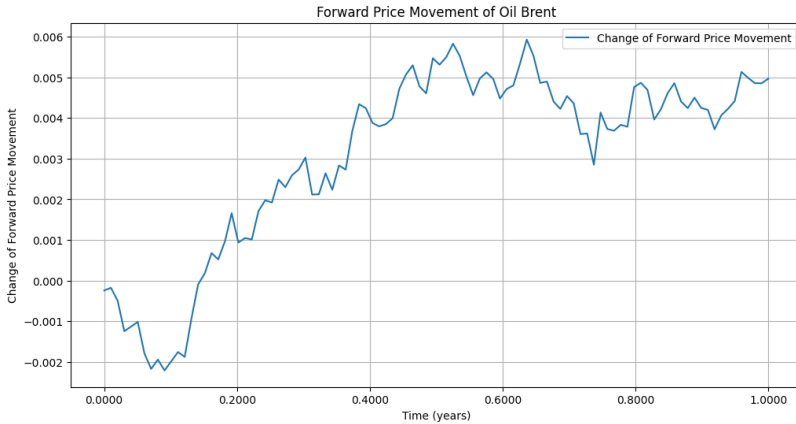
3) คำนวณ $df(t, T)$

จากสมการ $df(t, T) = \sigma'(t, T) \cdot dZ_t + \left(\sigma'(t, T) \cdot \int_t^T \sigma'(s, T) ds \right) dt$

ดังนั้น $df(t, T) = -0.004912 \cdot dZ_t + (-0.004912)(0.02717397)dt$

$$df(t, T) = -0.004912 \cdot dZ_t + (-0.00013342) \cdot dt$$

โดยกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอว์เวิร์ดน้ำมันดิบ brent เป็นดังนี้



รูปที่ 11.4 แสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอว์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent

กราฟข้างต้นแสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอว์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent ตามผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎี HJM โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma'(t, T)$ และการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน dZ_t □

11.3.2 ออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

พิจารณตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาที่เราไว้ 1 บาท อายุครบไถ่ถอนที่ $T + \Delta T$ เมื่อ $\Delta T > 0$ จะได้ว่าราคาของตราสารหนี้ดังกล่าวที่เวลา t เท่ากับ $P_t^{T+\Delta T}$ ในที่นี้ต้องการคำนวณราคาของคอลออปชันที่อายุ T และราคาใช้สิทธิ K จากสมการ (11.38) จะได้

$$\frac{d(f_T P^{T+\Delta T})_t}{(f_T P^{T+\Delta T})_t} = (\sigma(t, T + \Delta T) - \sigma(t, T)) \cdot dW_t \quad (11.54)$$

เมื่อ W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวเนียนภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ผลเฉลยของสมการ (11.54) อยู่ใน

รูป
$$(f_T P^{T+\Delta T})_t = \left(\frac{P_0^{T+\Delta T}}{P_0^T} \right) M_t \quad (11.55)$$

เมื่อ $M_t = \exp \left(\int_0^t (\sigma(s, T + \Delta T) - \sigma(s, T)) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma(s, T + \Delta T) - \sigma(s, T)\|^2 ds \right)$ ซึ่งมีสมบัติ

มาร์ติงเกลในรูปชี้กำลัง (exponential martingale) จากทฤษฎีบท 11.1 ราคาฟอว์เวิร์ดของคอ

ลอปชัน $(f_T P^{T+\Delta T})_T$ มีสมบัติมาร์ติงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$Q^{*T} \text{ นั่นคือ } C_0 = E^{Q^{*T}} \left[P_0^T (f_T P^{T+\Delta T})_T \right] = E^{Q^{*T}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \max \{ (f_T P^{T+\Delta T})_T - K, 0 \} \right] \quad (11.56)$$

โดยประยุกต์ใช้สูตรแบล็ก-โชลส์

$$C_0 = P_0^{T+\Delta T} N(d_1) - P_0^T K N(d_2) \quad (11.57)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{1}{s(T, T+\Delta T)\sqrt{T}} \ln \left(\frac{P_0^{T+\Delta T}}{K P_0^T} \right) + \frac{1}{2} s(T, T+\Delta T) \sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - s(T, T+\Delta T) \sqrt{T} \quad (11.58)$$

$$\text{และ} \quad s(T, T+\Delta T) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\sigma(s, T+\Delta T) - \sigma(s, T)\|^2 ds} \quad (11.59)$$

ซึ่งเป็นค่าความผันผวนของ M_t เรียกว่า “ค่าความผันผวนแฝง (implied volatility)” ของออปชัน ยกตัวอย่างเช่น สำหรับตัวแบบปัจจัยเดียว-วาซิเชค (1-factor Vasicek model)

$$\sigma(t, T) = \frac{\sigma(1 - e^{\kappa(T-t)})}{\kappa} \quad (11.60)$$

เมื่อ σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและ κ เป็นอัตราของค่าเฉลี่ยวงกลับ จะได้

$$s(T, T+\Delta T) = \sigma \left(\frac{1 - e^{-\kappa \Delta T}}{\kappa} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa T}} \quad (11.62)$$

ตัวอย่างที่ 11.8 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอว์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูป้องกันที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000 บาท ที่จะครบกำหนดในเวลา 1 ปีนับจากปัจจุบัน โดยใช้ตัวแบบ 1-factor Vasicek model โดยพิจารณาข้อมูลดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $\sigma = 0.01$, ค่า κ ที่ใช้ในการคำนวณมีค่า 5 ค่า ได้แก่ 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1 และ เวลา $T = 1$ ปี จงคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T, T+\Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ และแสดงกราฟเปรียบเทียบ

วิธีทำ 1) คำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T, T+\Delta T)$

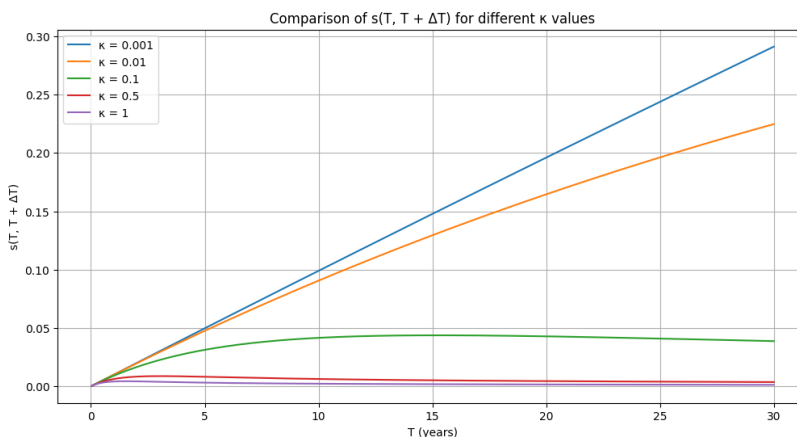
$$s(T, T+\Delta T) = \sigma \left(\frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa T}}{2\kappa T}}$$

สำหรับค่า κ แต่ละค่า $\kappa = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1$

2) สร้างกราฟเปรียบเทียบ $s(T, T+\Delta T)$ สำหรับค่า κ ต่าง ๆ

โค้ด python สำหรับการคำนวณและสร้างกราฟ

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
# define parameters
sigma = 0.01
kappa_values = [0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1]
t = np.linspace(0, 30, 1000)
# define function for s(t, t + Δt)
def s(t, kappa):
    return sigma * (1 - np.exp(-kappa * t)) / kappa * np.sqrt((1 - np.exp(-2 * kappa * t)) / (2 * kappa * t))
# plotting the graphs
plt.figure(figsize=(12, 6))
for kappa in kappa_values:
    s_values = s(t, kappa)
    plt.plot(t, s_values, label=f'κ = {kappa}')
plt.xlabel('t (years)')
plt.ylabel('s(t, t + Δt)')
plt.title('comparison of s(t, t + Δt) for different κ values')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



รูปที่ 11.5 เปรียบเทียบค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ ของอปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง
กรณี $\kappa = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1$

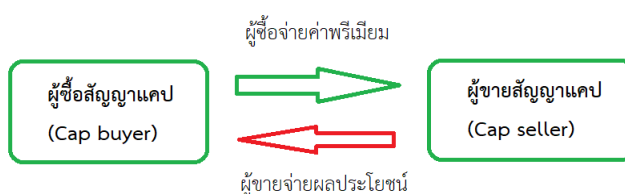
การคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ สำหรับค่า κ ต่าง ๆ จะช่วยให้ผู้จัดการพอร์ตการลงทุนสามารถวิเคราะห์และเปรียบเทียบความเสี่ยงในการลงทุนในพันธบัตรที่ไม่มีคูปอง และสามารถเลือกกลยุทธ์การลงทุนที่เหมาะสมตามระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้ □

11.4 สัญญาแคปของอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

ในหัวข้อนี้แนะนำโครงสร้างและเครื่องมือที่ใช้ในการบริหารจัดการความเสี่ยงในกลุ่มอนุพันธ์ของดอกเบี้ยซึ่งได้แก่สัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย และแนวทางที่เป็นที่นิยมในการกำหนดราคาของสัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย ซึ่งได้แก่ การกำหนดราคาโดยการประยุกต์ใช้แบบจำลองของแบล็กโชลส์ (black-scholes model) และนอกจากนี้ จะกล่าวถึงรูปแบบความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutral representation) ของแบบจำลองของแบล็กโชลส์ เพื่อที่จะนำไปสู่รูปปิดของผลเฉลยแบบทางคณิตศาสตร์ (closed form solution) ของแบบจำลองแบล็กโชลส์ เพื่อนำไปใช้ในการสร้างสูตรรูปปิดของการกำหนดราคาสัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ยให้ง่ายและสะดวกต่อการนำไปใช้งาน

11.4.1 สัญญาแคปของอัตราดอกเบี้ย

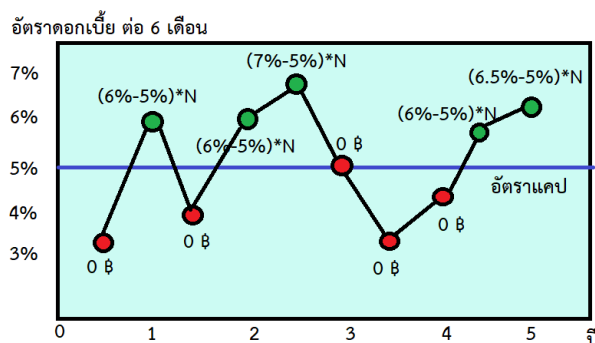
สัญญาแคป (cap agreement) หรือ interest rate cap เป็นสัญญาทางการเงินระหว่างสองฝ่ายที่ให้สิทธิแก่ผู้ซื้อสัญญาในการจำกัดความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating rate) โดยกำหนดขีดจำกัดสูงสุดของระดับอัตราดอกเบี้ย (อัตราแคป: cap rate) ในสัญญา โดยผู้ซื้อแคปได้รับประโยชน์เมื่ออัตราดอกเบี้ยในตลาดสูงขึ้นเหนืออัตราที่กำหนดไว้ (อัตราแคป) โดยผู้ขายจะต้องชดเชยส่วนต่างให้กับผู้ซื้อโดยความถี่ในการจ่ายอาจเป็นรายเดือน รายไตรมาส หรือรายครึ่งปี ในทางกลับกันผู้ซื้อจะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับผู้ขายเป็นการแลกเปลี่ยนสำหรับความคุ้มครองที่ได้รับจากสัญญาแคป



รูปที่ 11.6 การซื้อขายสัญญาแคปอัตราดอกเบี้ย

เราอาจพิจารณาสัญญาแคปว่าเป็นสัญญาซึ่งประกอบขึ้นด้วยชุดของคอลออปชันแบบยุโรป หรือ “แคปเล็ต” (call European options or caplets) บนอัตราดอกเบี้ยที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคปเดียวกัน แต่วันครบกำหนดแตกต่างกัน ถึงแม้ว่าสัญญาแคปจะเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากสำหรับผู้ที่ต้องการควบคุมและจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย อย่างไรก็ตามสัญญาแคปมีข้อจำกัดอยู่ในบางประการ เช่น สัญญาแคปเป็นเครื่องมือที่ต้องซื้อจากตลาดทุนซึ่งอาจมีการเรียกเก็บค่าธรรมเนียม และส่วนใหญ่จะต้องมีการประเมินความเสี่ยงทางเครดิตของผู้ขายสัญญาเพื่อประเมินความน่าเชื่อถือและความสามารถในการจ่ายค่าชดเชยให้กับผู้ซื้อ

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้: สมมติว่า บริษัท a ได้ทำสัญญากู้ยืมเงินจำนวนมากที่มีอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัว การที่อัตราดอกเบี้ยสามารถเพิ่มขึ้นได้จะส่งผลกระทบต่อความสามารถในการจ่ายชำระคืนเงินของบริษัท ด้วยเหตุนี้ บริษัท a ต้องการที่จะจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย ทางเลือกหนึ่งที่เป็นไปได้ของบริษัท a คือ ซื้อสัญญาแคปจากธนาคาร b ด้วยอัตราแคปที่ 5% ต่อ 6 เดือน ระยะเวลา 5 ปี ทั้งนี้ บริษัท a จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้ธนาคาร b ในแต่ละปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นมาอยู่ที่ 7% ต่อ 6 เดือน ธนาคาร b ต้องจ่ายค่าชดเชย $(7\% - 5\%) \times N$ ให้กับบริษัท a เมื่อ N เป็นเงินต้นอ้างอิงที่กำหนดไว้ในสัญญานั้นคือ บริษัท a จะได้รับความคุ้มครองจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย ทำให้บริษัทสามารถควบคุมค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับดอกเบี้ยในระยะเวลาที่กำหนดไว้ได้



รูปที่ 11.7 การจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ยด้วยสัญญาแคป

11.4.1.1 การกำหนดราคาสัญญาแคปด้วยแบบจำลองการเคลื่อนที่ของอัตราดอกเบี้ย

การกำหนดราคาสัญญาแคปจะต้องขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่

1) อัตราดอกเบี้ยในอนาคต ถ้ามีความคาดหวังว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตจะสูง ราคาของสัญญาแคปจะสูงด้วย เนื่องจากผู้ถือสัญญาแคปจะได้รับมูลค่าคุ้มครองหรือผลประโยชน์สูงเมื่ออัตราดอกเบี้ยเพิ่มสูงกว่าอัตราแคป

2) ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ยที่ผันผวนมากจะทำให้สัญญาแคปมีราคาสูง เนื่องจากมันเพิ่มโอกาสที่สัญญาแคปจะกำหนดให้ดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาด

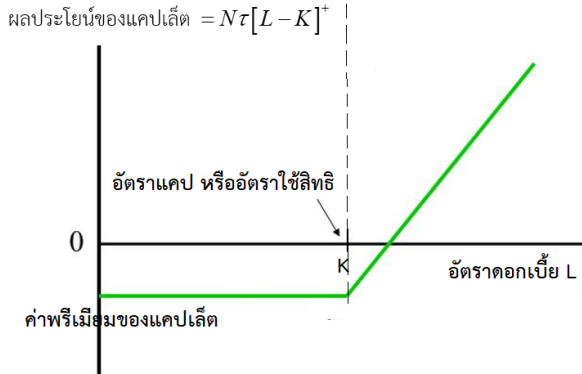
3) ระยะเวลาของสัญญา สัญญาแคปที่มีระยะเวลานานมากขึ้นจะมีราคาสูง ทั้งนี้เนื่องจากระยะเวลานานมากขึ้นจะเพิ่มโอกาสที่อัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเพิ่มขึ้นเหนืออัตราที่กำหนดไว้ในสัญญาแคป

4) อัตราแคป (cap rate) สัญญาแคปที่มีอัตราแคปสูงกว่าจะมีราคาถูกกว่าสัญญาแคปที่มีอัตราแคป ต่ำกว่าเนื่องจากสัญญาแคปที่มีอัตราแคปสูงกว่าเพิ่มโอกาสที่อัตราดอกเบี้ยในตลาดจะสูงกว่าอัตราแคปลดลง

กำหนดให้ $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots, T_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = T_1, T_2, \dots, T_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k T = T_k - T_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L(T_{k-1}, T_k)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในช่วง $[T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ k , $k = 1, 2, \dots, n$ สามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$\text{ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ } k = N\tau_k [L_k - K]^+ = N\tau_k \max \{L_k - K, 0\} \quad (11.63)$$

โดยที่ N เป็นเงินต้นอ้างอิง (principle notation) และ K แทนอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคป



รูปที่ 11.8 ผลประโยชน์ของคอลออปชันแบบยุโรปหรือแคปเล็ต

กำหนดให้ $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดในช่วง $[t, T]$ และ

$$F_t^{T+\Delta T} = F(t; T, T + \Delta T) = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{P_t^T}{P_t^{T+\Delta T}} - 1 \right) \quad (11.64)$$

เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าสำหรับ $[T, T + \Delta T]$ ณ วันที่ $t \leq T$, ผลประโยชน์ของแคปเล็ต c_k ที่

คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ คำนวณได้ ดังนี้

$$\text{ผลประโยชน์ของแคปเล็ต } c_k = N\tau_k [F_k - K]^+ = N\tau_k \max\{F_k - K, 0\} \quad (11.65)$$

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต c_k คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} P_0^{T_k} E[c_k] &= P_0^{T_k} E[N\tau_k [F_k - K]^+] \\ &= N\tau_k P_0^{T_k} E[[F_k - K]^+] = N\tau_k E \left[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds} [F_k - K]^+ \right] \end{aligned} \quad (11.66)$$

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต c_k ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็น

กลางต่อความเสี่ยง แทนด้วย $Caplet_k = P_0^{T_k} E^*[c_k]$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคปคือเงินที่ผู้ซื้อยินยอมจ่ายเพื่อแลกกับผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต ดังนั้นราคาของแคปจึงควรเท่ากับผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ของแต่ละ

ละแคปเล็ตในสัญญาแคป นั่นคือ ภายใต้ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง E^* ค่าพรีเมียม (ราคาของแคปที่เวลา $t=0$) คำนวณได้จาก

$$Cap = \sum_{k=1}^n Caplet_k = \sum_{k=1}^n P_0^{T_k} E^*[c_k] = N \sum_{k=1}^n \tau_k E^* \left[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds} [F_k - K]^+ \right] \quad (11.67)$$

ตัวอย่างที่ 11.9 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคป (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิง L_k , อัตราแคป K ที่ 5%

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

1) $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

2) อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ สำหรับแต่ละงวด

3) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

4) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด c_k ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

$$F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$$

5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

วิธีทำ 1) คำนวณ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

จากสูตร $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ จะได้ $P_{t_{k-1}}^{t_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_s ds}] = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_k ds} = e^{-r_k(t_k - t_{k-1})} = e^{-r_k \tau_k}$

และ $P_0^{t_k} = P_0^{t_{k-1}} P_{t_{k-1}}^{t_k}$

$P_0^{t_1} = e^{-0.05(0.25)} = 0.9876$	$P_0^{t_1} = e^{-0.05(0.25)} = 0.9876$
$P_{t_1}^{t_2} = e^{-0.051(0.25)} = 0.9873$	$P_0^{t_2} = P_0^{t_1} P_{t_1}^{t_2} = (0.9876)(0.9873) = 0.9751$
$P_{t_2}^{t_3} = e^{-0.055(0.25)} = 0.9863$	$P_0^{t_3} = P_0^{t_2} P_{t_2}^{t_3} = (0.9751)(0.9863) = 0.9617$
$P_{t_3}^{t_4} = e^{-0.045(0.25)} = 0.9888$	$P_0^{t_4} = P_0^{t_3} P_{t_3}^{t_4} = (0.9617)(0.9888) = 0.9509$

2) คำนวณ F_k สำหรับแต่ละงวด จากสูตร $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ จะได้

$$F_1 = \frac{1}{0.25} \left(\frac{1}{0.9876} - 1 \right) = 0.0505$$

$$F_2 = \frac{1}{0.25} \left(\frac{1}{0.9873} - 1 \right) = 0.0515$$

$$F_3 = \frac{1}{0.25} \left(\frac{1}{0.9863} - 1 \right) = 0.0556$$

$$F_4 = \frac{1}{0.25} \left(\frac{1}{0.9888} - 1 \right) = 0.0453$$

3) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

จากสูตร ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ $k = N\tau_k [L_k - K]^+ = N\tau_k \max\{L_k - K, 0\}$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 1 = $N\tau_1 \max(F_1 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.061 - 0.05, 0) = 2750$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 2 = $N\tau_2 \max(F_2 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.055 - 0.05, 0) = 1250$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 3 = $N\tau_3 \max(F_3 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.049 - 0.05, 0) = 0$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 4 = $N\tau_4 \max(F_4 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.057 - 0.05, 0) = 1750$$

4) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต c_k สำหรับแต่ละงวด

$$\text{จากสูตร } c_k = N\tau_k [F_k - K]^+ = N\tau_k \max\{F_k - K, 0\}$$

$$c_1 = N\tau_1 \max(F_1 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0505 - 0.05, 0) = 125$$

$$c_2 = N\tau_2 \max(F_2 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0515 - 0.05, 0) = 375$$

$$c_3 = N\tau_3 \max(F_3 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0556 - 0.05, 0) = 1400$$

$$c_4 = N\tau_4 \max(F_4 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0453 - 0.05, 0) = 0$$

5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

$$\text{จากสูตร } Caplet_k = P_0^{T_k} E^*[c_k] = P_0^{T_k} c_k$$

$$Caplet_1 = P_0^{t_1} \times c_1 = 0.9876 \times 125 = 123.45$$

$$Caplet_2 = P_0^{t_2} \times c_2 = 0.9751 \times 375 = 365.65$$

$$Caplet_3 = P_0^{t_3} \times c_3 = 0.9617 \times 1400 = 1346.38$$

$$Caplet_4 = P_0^{t_4} \times c_4 = 0.9505 \times 0 = 0$$

6) คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

$$\text{จากสูตร } Cap = \sum_{k=1}^n Caplet_k$$

$$\text{จะได้ } Cap = \sum_{k=1}^4 Caplet_k = 123.45 + 365.65 + 1346.38 + 0 = 1,835.48 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ราคาของสัญญาแคปที่มีมูลค่าหน้าตัว 1,000,000 บาท และมีอัตราแคปที่ 5% โดยคำนวณจากผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวดและมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต จะมีค่าเท่ากับ 1,835.48 บาท □

11.4.1.2 การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ (black-scholes model)

การกำหนดราคาของสัญญาแคปดอกเบียโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ เป็นการให้ทฤษฎีการกำหนดราคาอปชันแบบยุโรปด้วยตัวแบบแบล็กโชลส์ในการกำหนดราคาสัญญาแคปดอกเบีย ซึ่ง

สัญญาแคปดอกเบียนี้จะมีลักษณะเหมือนกับยุโรปเียนคอลอปชัน (European call option) โดยพิจารณาอัตราดอกเบี้ยแทนราคาหุ้นหรือราคาสินทรัพย์ โดยราคาของสัญญาแคปดอกเบียจะเท่ากับผลรวมของราคาแคปเล็ตที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากันแต่อายุของสัญญาต่างกัน โดยราคาของแคปเล็ตตามตัวแบบแบล็กโชลส์ คำนวณได้ตามสูตร ดังนี้

$$Caplet_k = N \tau_k P_0^{T_k} [F_k N(d_1^k) - KN(d_2^k)] \quad (11.68)$$

โดยที่ $Caplet_k$ เป็นราคาแคปเล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k , $P_t^{T_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t, T_k]$, $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) หรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่แคปเล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k , N เป็นเงินต้นอ้างอิง, K เป็นอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคป, $N(x)$ เป็นความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติ, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_1^k และ d_2^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_1^k = \frac{[\ln(F_k / K) + 0.5\sigma^2 T_k]}{\sigma \sqrt{T_k}} \quad \text{และ} \quad d_2^k = d_1^k - \sigma \sqrt{T_k} \quad (11.69)$$

$$\text{ดังนั้นจะได้ว่า} \quad Cap = \sum_{k=1}^n Caplet_k = \sum_{k=1}^n N \tau_k P_0^{T_k} [F_k N(d_1^k) - KN(d_2^k)] \quad (11.70)$$

หมายเหตุ การคำนวณค่าความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติ $N(x)$ สามารถคำนวณค่าได้จากตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติซึ่งปรากฏอยู่ในภาคผนวก หรือเพื่อความสะดวกอาจจะใช้คำสั่งฟังก์ชัน `normsdist(z)` ในโปรแกรม excel ก็ได้

ตัวอย่างที่ 11.10 การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ (black-scholes model) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และ กำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยใช้

อ้างอิง L_k , จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 5%, ค่าเบี้ยเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.02$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

1) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด $Caplet_k$

2) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 คำนวณ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวด

จากสูตร $P_{t_{k-1}}^{t_k} = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_k ds}$, $P_0^{t_k} = P_0^{t_{k-1}} P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $F_k = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{t_{k-1}}^{t_k}} - 1 \right)$ แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.9888	0.9509	0.0453

1) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$

จากสูตร

$$Caplet_k = N \tau_k P_0^{t_k} \left[F_k N(d_1^k) - K N(d_2^k) \right]$$

โดยที่ F_k เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $d_1^k = \frac{[\ln(F_k / K) + 0.5\sigma^2 T_k]}{\sigma \sqrt{T_k}}$ และ $d_2^k = d_1^k - \sigma \sqrt{T_k}$

$$\text{คำนวณ } d_1^1 = \frac{[\ln(F_1 / K) + 0.5\sigma^2 t_1]}{\sigma \sqrt{t_1}} = \frac{[\ln(0.0505 / 0.05) + 0.5(0.02^2)(0.25)]}{0.02\sqrt{0.25}} = 1.00003$$

$$d_2^1 = d_1^1 - \sigma \sqrt{t_1} = 1.00003 - 0.02\sqrt{0.25} = 0.99003$$

$$N(d_1^1) = N(1.00003) = 0.84135$$

$$N(d_2^1) = N(0.99003) = 0.83892$$

$$Caplet_1 = N\tau_1 P_0^{t_1} [F_1 N(d_1^1) - KN(d_2^1)]$$

$$= 1,000,000(0.25)(0.9876)[0.0505(0.84135) - 0.05(0.83892)] = 133.88$$

สำหรับ $Caplet_k, k = 2, 3, 4$ คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	t_k	τ_k	$P_0^{t_k}$	F_k	d_1^k	d_2^k	$N(d_1^k)$	$N(d_2^k)$	$Caplet_k$
1	0.25	0.25	0.9876	0.0505	1.00003	0.99003	0.84135	0.83892	133.88
2	0.50	0.25	0.9751	0.0515	2.09719	2.08305	0.98201	0.98138	366.83
3	0.75	0.25	0.9617	0.0556	6.13782	6.12050	1.00000	1.00000	1346.38
4	1.00	0.25	0.9509	0.0453	-4.92580	-4.94580	0.00000	0.00000	0.00

2) คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

$$\text{จากสูตร } Cap = \sum_{k=1}^n Caplet_k$$

$$\text{จะได้ } Cap = \sum_{k=1}^4 Caplet_k = 133.88 + 366.83 + 1346.38 + 0 = 1,847.09$$

ดังนั้น ราคาของสัญญาแคปที่มีมูลค่าหน้าตัว 1,000,000 บาท และมีอัตราแคปที่ 5% โดยคำนวณจากผลประโยชน์ของแคปเฉลี่ยในแต่ละงวดและมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเฉลี่ย จะมีค่าเท่ากับ 1,857.09 บาท □

11.4.1.3 การกำหนดราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์

โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (Gaussian term-structure model: GTSM) คือตัวแบบที่ใช้ในการระบุโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยในอนาคตโดยสมมติให้ระดับอัตราดอกเบี้ยปัจจุบันและความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย (volatility) มีการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian distribution) ในตัวแบบจำลองที่ผ่านมาเช่น ตัวแบบฮีส-จาร์โรว์-มอร์ดัน (HJM) อัตราดอกเบี้ยดอกเบี้ยตามระยะเวลาที่แตกต่างกันอาจมีความผันผวนที่ไม่แน่นอน แต่ในตัวแบบโครงสร้างของเกาส์จะสมมติให้ความผันผวนนั้นคงที่

ตัวแบบโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์มีหลายรูปแบบแต่ละรูปแบบมีความซับซ้อนแตกต่างกันขึ้นอยู่กับสมมติฐานและตัวแบบอัตราดอกเบี้ยที่เลือกใช้ โดยตัวแบบอัตราดอกเบี้ยที่เป็นที่นิยมได้แก่ ตัวแบบวาซิเชค และ ตัวแบบฮัลล์-ไวท์ ซึ่งเป็นตัวแบบในกรอบโครงสร้างของฮีส-จาร์โรว์-มอร์ดันที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้

ในหัวข้อนี้นำเสนอสูตรรูปปิดของการกำหนดราคาสัญญาแคปในรูปสูตรของแบล็กโชลส์ ภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ กำหนดให้ $BSP(S, K, T, \sigma)$ แทนสูตรของแบล็กโชลส์ของ พุทอปชันบนสินค้าอ้างอิงที่มีราคาปัจจุบัน S , ราคาใช้สิทธิ K , อายุครบกำหนด T , และค่า ความผันผวน σ (คงที่) จะได้ว่าราคาของสัญญาแคปที่มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ อายุครบกำหนด T_n สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$Cap = \sum_{k=1}^n caplet_k \quad (11.71)$$

เมื่อ $caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k} BSP(x_k, 1, T_k, s_k)$, N เป็นเงินต้นอ้างอิง

$$\text{และ } x_k = \frac{1 + \tau_k \cdot \bar{R}}{1 + \tau_k \cdot F_k} \text{ และ } s_k = \sqrt{\frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \|\sigma(t, T_k) - \sigma(t, T_{k-1})\|^2 dt}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (11.72)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของตัวแบบเกาส์ 1 ปัจจัย จะได้ $s_k = \sigma \left(\frac{1 - e^{-\kappa \Delta T_k}}{\kappa} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa T_k}}{2\kappa T_k}}$

$$\text{และ } BSP(S, K, T, \sigma) = KP_0^T N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (11.73)$$

$$\text{โดยที่ } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S}{KP_0^T}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (11.74)$$

$$\text{นั่นคือ } BSP(x_k, 1, T_k, s_k) = P_0^{T_k} N(-d_2^k) - x_k N(-d_1^k)$$

$$\text{โดยที่ } d_1^k = \frac{1}{s_k\sqrt{T_k}} \ln\left(\frac{x_k}{P_0^T}\right) + \frac{1}{2}s_k\sqrt{T_k}, \quad d_2^k = d_1^k - s_k\sqrt{T_k}$$

หมายเหตุ ในบริบทของการกำหนดราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์สำหรับสินทรัพย์สำหรับการใช้งานจริงมีสองค่าที่สำคัญ ได้แก่ อัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ และ ราคาใช้สิทธิ K ซึ่งทั้งสองค่านี้มีความแตกต่างกันดังนี้

1) อัตราใช้สิทธิ (R) : อัตราใช้สิทธิ R หมายถึงอัตราดอกเบี้ยที่ใช้สำหรับการปรับราคาของสินค้าที่มีการใช้สิทธิ เช่น การคำนวณผลตอบแทนจากการลงทุน หรือการปรับอัตราดอกเบี้ยในสัญญาต่าง ๆ ในสมการ (11.71) R ถูกใช้ในการคำนวณค่า Cap เพื่อปรับราคาของพุทอปชันให้มีความเป็นปัจจุบัน โดยอัตราใช้สิทธิ R จะถูกนำไปคำนวณร่วมกับค่า ΔT_k ซึ่งเป็นระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อให้ได้ผลตอบแทนจากการลงทุนที่ถูกต้อง

2) ราคาใช้สิทธิ (K): ราคาใช้สิทธิ K หมายถึงราคาที่ผู้ถือออปชันสามารถซื้อหรือขายสินทรัพย์พื้นฐานได้เมื่อถึงวันครบกำหนดของออปชัน ในสมการ $BSP(S, K, T, \sigma)$ ตามสมการ (11.73) จะใช้ราคาใช้สิทธิ K เพื่อคำนวณมูลค่าของออปชัน (ทั้งพุทและคอลออปชัน) โดยที่ K จะเป็นตัวกำหนดว่าผู้ถือออปชันจะเลือกใช้สิทธิเมื่อราคาสินทรัพย์อ้างอิงถึงราคาใช้สิทธิหรือไม่

ตัวอย่างของอัตราใช้สิทธิ R

สมมติว่ามีอัตราใช้สิทธิ $R = 5\%$ ต่อปี ใช้ในการปรับราคาของพุทออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ $K = 100$ บาท ระยะเวลาครบกำหนด 1 ปี และมีค่า $\Delta T_k = 0.25$ ปี ในกรณีนี้อัตราใช้สิทธิ R จะถูกใช้ในการคำนวณผลตอบแทนจากการลงทุนและปรับราคาออปชันให้สอดคล้องกับระยะเวลาที่เหลืออยู่ของสัญญา

ตัวอย่างที่ 11.11 จงคำนวณราคาสัญญาแลกเปลี่ยนใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm) โดยสมมติว่าพิจารณาสัญญาแลกเปลี่ยนสำหรับหุ้นอ้างอิงตามข้อมูลต่อไปนี้

- มูลค่าหน้าตัวของแลกเปลี่ยนเท่ากับ 1,000,000 บาท
- มีอัตราแลกเปลี่ยน (cap rate) ที่ 5%
- ระยะเวลาถึงวันครบกำหนด (time to maturity, T) 1 ปี
- ค่าความผันผวน (volatility, σ) 0.25
- จำนวนงวด (number of periods, n) 4 งวด
- อัตราดอกเบี้ยในตลาด (risk-free interest rate, r) 5%
- ค่า κ (mean reversion rate): 0.03
- ระยะเวลาระหว่างงวด (time interval, τ_k) 0.25 ปี
- มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R} = 5\%$ ต่อปี

วิธีทำ คำนวณราคาสัญญาแลกเปลี่ยนใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm) ตามขั้นตอน ดังนี้

1) คำนวณ s_k สำหรับแต่ละงวด k

จากสูตร
$$s_k = \sigma \left(\frac{1 - e^{-\kappa \tau_k}}{\kappa} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa T_k}}{2\kappa T_k}} \quad \text{ในที่นี้ } \tau_k = 0.25 \text{ และ } \kappa = 0.03$$

$$\text{ดังนั้น } s_1 = 0.25 \left(\frac{1 - e^{-0.03(0.25)}}{0.03} \right) \sqrt{\frac{1 - e^{-2(0.03)(0.25)}}{2(0.03)(0.25)}} = 0.062033$$

สำหรับผลการคำนวณ $s_k, k = 2, 3, 4$ แสดงในตารางถัดจากนี้

$$\text{จากสูตร } P_t^T = e^{-\int_t^T r_s ds} \text{ และ } F_k = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right) \text{ แสดงในตารางต่อไปนี้}$$

$$\text{จะได้ } P_{t_{k-1}}^{t_k} = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_s ds} = e^{-0.05(t_k - t_{k-1})} = e^{-0.05\tau_k} \text{ และ } P_0^{t_k} = e^{-0.05t_k}$$

$$\text{และ } F_k = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{e^{-0.05\tau_k}} - 1 \right) = \frac{e^{0.05\tau_k} - 1}{\tau_k} = \frac{e^{0.05(0.25)} - 1}{0.25} = 0.05031, k = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{จากสูตร } caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k} BSP(x_k, 1, T_k, s_k)$$

$$\text{เมื่อ } x_k = \frac{1 + \tau_k \cdot \bar{R}}{1 + \tau_k \cdot F_k} \text{ และ } BSP(x_k, 1, T_k, s_k) = P_0^{T_k} N(-d_2^k) - x_k N(-d_1^k)$$

$$\text{โดยที่ } d_1^k = \frac{1}{s_k \sqrt{T_k}} \ln \left(\frac{x_k}{P_0^{T_k}} \right) + \frac{1}{2} s_k \sqrt{T_k}, d_2^k = d_1^k - s_k \sqrt{T_k}$$

ผลลัพธ์ที่คำนวณได้แสดงในตารางด้านล่าง

k	t_k	τ_k	s_k	$P_0^{t_k}$	F_k	x_k
1	0.25	0.25	0.062033	0.9876	0.05031	0.999923
2	0.50	0.25	0.061802	0.9751	0.05031	0.999923
3	0.75	0.25	0.061572	0.9617	0.05031	0.999923
4	1.00	0.25	0.061344	0.9509	0.05031	0.999923
d_1^k		d_2^k	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$	$BSP(x_k, 1, T_k, s_k)$	$caplet_k$
0.900513		0.775513	0.183923582	0.219018	0.032388	7,996.47
1.070301		0.893525	0.142241837	0.185788	0.03897	9,502.00
1.201809		0.985303	0.114718705	0.162238	0.041557	10,006.76
1.313813		1.063813	0.094454639	0.143707	0.042251	10,047.56

ดังนั้น ราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์

$$Cap = \sum_{k=1}^n caplet_k = 7,996.47 + 9,502.00 + 10,006.76 + 10,047.56 = 37,552.79 \text{ บาท} \quad \square$$

11.4.1.3 ค่าความผันผวนแฝงของสัญญาแคป

กำหนดให้ Cap แทนราคาของสัญญาแลกเปลี่ยนที่มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ อายุครบกำหนด T_n และ $\tau_k = \Delta T_k, k=1,2,\dots,n$ ค่าความผันผวนแฝง (implied volatility) ของสัญญาแลกเปลี่ยนแทนด้วย $\bar{\sigma}_n$ คือค่าความผันผวนที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$Cap = \sum_{k=1}^n NP_0^{T_k} \Delta T_k BSC(F_k, S_n, T_k, \bar{\sigma}_n) \quad (11.75)$$

$$\text{เมื่อ } S_n = \frac{\sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{T_k} F_k}{\sum_{k=1}^n \tau_k F_k} \text{ และ } BSC(S, K, T, \sigma) = SN(d_1) - KP_0^T N(d_2) \quad (11.76)$$

$$\text{โดยที่ } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S}{KP_0^T}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ค่าความผันผวนแฝงของสัญญาแลกเปลี่ยนเป็นมาตรวัดความเสี่ยงหรือความไม่แน่นอนในการเคลื่อนไหวของราคาแลกเปลี่ยนซึ่งเป็นความแปรปรวนของราคาแลกเปลี่ยนในตลาดซึ่งวัดจากการเคลื่อนไหวของราคาในอดีต

สำหรับแต่ละแลกเปลี่ยนอายุ $T_k, k=1,2,\dots,n$ ลำดับของค่าความผันผวนแฝงของแลกเปลี่ยน σ_k นิยามจากค่าความผันผวนซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$Cap(k) = \sum_{j=1}^k NP_0^{T_j} \tau_j BSC(F_j, S_k, T_j, \sigma_k) \quad (11.77)$$

ในโครงสร้างตัวแบบของเกาส์ลำดับของค่าความผันผวนแฝงของแลกเปลี่ยน σ_k จากสมการ (11.77)

และ ค่าความผันผวน $s_k = \sqrt{\frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \|\sigma(t, T_k) - \sigma(t, T_{k-1})\|^2 dt}$ จากสมการ (11.68) มีความสัมพันธ์กัน

$$\text{คือ } P_0^{T_k} BSP\left(\frac{1+\tau_k \cdot S_n}{1+\tau_k \cdot F_k}, 1, T_k, s_k\right) = P_0^{T_k} \tau_k BSC(F_k, S_n, T_k, \sigma_k) \quad (11.78)$$

โดยการค่าประมาณ

$$BSC(S, S, T, \sigma) = BSP(S, S, T, \sigma) \approx \frac{S\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \text{ และ } S_k = \frac{\sum_{j=1}^k \tau_j P_0^{T_j} F_j}{\sum_{k=1}^n \tau_k F_k} \approx F_k \quad (11.79)$$

จากสมการ (11.79) จะได้ว่า ค่าโดยประมาณของค่าความผันผวนแฝง s_k ของแลกเปลี่ยนจากตัวแบบเกาส์ คือ

$$s_k \approx \sigma_k \left(\frac{\tau_k F_k}{1 + \tau_k F_k} \right) \sqrt{1 + \frac{\tau_k}{T_k}} \quad (11.80)$$

ตัวอย่างที่ 11.12 จงคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 ในการกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็ก-โชลส์ของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และกำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิง L_k , จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 5%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.02$

วิธีทำ จากผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 11.10 ค่าของ $P_0^{t_k}$ และ F_k

งวดที่ k	t_k	$r(t) = r_k$	τ_k	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.25	0.050	0.25	0.9876	0.0505
2	0.50	0.051	0.25	0.9751	0.0515
3	0.75	0.055	0.25	0.9617	0.0556
4	1.00	0.049	0.25	0.9509	0.0453

ขั้นตอนการคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) ทำได้ดังนี้

$$1) \text{ คำนวณค่า } S_n \text{ จากสูตร } S_n = \frac{\sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} F_k}{\sum_{k=1}^n \tau_k F_k}$$

$$S_n = \frac{0.25(0.9878)(0.0505) + 0.25(0.9751)(0.0515) + 0.25(0.9617)(0.0556) + 0.25(0.9509)(0.0453)}{0.25(0.0505) + 0.25(0.0515) + 0.25(0.0556) + 0.25(0.0453)}$$

$$\approx 0.9686$$

2) คำนวณค่า s_k สำหรับ caplet ที่ 1 ($k=1,2,3,4$)

$$\text{จากสูตร } s_k \approx \sigma_k \left(\frac{\tau_k F_k}{1 + \frac{\tau_k S_n}{F_k}} \right)$$

สำหรับ $k=1$

$$s_1 \approx 0.02 \left(\frac{0.25(0.0505)}{1 + 0.25 \left(\frac{0.9686}{0.0505} \right)} \right) \approx 0.00004357$$

$$s_2 = 0.02 \left(\frac{0.25(0.0515)}{1 + 0.25 \left(\frac{0.9686}{0.0515} \right)} \right) \approx 0.002258$$

$$s_3 = 0.02 \left(\frac{0.25(0.0556)}{1 + 0.25 \left(\frac{0.9686}{0.0556} \right)} \right) \approx 0.002596$$

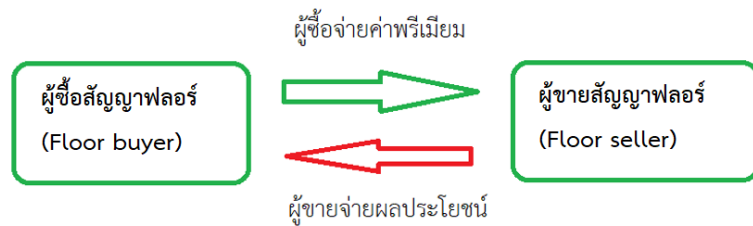
$$s_4 = 0.02 \left(\frac{0.25(0.0453)}{1 + 0.25 \left(\frac{0.9686}{0.0453} \right)} \right) \approx 0.00003569$$

□

11.4.2 สัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย

สัญญาฟลอร์ (floor agreement) เป็นสัญญาทางการเงินที่ถูกออกแบบมาเพื่อให้ความคุ้มครองต่อการลดลงของอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์จะกำหนดระดับขั้นต่ำที่อัตราดอกเบี้ยจะลดลง นั่นหมายความว่า ถ้าอัตราดอกเบี้ยลดลงต่ำกว่าจุดที่กำหนด (อัตราดอกเบี้ยฟลอร์) ผู้ขายฟลอร์จะต้องชดเชยส่วนต่างให้กับผู้ซื้อ ในทางกลับกันผู้ซื้อฟลอร์จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับผู้ขายเป็นการแลกเปลี่ยนสำหรับความคุ้มครองที่ได้รับจากสัญญาฟลอร์ เพื่อความเข้าใจพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ สมมติว่ากองทุนหนึ่งมีพอร์ตการลงทุนที่ประกอบด้วยหน่วยลงทุนเงินตราที่ผลตอบแทนขึ้นอยู่กับอัตราดอกเบี้ยในตลาดและกองทุนนี้ต้องการที่ป้องกันความเสี่ยงจากสถานะที่อัตราดอกเบี้ยจะลดลงอย่างมากซึ่งจะทำให้ผลตอบแทนของกองทุนลดลงอย่างมีนัยสำคัญ ในกรณีนี้กองทุนสามารถซื้อสัญญาฟลอร์จากธนาคาร โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยฟลอร์ที่ 2% และระยะเวลา 5 ปี กองทุนนี้

จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับธนาคารในแต่ละปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลงมาอยู่ที่ 1% ธนาคารจะต้องจ่ายค่าชดเชย ($2\% - 1\% = 1\%$) ให้กับกองทุนนี้ ซึ่งจะทำให้กองทุน ได้รับความคุ้มครองจากการลดลงของอัตราดอกเบี้ย ทำให้กองทุนสามารถควบคุมค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับดอกเบี้ยในระยะเวลาที่กำหนดไว้ได้



รูปที่ 11.9 การซื้อขายสัญญาฟลอร์อัตราดอกเบี้ย

11.4.2.1 การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์ตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด

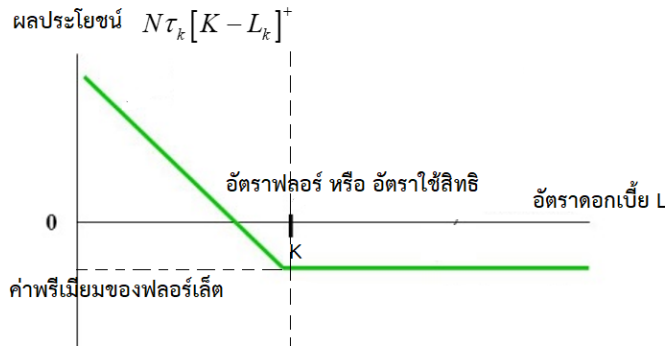
การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์นั้นทำได้ในลักษณะเดียวกับสัญญาแคป โดยราคาของสัญญาฟลอร์ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่

- 1) อัตราดอกเบี้ยในอนาคต: ถ้ามีความคาดหวังว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตจะลดต่ำลงมาก ราคาของสัญญาฟลอร์จะสูงด้วย
- 2) ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย: อัตราดอกเบี้ยที่ผันผวนมากจะทำให้สัญญาฟลอร์มีราคาสูง
- 3) ระยะเวลาของสัญญา: สัญญาฟลอร์ที่มีระยะเวลานานมากขึ้นจะมีราคาสูง
- 4) อัตราฟลอร์ (floor rate): สัญญาฟลอร์ที่มีอัตราฟลอร์สูงกว่าจะมีราคาแพงกว่าสัญญาฟลอร์ที่มีอัตราฟลอร์ต่ำกว่า

กำหนดให้ $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots, T_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = T_1, T_2, \dots, T_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k T = T_k - T_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L(T_{k-1}, T_k)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในช่วง $[T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, ผลประโยชน์ของฟลอร์เล็ดที่ k , $k = 1, 2, \dots, n$ สามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$\text{ผลประโยชน์ของฟลอร์เล็ดที่ } k = N\tau_k [K - L_k]^+ = N\tau_k \max \{K - L_k, 0\} \quad (11.81)$$

โดยที่ N เป็นเงินต้นอ้างอิง (principle notation) และ K แทนอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราฟลอร์



รูปที่ 11.10 ผลประโยชน์ของฟลอร์อปชันแบบยุโรปหรือฟลอร์ลีด

กำหนดให้ $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ และ $F_t^{T+\Delta T} = F(t; T, T + \Delta T) = \frac{1}{\Delta T} \left(\frac{P_t^T}{P_t^{T+\Delta T}} - 1 \right)$ เป็นอัตรา

ดอกเบี้ยล่วงหน้าสำหรับ $[T, T + \Delta T]$ ณ วันที่ $t \leq T$, ผลประโยชน์ของฟลอร์ลีด f_k ที่ภายใต้

อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ คำนวณได้ ดังนี้

$$\text{ผลประโยชน์ของฟลอร์ลีด } f_k = N\tau_k [K - F_k]^+ = N\tau_k \max \{K - F_k, 0\} \quad (11.82)$$

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของฟลอร์ลีด f_k คำนวณได้จาก

$$\text{Floorlet}_k = P_0^{T_k} E[f_k] = P_0^{T_k} E[N\tau_k [K - F_k]^+] = N\tau_k P_0^{T_k} E[[K - F_k]^+] \quad (11.83)$$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์คือเงินที่ผู้ซื้อยินยอมจ่ายเพื่อแลกกับผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต ดังนั้น ภายใต้ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง E^* ค่าพรีเมียม (ราคาของฟลอร์ที่เวลา $t=0$) คำนวณได้จาก

$$\text{Floor} = \sum_{k=1}^n \text{floorlet}_k^* = \sum_{k=1}^n P_0^{T_k} E^*[f_k] = N \sum_{k=1}^n \tau_k E^* \left[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds} [K - F_k]^+ \right] \quad (11.84)$$

ตัวอย่างที่ 11.13 จากข้อมูลตัวอย่างที่ 11.9 จงคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย สมมติว่าต้องการคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ (floor) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิเป็น LIBOR โดยสัญญามีอายุประมาณ 1 ปีและมีอัตราฟลอร์ (floor rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของ ฟลอร์ (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และมีข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิ อ้างอิง L_k , อัตราฟลอร์ K ที่ 5%, ความผันผวน $\sigma = 0.02$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 เราได้คำนวณค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวดแล้วซึ่งเป็น

ตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.9888	0.9509	0.0453

ต่อไปจะคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์แต่ละงวด f_k จากสูตร $f_k = N\tau_k \max(K - F_k, 0)$ ดังนั้น สำหรับแต่ละงวดจะได้

$$f_1 = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.05 - 0.0505, 0) = 0$$

$$f_2 = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.05 - 0.0515, 0) = 0$$

$$f_3 = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.05 - 0.0556, 0) = 0$$

$$f_4 = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.05 - 0.0453, 0) = 1,175$$

ต่อไปคำนวณมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ของฟลอร์แต่ละงวด $Floorlet_k$

จากสูตร $Floorlet_k = P_0^{t_k} f_k$ จะได้

$$\text{Floorlet}_1 = P_0^{t_1} \times f_1 = 0.9876 \times 0 = 0$$

$$\text{Floorlet}_2 = P_0^{t_2} \times f_2 = 0.9751 \times 0 = 0$$

$$\text{Floorlet}_3 = P_0^{t_3} \times f_3 = 0.9617 \times 0 = 0$$

$$\text{Floorlet}_4 = P_0^{t_4} \times f_4 = 0.9509 \times 1,175 = 1,116.81$$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์ Floor สามารถคำนวณได้ จาก $\text{Floor} = \sum_{k=1}^n \text{Floorlet}_k$

ดังนั้น จะได้ $\text{Floor} = 0 + 0 + 0 + 1,116.81 = 1,116.81$ บาท

ดังนั้น ราคาของสัญญาฟลอร์ที่มีมูลค่าหน้าตัว 1,000,000 บาท และมีอัตราฟลอร์ที่ 5% คือ 1,116.81 บาท □

11.4.2.2 การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์

การกำหนดราคาของสัญญาฟลอร์ดอกเบียโดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์ เป็นการใช้ทฤษฎีการกำหนดราคาอปชันแบบยุโรปด้วยตัวแบบแบล็กโพลส์ในการกำหนดราคาสัญญาฟลอร์ดอกเบียซึ่งสัญญาฟลอร์ดอกเบียนี้จะมีลักษณะเหมือนกับยุโรปเพนพุทอปชัน (European put option) โดยพิจารณาอัตราดอกเบี้ยแทนราคาหุ้นหรือราคาสินทรัพย์ โดยราคาของสัญญาฟลอร์ดอกเบียจะเท่ากับผลรวมของราคาฟลอร์เล็ตที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากันแต่อายุของสัญญาต่างกัน โดยราคาของฟลอร์เล็ตตามตัวแบบแบล็กโพลส์ คำนวณได้ตามสูตร ดังนี้

$$\text{Floorlet}_k = N \tau_k P_0^{T_k} \left[KN(-d_2^k) - F_k N(-d_1^k) \right] \quad (11.84)$$

โดยที่ Floorlet_k เป็นราคาฟลอร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k , $P_t^{T_k} = E^{Q^*} \left[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds} \right]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t, T_k]$, $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ เป็น อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) หรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่ฟลอร์เล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k , K เป็นอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราฟลอร์, N เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_1^k และ d_2^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_1^k = \frac{[\ln(F_k / K) + 0.5\sigma^2 T_k]}{\sigma\sqrt{T_k}} \quad \text{และ} \quad d_2^k = d_1^k - \sigma\sqrt{T_k} \quad (11.85)$$

ดังนั้น ราคาฟลอร์สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$Floor = \sum_{k=1}^n Floorlet_k = \sum_{k=1}^n N\tau_k P_0^{T_k} [KN(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (11.86)$$

ตัวอย่างที่ 11.14 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 จงคำนวณราคาของสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์ มีดังนี้ จำนวน $n = 4$, เงินต้นอ้างอิงของ floor (N) = 1,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$), ราคาใช้สิทธิ (K) = 0.05 (5%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.02 (2%)

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 เราได้คำนวณค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวดแล้วซึ่งเป็นดังตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$r(t) = r_k$	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.050	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.051	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.055	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.049	0.9888	0.9509	0.0453

1) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Floorlet_k$

จากสูตร

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k} [KN(-d_2^k) - F_k N(-d_1^k)]$$

โดยที่ F_k เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $d_1^k = \frac{[\ln(F_k / K) + 0.5\sigma^2 T_k]}{\sigma\sqrt{T_k}}$ และ $d_2^k = d_1^k - \sigma\sqrt{T_k}$

$$\text{คำนวณ } d_1^1 = \frac{[\ln(F_1 / K) + 0.5\sigma^2 t_1]}{\sigma\sqrt{t_1}} = \frac{[\ln(0.0505 / 0.05) + 0.5(0.02^2)(0.25)]}{0.02\sqrt{0.25}} = 1.00003$$

$$d_2^1 = d_1^1 - \sigma\sqrt{t_1} = 1.00003 - 0.02\sqrt{0.25} = 0.99003$$

$$N(-d_1^1) = N(-1.00003) = 0.15865$$

$$N(-d_2^1) = N(-0.99003) = 0.16108$$

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k} [KN(-d_2^k) - F_k N(-d_1^k)]$$

$$= 1,000,000(0.25)(0.9876)[0.05(0.16108) - 0.0505(0.15865)] = 10.41$$

สำหรับ $Floorlet_k, k = 2, 3, 4$ คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	t_k	τ_k	P_0^k	F_k	d_1^k	d_2^k	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$	$Floorlet_k$
1	0.25	0.25	0.9876	0.0505	1.00003	0.99003	0.15865	0.16108	10.43
2	0.50	0.25	0.9751	0.0515	2.09719	2.08305	0.01799	0.01862	1.16
3	0.75	0.25	0.9617	0.0556	6.13782	6.12050	0.00000	0.00000	0.00
4	1.00	0.25	0.9509	0.0453	-4.92580	-4.94580	1.00000	1.00000	1117.31

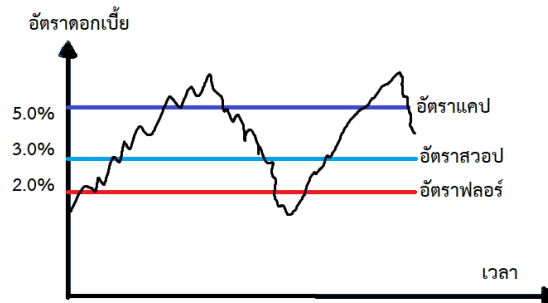
คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์ $Floor$ จากสูตร $Floor = \sum_{k=1}^n Floorlet_k$

ดังนั้นจะได้ $Floor = 10.43 + 1.16 + 0 + 1117.31 = 1,128.90$

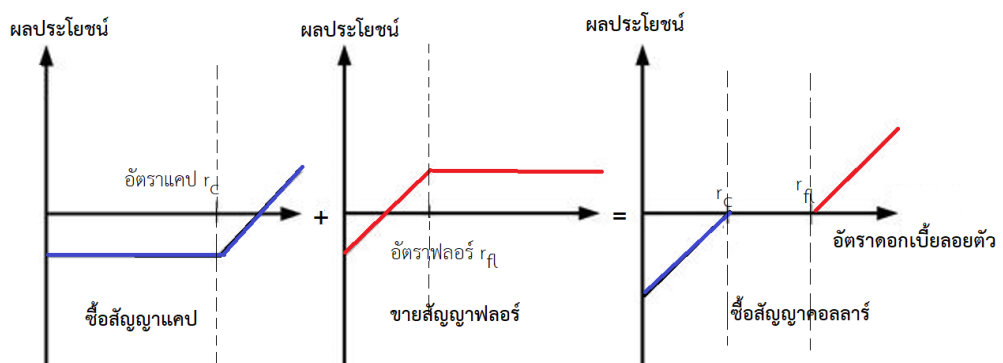
ดังนั้นราคาของสัญญาฟลอร์ที่มีมูลค่าหน้าตัว 1,000,000 บาท และมีอัตราฟลอร์ที่ 5% คือ 1,128.90 บาท □

11.4.4 สัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

สัญญาคอลลาร์ (collar agreement) เป็นสัญญาทางการเงินที่รวมการซื้อสัญญาแคปและการขายสัญญาฟลอร์พร้อมกัน โดยการขายฟลอร์และการซื้อแคปจะสามารถสร้างคอลลาร์ที่จำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยหรือราคาให้อยู่ในช่วงที่เราต้องการ เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น พิจารณาสมติว่าบริษัท a มีหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัว บริษัท a ต้องการจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ระหว่าง 2% ถึง 5% ในช่วง 5 ปีข้างหน้า ในกรณีนี้ บริษัท a สามารถสร้างคอลลาร์อัตราดอกเบี้ยโดยการซื้อสัญญาแคปที่ 5% และขายสัญญาฟลอร์ที่ 2% ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นมาอยู่ที่ 7% ผู้ขายของสัญญาแคปจะจ่ายค่าชดเชยแก่บริษัท a ส่วนต่างระหว่าง 7% และ 5% เท่ากับ 2% อย่างไรก็ตาม ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลงมาอยู่ที่ 1% บริษัท a จะต้องชำระค่าชดเชยให้แก่ผู้ซื้อสัญญาฟลอร์ซึ่งส่วนต่างระหว่าง 1% และ 2% เท่ากับ 1% เป็นต้น จะเห็นว่าสัญญาคอลลาร์ช่วยให้บริษัท a สามารถจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ในช่วงที่ต้องการคือช่วงระหว่าง 2% และ 5% ไม่ว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเปลี่ยนแปลงผันผวนมากเท่าใดก็ตาม



รูปที่ 11.12 การจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ช่วงที่ต้องการโดยใช้สัญญาคอลลาร์



รูปที่ 11.11 สัญญาคอลลาร์เป็นสัญญาที่รวมการซื้อสัญญาแคปและการขายสัญญาฟลอร์พร้อมกัน

11.4.5 การกำหนดราคาของสัญญาคอลลาร์

จากนิยามของสัญญาคอลลาร์จะพิจารณาคอลลาร์ประกอบด้วยสัญญาคอลลาร์เล็ต (collarlet) หลาย ๆ คอลลาร์เล็ต กำหนดให้ $Collarlet_k$ เป็นราคาคอลลาร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k โดยที่

$$\text{ราคาคอลลาร์เล็ต } (Collarlet_k) = \text{ราคาแคปเล็ต } (Caplet_k) - \text{ราคาฟลอร์เล็ต } (Floorlet_k) \quad (11.87)$$

$$\text{และ} \quad \text{ราคาคอลลาร์ } (Collar) = \sum_{k=1}^n Collarlet_k \quad (11.88)$$

โดยที่สามารถกำหนดราคาของคอลลาร์เล็ต ได้ดังนี้

-การกำหนดราคาสัญญาคอลลาร์เล็ตด้วยตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด

$$Collarlet_k = P_0^{T_k} \left(E \left[N \tau_k [F_k - K_{cap}]^+ \right] - E \left[N \tau_k [K_{floor} - F_k]^+ \right] \right) \quad (11.89)$$

-การกำหนดราคาสัญญาคอลลาร์เล็ตโดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์

$$Collarlet_k = N \tau_k P_0^{T_k} \left(\left[F_k N(d_{1K_{cap}}^k) - K_{cap} N(d_{2K_{cap}}^k) \right] - \left[K_{floor} N(-d_{2K_{floor}}^k) - F_k N(-d_{1K_{floor}}^k) \right] \right) \quad (11.90)$$

โดยที่ $Floorlet_k$ เป็นราคาฟลอร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k , $P_t^{T_k} = E^{Q^*} \left[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds} \right]$ เป็นตัว

ประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t, T_k]$, $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ เป็นอัตราดอกเบี้ย

ล่วงหน้าหรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่ฟลอร์เล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k , K_{cap} และ K_{floor} เป็นอัตราใช้สิทธิของแคปและฟลอร์ ตามลำดับ, N เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_{1x}^k และ d_{2x}^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_{1x}^k = \frac{[\ln(F_k / x) + 0.5\sigma^2 T_k]}{\sigma \sqrt{T_k}} \quad \text{และ} \quad d_{2x}^k = d_{1x}^k - \sigma \sqrt{T_k} \quad (11.91)$$

ตัวอย่างที่ 11.15 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 จงคำนวณราคาของสัญญาคอลลาร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย มีดังนี้ จำนวน $n = 4$, เงินต้นอ้างอิงของคอลลาร์ (N) = 1,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$), ราคาใช้สิทธิ ($K = K_{cap} = K_{floor}$) = 0.05 (5%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.02 (2%)

วิธีทำ เนื่องจาก ราคาคอลลาร์เล็ต ($Collarlet_k$) = $Caplet_k - Floorlet_k$

และ

$$\text{ราคาคอลลาร์ (Collar)} = \sum_{k=1}^n Collarlet_k$$

และจากโจทย์กำหนด ราคาใช้สิทธิ ($K = K_{cap} = K_{floor}$) = 0.05 โดยการใช้ผลลัพธ์จากตัวอย่างที่ 11.9 ตัวอย่างที่ 11.10 และตัวอย่างที่ 11.14 ค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k , $Floorlet_k$ และ $Caplet_k$ สำหรับแต่ละงวด แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงค่า $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k ,

งวดที่ k	$r(t) = r_k$	$P_{t_{k-1}}^k$	P_0^k	F_k
1	0.050	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.051	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.055	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.049	0.9888	0.9509	0.0453

ตารางแสดงค่า $d_1^k, d_2^k, N(d_1^k), N(d_2^k), N(-d_1^k), N(-d_2^k)$ สำหรับกรณีที่ราคาใช้สิทธิของ $(K = K_{cap} = K_{floor}) = 0.05$

งวดที่ k	d_1^k	d_2^k	$N(d_1^k)$	$N(d_2^k)$	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$
1	1.00003	0.99003	0.841352	0.838920	0.158648	0.161080
2	2.09719	2.08305	0.982012	0.981377	0.017988	0.018623
3	6.13782	6.12050	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
4	-4.92580	-4.94580	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000

คำนวณค่า $Caplet_k$, $Floorlet_k$ และ $Collarlet_k$ ที่มีราคาใช้สิทธิของ $(K = K_{cap} = K_{floor}) = 0.05$ ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$Caplet_k = N\tau_k P_0^k \left[F_k N(d_{1K_{cap}}^k) - K_{cap} N(d_{2K_{cap}}^k) \right],$$

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^k \left[K_{floor} N(-d_{2K_{floor}}^k) - F_k N(-d_{1K_{floor}}^k) \right],$$

และ $Collarlet_k = Caplet_k - Floorlet_k$ ค่าที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

$Caplet_k$	$Floorlet_k$	$Collarlet_k$
133.88	10.43	123.45
366.83	1.16	365.67
1346.38	0.00	1346.38
0.00	1117.31	-1117.31

คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ $Collar$ จากสูตร $Collar = \sum_{k=1}^n Collarlet_k$

ดังนั้นจะได้ $Collar = 123.45 + 365.67 + 1346.38 - 1117.31 = 718.19$ บาท

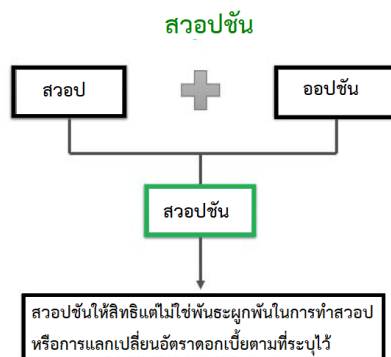
ดังนั้นราคาของสัญญาคอลลาร์ที่มีมูลค่าหน้าตัว 1,000,000 บาท โดยมีค่าใช้สิทธิของ cap ที่ 5% และ floor ที่ 5% คือ 718.19 บาท □

11.5 สัญญาสวอปชั้นของอัตราดอกเบี้ย

สวอปชั้น (swaption) หรือ สวอปออปชัน (swap option) เป็นสัญญาที่ให้สิทธิที่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสวอปชั้นในการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยหรือสินทรัพย์อื่นที่เกี่ยวข้องในอนาคตตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ล่วงหน้า นั่นหมายความว่าผู้ถือสวอปชั้นสามารถตัดสินใจว่าจะทำรายการสวอปหรือไม่ตามความพอใจของตนเอง สวอปชั้นสามารถใช้เพื่อจัดการความเสี่ยงทางดอกเบี้ยหรือความเสี่ยงในตลาดสินทรัพย์อื่น ๆ แต่สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงสัญญาสวอปชั้นของอัตราดอกเบี้ยเท่านั้น

เพื่อให้เข้าใจได้ชัดเจนขึ้น พิจารณากรณีต่อไปนี้ สมมติว่าบริษัทแห่งหนึ่งต้องการกู้เงินเพื่อขยายธุรกิจภายใน 3 ปีข้างหน้า แต่บริษัทกังวลว่าอัตราดอกเบี้ยอาจเพิ่มขึ้นในระยะเวลาสั้นเพื่อจัดการกับความเสี่ยงนี้ บริษัทสามารถซื้อสวอปชั้นจากธนาคารหรือสถาบันการเงินที่ขายสวอปชั้น สวอปชั้นนี้จะให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันต่อบริษัทนี้ที่จะสวอปอัตราดอกเบี้ยที่คงที่กำหนดไว้ล่วงหน้ากับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในอนาคต หากใน 3 ปีข้างหน้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ บริษัทนี้สามารถใช้สิทธิในสวอปชั้นเพื่อทำการสวอปอัตราดอกเบี้ยคงที่ที่กำหนดไว้ล่วงหน้ากับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ในทางตรงกันข้าม หากอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลง บริษัทสามารถเลือกที่จะไม่ใช้สิทธิตามที่ระบุไว้ในสัญญาสวอปชั้นและกู้เงินด้วยอัตราดอกเบี้ยในตลาด

จะเห็นว่า สวอปชั้นเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางดอกเบี้ยหรือความเสี่ยงในตลาดสินทรัพย์ แต่อย่างไรก็ตามการใช้สวอปชั้นมากเกินไปเช่นเดียวกับการจัดการความเสี่ยงอื่น ๆ อาจทำให้เกิดความเสี่ยงที่ไม่คาดคิดได้



รูปที่ 11.12 สวอปชันเป็นสัญญาที่ให้สิทธิที่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาในการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย

11.5.1 ประเภทของสวอปชัน

สวอปชันแบ่งประเภทตามการให้สิทธิเป็น 2 ประเภท ได้แก่ สวอปชันผู้จ่าย (payer swaption) และ สวอปชันผู้รับ (receiver swaption)

1) สวอปชันผู้จ่าย เป็นสัญญาสวอปชันที่ให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สถานะของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่และได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าในอนาคตอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจะสูงกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่หรือไม่ ดังนั้น สวอปชันผู้จ่ายเป็นเครื่องมือในการประกันความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย

2) สวอปชันผู้รับเป็นสัญญาประเภทที่ให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะรับอัตราดอกเบี้ยคงที่และจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าในอนาคตอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจะต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่หรือไม่ ดังนั้น สวอปชันผู้รับเป็นเครื่องมือในการประกันความเสี่ยงจากการลดลงของอัตราดอกเบี้ย

11.5.2 การกำหนดราคาของสัญญาสวอปชัน

พิจารณาสัญญาสวอป กำหนดให้ $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k t = t_k - t_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L(t_{k-1}, t_k)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating rate) ในช่วง $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ และให้ F แทนอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed rate) โดยที่ N แทนเงินต้นอ้างอิง (principle notation) ของสัญญาสวอป

และ $P_t^{t_k} = E^{Q^*} \left[e^{-\int_t^{t_k} r_s ds} \right]$ เป็นตัวประกอบส่วนลด ซึ่ง $L_k = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{t_{k-1}}^{t_k}} - 1 \right)$ จะได้ว่า

การจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ที่เวลา t_k จะเท่ากับ

$$(\Delta_k T) FN = \tau_k FN, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11.92)$$

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ $t = t_0$ เท่ากับ

$$PV^{fixed} = \sum_{k=1}^n \tau_k P_{t_0}^{t_k} FN = \sum_{k=1}^n \tau_k E^{Q^*} \left[e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} FN \right] \quad (11.93)$$

การจ่ายของฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่เวลา t_k จะเท่ากับ

$$(\Delta_k T) L_k N = \tau_k L_k N, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (11.94)$$

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t = t_0$ เท่ากับ

$$PV^{float} = \sum_{k=1}^n \tau_k P_{t_0}^{t_k} L_k N = \sum_{k=1}^n \left(\tau_k E^{Q^*} \left[e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} L_k N \right] \right) \quad (11.95)$$

ดังนั้น ราคาของสวอปที่เวลา $t = t_0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่) เท่ากับ

$$swap = PV^{fixed} - PV^{float} = N \sum_{k=1}^n \tau_k P_{t_0}^{t_k} (L_k - F) = N \sum_{k=1}^n \left(\tau_k E^{Q^*} \left[(L_k - F) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right) \quad (11.96)$$

ยิ่งไปกว่านั้นหากนิยามอัตราสวอป (swap rate) เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่ F^{swap} ที่เวลา $t=0$ ซึ่งทำ

ให้ $swap = \sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} (L_k - F^{swap}) = 0$ โดยใช้ $L_k = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{t_{k-1}}^{t_k}} - 1 \right)$ และแก้สมการจะได้ อัตราสวอป

$$\text{เท่ากับ} \quad F^{swap} = \frac{1 - P_0^{t_n}}{\sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k}} \quad (11.97)$$

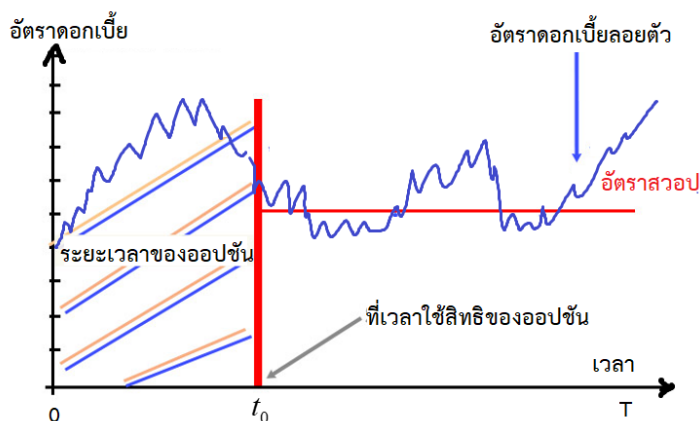
สำหรับสัญญาสวอปชั้นผู้จ่าย (payer swaption) ให้สิทธิแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สถานะของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่และได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

ดังนั้นมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชั้นผู้จ่าย ที่เวลา $t = t_0$ เท่ากับ

$$Pof^{payer\ swaption} = \max \{ swap, 0 \} = N \max \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\tau_k E^{Q^*} \left[(L_k - F) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right), 0 \right\} \quad (11.98)$$

ดังนั้น ราคาของสวอปชั้นผู้จ่ายซึ่งเป็นมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชั้นผู้จ่ายที่เวลา $t=0$ คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}
 \text{payer swaption} &= NP_0^{t_0} \max \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\tau_k E^{Q^*} \left[(L_k - F) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right), 0 \right\} \\
 &= NE^{Q^*} \left[e^{-\int_0^{t_0} r_s ds} \max \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\tau_k E^{Q^*} \left[(L_k - F) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right), 0 \right\} \right] \quad (11.99)
 \end{aligned}$$



รูปที่ 11.13 ทำสัญญาสวอปชันที่เวลาปัจจุบัน ($t=0$) ระยะเวลาใช้สิทธิในลักษณะออปชันของสัญญาสวอปชันที่เวลา $t=t_0$

ตัวอย่างที่ 11.16 สำหรับการคำนวณราคาสวอปชันผู้จ่ายซึ่งสัญญาระบุข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ เงินต้นอ้างอิง (n) = 1,000,000 บาท, จำนวนงวดการจ่ายดอกเบี้ย $n=4$, ระยะเวลางวด $\tau_k = 0.25$, อัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k และ อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F = 5\%$ และ

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

- 1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ ที่เวลา $t = 0$
- 2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t = 0$

3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t = 0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปขั้นผู้จ่าย

6) คำนวณราคาของสวอปขั้นผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

วิธีทำ 1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่

จากสูตร $PV^{\text{fixed}} = \sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} FN$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด จะได้

$$\begin{aligned} PV^{\text{fixed}} &= \sum_{k=1}^4 \tau_k P_0^{t_k} FN = FN \sum_{k=1}^4 \tau_k P_0^{t_k} \\ &= (0.05)(1,000,000)(0.25 \times 0.9876 + 0.25 \times 0.9751 + 0.25 \times 0.9617 + 0.25 \times 0.9505) \\ &= 48,436.25 \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่เท่ากับ 48,436.25 บาท

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

จากสูตร $PV^{\text{float}} = \sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} L_k N = N \sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} L_k$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด จะได้

$$\begin{aligned} PV^{\text{float}} &= N \sum_{k=1}^4 \tau_k P_0^{t_k} L_k \\ &= 1,000,000[(0.25)(0.9876)(0.061) + (0.25)(0.9751)(0.055) \\ &\quad + (0.25)(0.9617)(0.049) + (0.25)(0.9505)(0.057)] \\ &= 53,790.39 \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเท่ากับ 53,790.39 บาท

3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t = 0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

จากสูตร $\text{swap} = PV^{\text{fixed}} - PV^{\text{float}}$

$$\begin{aligned} \text{จาก 2) และ 3) จะได้} \quad \text{swap} &= 48,436.25 - 53,790.39 \\ &= -5,354.14 \end{aligned}$$

ดังนั้น ราคาสวอปที่เวลา $t = 0$ เท่ากับ -5,354.14 บาท

4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

จากสูตร $F^{\text{swap}} = \frac{1 - P_0^{t_n}}{\sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k}}$ โดยการแทนค่า $\tau_k, P_0^{t_k}$ จะได้

$$F^{swap} = \frac{1 - 0.9505}{0.25 \times 0.9876 + 0.25 \times 0.9751 + 0.25 \times 0.9617 + 0.25 \times 0.9505} = 0.0511$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate) เท่ากับประมาณ 0.0511 หรือ 5.11%

5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย

จากสูตร Pof payer swaption = $N \max \left(\sum_{k=1}^n \tau_k P_0^{t_k} (L_k - F), 0 \right)$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่กำหนดให้ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \tau_k P_0^{t_k} (L_k - F) &= 0.25 \times 0.9876 \times (0.061 - 0.051) + 0.25 \times 0.9751 \times (0.055 - 0.051) \\ &\quad + 0.25 \times 0.9617 \times (0.049 - 0.051) + 0.25 \times 0.9505 \times (0.057 - 0.051) \\ &= 0.004390125 \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

$$\text{Pof payer swaption} = 1,000,000 \times \max(0.004390125, 0) = 4,390.13 \text{ บาท}$$

6) คำนวณราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

เนื่องจาก ราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$ เท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

ดังนั้น ราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$ เท่ากับ 4,390.13 บาท □

บทสรุปท้ายบทที่ 11

ในบทที่ 11 นี้อธิบายถึงเครื่องมือทางการเงินที่สำคัญสำหรับการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน ได้แก่ สัญญาแคป (Cap) สัญญาฟลอร์ (Floor) สัญญาคอลลาร์ (Collar) และสัญญาสวอปชัน (Swaption) โดยเนื้อหาในบทนี้ครอบคลุมตั้งแต่ทฤษฎีพื้นฐาน ไปจนถึงการประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง เนื้อหาสำคัญประกอบด้วย

1) ทฤษฎีพื้นฐานและกรอบแนวคิด

โดยเริ่มต้นด้วยการนำเสนอ ทฤษฎีของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน (Heath-Jarrow-Morton Theory) และ เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด (Forward Measure) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการทำความเข้าใจการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาอนุพันธ์ โดยทั้งสองทฤษฎีนี้ช่วยอธิบายการ

สร้างแบบจำลองทางการเงินในตลาดทุนที่มีความซับซ้อนและความผันผวนสูง เช่น ตลาดอัตราดอกเบี้ย

2) ลักษณะและการทำงานของสัญญาแต่ละประเภท

- **สัญญาแคป (Cap Agreement)**

เป็นสัญญาทางการเงินที่ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยที่เพิ่มสูงขึ้นในอนาคต โดยกำหนดเพดานอัตราดอกเบี้ย (Cap Rate) ที่ไม่สามารถเกินขอบเขตที่กำหนดไว้ ทำให้ผู้ถือสัญญาสามารถควบคุมต้นทุนการเงินในช่วงที่อัตราดอกเบี้ยมีความผันผวน

- **สัญญาฟลอร์ (Floor Agreement)**

เป็นสัญญาที่ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยที่ลดต่ำลงเกินระดับที่กำหนดไว้ ทำให้ผู้ถือสัญญามั่นใจได้ว่าจะได้รับผลตอบแทนขั้นต่ำ (Floor Rate) ในช่วงที่อัตราดอกเบี้ยลดลง

- **สัญญาคอลลาร์ (Collar Agreement)**

เป็นการรวมคุณสมบัติของสัญญาแคปและฟลอร์ ทำให้สามารถกำหนดขอบเขตของอัตราดอกเบี้ยสูงสุดและต่ำสุดในอนาคต โดยผู้ถือสัญญาจะได้รับประโยชน์จากการลดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงที่กำหนด

- **สัญญาสวอปชัน (Swaption)**

เป็นสัญญาออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือในการเข้าทำสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยในอนาคต โดยแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่

- **Payer Swaption:** ให้สิทธิเข้าทำสัญญาสวอปแบบจ่ายคงที่-รับลอยตัว
 - **Receiver Swaption:** ให้สิทธิเข้าทำสัญญาสวอปแบบรับคงที่-จ่ายลอยตัว
- สวอปชันช่วยให้ผู้ถือสามารถล็อกอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า และมีความยืดหยุ่นในการตัดสินใจว่าจะใช้สิทธิหรือไม่ ทั้งนี้เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

3) การกำหนดราคาและการประเมินมูลค่า

ในบทนี้ยังกล่าวถึงวิธีการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน โดยใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์และสถิติ เช่น การประเมินราคาด้วย Black-Scholes Model และ Monte Carlo Simulation พร้อมทั้งอธิบายปัจจัยที่มีผลต่อมูลค่าของสัญญา เช่น ระยะเวลาสัญญา อัตราดอกเบี้ยในตลาด และความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

4) การประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง

สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการบริหารความเสี่ยงทางการเงินในตลาดทุนโลก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสถานการณ์ที่อัตราดอกเบี้ยมีความผันผวนสูง เช่น การควบคุมต้นทุนการกู้ยืมระยะยาว การวางแผนการเงินเพื่อรับประกันผลตอบแทนขั้นต่ำและการลดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

โดยสรุปบทที่ 11 ได้ให้ภาพรวมเกี่ยวกับความหมาย การทำงาน และการประยุกต์ใช้สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน พร้อมทั้งเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียของแต่ละประเภทเพื่อช่วยให้ผู้อ่านสามารถเลือกใช้เครื่องมือที่เหมาะสมในการจัดการความเสี่ยงทางการเงินและการวางแผนการเงินระยะยาวได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

- [1] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson Education.
- [2] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2016). *Derivatives: Principles and practice* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.
- [3] Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *An introduction to derivatives and risk management* (10th ed.). Cengage Learning.
- [4] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.
- [5] Jamshidian, F. (1997). LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4), 293–330. <https://doi.org/10.1007/s007800050022>

- [6] Rebonato, R. (2002). *Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond*. Princeton University Press.
- [7] Piterbarg, V., & Andersen, L. B. G. (2010). *Interest rate modeling* (Vol. I-III). Atlantic Financial Press.
- [8] Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed income securities: Tools for today's markets* (3rd ed.). Wiley.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 11

1) กำหนดข้อมูลดังต่อไปนี้ สมมติให้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 4\%$ จำนวนปีจ่าย $N=1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k มีค่าเท่ากับ 5%, 4%, 3.5%, และ 4.5% สำหรับงวดที่ 1 ถึง 4 ตามลำดับ จงคำนวณ

1.1) ตัวประกอบส่วนลด P_t^T

1.2) อัตราอาร์ฟอว์เวิร์ดทันที $f(t, T)$

1.3) คำนวณราคาสวอปชั้นผู้จ่าย (payer swaption) ที่เวลา $t=0$ โดยใช้อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F=6\%$ และระยะเวลางวด $\tau_k=0.25$

1.4) จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (pv of floating rate payments)

1.5) จงคำนวณราคาสวอปที่เวลา $t=0$

2) พิจารณาพันธบัตรที่มีอายุ 3 ปี เราต้องการจำลองราคาพันธบัตรในช่วงเวลาต่างๆ โดยใช้ตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton) โดยสมมติว่าอัตราผลตอบแทนล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0, T)=4\%$, ค่าความผันผวน $\sigma=1.5\%$, วันครบกำหนด $T=3$ ปี จงคำนวณหา

2.1) อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t, T)$ ที่เวลา $t=1$

2.2) ราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t=1$

3) พิจารณาตัวแบบ HJM-1 ปีจ่ายเดียว ในกรณีนี้ $\sigma'(t, T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$ โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0, t)=4\%$, ความผันผวน $\sigma=1.2\%$, อัตราการกลับสู่ค่าเฉลี่ย $\kappa=0.15$, ระยะเวลา $T=8$ ปี

3.1) จงคำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t, T)$ ณ เวลา $t=4$ ปี

3.2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t=4$ ปี โดยสมมติว่า $X_t \approx 0.003$

3.3) จงคำนวณอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t, T)$ ที่เวลา $t=4$

3.4) จงคำนวณราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t=4$

4) บริษัท abc มีหุ้นที่จ่ายปันผล D_k สำหรับ $k=1,2,3,4$ ที่เวลาต่าง ๆ T_k โดยมีอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t คงที่เท่ากับ 0.05 (5%) และจ่ายปันผลตามตารางด้านล่าง

เวลา T_k (ปี)	ปันผล D_k (บาท)
1	200
2	150
3	170
4	180

จงคำนวณ

4.1) มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลแต่ละงวด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

4.2) มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

4.3) มูลค่าปัจจุบัน ของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$ หากคาดว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจะเพิ่มขึ้นเป็น 0.06 (6%) ในปีที่ 3 และ 4

5) พิจารณาคอลอปชันสำหรับหุ้นของบริษัทหนึ่งที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 55$ บาท อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 0.04$ (4%) ราคาการใช้สิทธิ (strike price) $K = 50$ บาท และเวลาครบกำหนด $T = 2$ ปี สำหรับหุ้นดังกล่าว จงคำนวณ

5.1) มูลค่าปัจจุบันของคอลอปชันนี้โดยใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด

5.2) ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลอปชัน f_T^C ในการประเมินมูลค่าของคอลอปชัน

5.3) สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเพิ่มขึ้นเป็น 0.05 (5%) หลังจากปีที่ 1 จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลอปชันใหม่

5.4) เปรียบเทียบมูลค่าปัจจุบันของคอลอปชันในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยคงที่ 0.04 (4%) ตลอดเวลาและในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.05 (5%) หลังจากปีที่ 1

6) สำหรับการคำนวณราคาของคอลอปชันของหุ้นบริษัท x ณ เวลา $t=0$ พิจารณาคอลอปชันสำหรับหุ้นบริษัท x ที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 150$ บาท อัตราดอกเบี้ย $r_t = 0.03$ (3%) ราคาการใช้

สิทธิ $K=160$ บาท และเวลาครบกำหนด $T=2$ ปี ความผันผวน $\sigma_s=0.25$ และความสัมพันธ์ $\rho=0.4$ จงคำนวณ

6.1) ราคาพอร์เวิร์ดของหุ้นบริษัท x , f_T

6.2) ค่าของ σ_T

6.3) ราคาคอลออปชันที่เวลา $t=0$

6.4) สมมติอัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.04 (4%) หลังจากปีที่ 1 จงคำนวณราคาพอร์เวิร์ด

ใหม่ของหุ้นบริษัท x f_T

6.5) เปรียบเทียบค่า σ_T ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยคงที่และในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น

6.6) คำนวณราคาคอลออปชันใหม่ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.04 (4%) หลังจากปีที่ 1

7) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาพอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ wti โดยใช้พจน HJM (heath-jarrow-morton) ที่มีการคำนวณราคาพอร์เวิร์ด $f(t,T)$ สำหรับสินค้าโภคภัณฑ์โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma(t,T)$ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยกำหนดให้ ความผันผวน $\sigma(t,T)$ ของน้ำมันดิบ wti มีค่าเท่ากับ $0.04 \times e^{-0.3(T-t)}$ และเวลา $T=2$ ปี

7.1) จงคำนวณราคาพอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ wti โดยใช้สมการ HJM ดังนี้

$$df(t,T) = \sigma(t,T) \cdot dZ_t + \left(\sigma'(t,T) \cdot \int_t^T \sigma'(s,T) ds \right) dt$$

7.2) เขียนกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาพอร์เวิร์ดน้ำมันดิบ wti

7.3) สมมติให้ $f(0,T)=65$ usd ต่อบาร์เรล คำนวณราคาพอร์เวิร์ดที่เวลา $t=1$ ปี

7.4) วิเคราะห์ความเสี่ยงของการลงทุนในฟิวเจอร์สของน้ำมันดิบ wti โดยใช้ผลจากการคำนวณในข้อ 7.1)

8) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาพอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปองที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000 บาท ที่จะครบกำหนดในเวลา 1 ปีนับจากปัจจุบัน โดยใช้ตัวแบบ 1-factor vasicek model โดยพิจารณา

ข้อมูลดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $\sigma = 0.01$, ค่า κ ที่ใช้ในการคำนวณมีค่า 5 ค่า ได้แก่ 0.001, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5 และเวลา $T = 1$ ปี

8.1) จงคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ

8.2) เขียนกราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ

8.3) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปองสำหรับแต่ละค่า κ

8.4) วิเคราะห์ผลกระทบของค่าความผันผวนแฝงต่อราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปอง

9) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคป (n) เท่ากับ 1,000,000 บาท และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ($r(t)$), จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง L_k , อัตราแคป k ที่ 5%

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.072	0.049
2	0.50	0.25	0.060	0.050
3	0.75	0.25	0.050	0.052
4	1.00	0.25	0.045	0.055

จงคำนวณ

9.1) $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

9.2) อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1 \right)$ สำหรับแต่ละงวด

9.3) ผลประโยชน์ของแคปเส็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

9.4) ผลประโยชน์ของแคปเส็ตในแต่ละงวด C_k ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

9.5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเส็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

9.6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

10) การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes model) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และ กำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง L_k , จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 6%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.045
2	0.50	0.25	0.055	0.050
3	0.75	0.25	0.045	0.055
4	1.00	0.25	0.056	0.060

จงคำนวณ

10.1) ผลประโยชน์ของแคปเล็ดในแต่ละงวด $Caplet_k$

10.2) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

11) สำหรับการคำนวณราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (GTSM) โดยสมมติว่าพิจารณาสัญญาแคปสำหรับหุ้นอ้างอิงตามข้อมูลต่อไปนี้

- มูลค่าหน้าตัวของแคปเท่ากับ 2,000,000 บาท
- มีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6%
- ระยะเวลาถึงวันครบกำหนด (time to maturity, T) 1 ปี
- ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (volatility, σ) 0.2
- จำนวนงวด (number of periods, n) 4 งวด
- อัตราดอกเบี้ยในตลาด (risk-free interest rate, r) 4%
- ค่า κ (mean reversion rate) 0.02

- ระยะเวลาระหว่างงวด (time interval, τ_k) 0.25 ปี
- มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R} = 6\%$ ต่อปี

จงคำนวณ

- 11.1) ราคาพอร์เวิร์ดของอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงในแต่ละงวด $f(t_k, T)$
- 11.2) ค่า d_1 และ d_2 สำหรับแต่ละงวด
- 11.3) คำนวนราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm)

12) จงคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) ในการกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของแคปเท่ากับ 2,000,000 บาท และกำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง L_k , จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 6%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.058	0.052
3	0.75	0.25	0.050	0.058
4	1.00	0.25	0.059	0.060

จงคำนวณ

- 12.1) ค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) สำหรับแต่ละงวด
- 12.2) ราคาพอร์เวิร์ดของอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงในแต่ละงวด ($f(t_k, T)$)
- 12.3) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเลต ($Caplet_k$) (ภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง)
- 12.4) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป

13) จงคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย สมมติว่าต้องการคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ (floor) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิเป็น LIBOR โดยสัญญามีอายุประมาณ 1 ปีและมีอัตราฟลอร์ (floor rate) ที่ 4% กำหนดให้มูลค่าหน้าตัวของฟลอร์ (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และมีข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t) = r_k$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิอ้างอิง L_k , อัตราฟลอร์ K ที่ 4%, ความผันผวน $\sigma = 0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.050
2	0.50	0.25	0.050	0.052
3	0.75	0.25	0.040	0.056
4	1.00	0.25	0.052	0.058

จงคำนวณ

13.1) ผลประโยชน์ของฟลอร์เลตในแต่ละงวด $Floorlet_k$

13.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของฟลอร์เลต $Floorlet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง)

13.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์

13.4) สมมติว่าความผันผวนเปลี่ยนเป็น 0.02 จงคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์เลตใหม่ในแต่ละงวด $Floorlet_k$

13.5) วิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวนต่อราคาฟลอร์

14) จงคำนวณราคาของสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลล์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโพลล์ มีดังนี้ จำนวนงวด $n = 4$, เงินต้นอ้างอิงของ floor (N) = 2,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$), ราคาใช้สิทธิ (K) = 0.04 (4%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.03 (3%)

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.058	0.049
2	0.50	0.25	0.055	0.054
3	0.75	0.25	0.048	0.056
4	1.00	0.25	0.054	0.055

จงคำนวณ

14.1) ผลประโยชน์ของฟลอร์เลตในแต่ละงวด $Floorlet_k$

14.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของฟลอร์เลต $Floorlet_k$

14.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์

14.4) สมมติว่าความผันผวนเปลี่ยนเป็น 0.02 จงคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์เลตใหม่ใน

แต่ละงวด $Floorlet_k$

14.5) วิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวนต่อราคาฟลอร์

15) สำหรับการคำนวณราคาของสัญญาคอลลาร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย มีดังนี้ จำนวนงวด $n = 4$, เงินต้นอ้างอิงของคอลลาร์ (N) = 2,500,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$) และ ค่าความผันผวน (σ) = 0.03 (3%)

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.062	0.051
2	0.50	0.25	0.054	0.053
3	0.75	0.25	0.048	0.055
4	1.00	0.25	0.058	0.057

จงคำนวณ

15.1) ผลประโยชน์ของคอลลาร์ในแต่ละงวด $Collar_k$ ในกรณีที่

$$K_{cap} = K_{floor} = 0.05(5\%)$$

15.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลลาร์ $Collar_k$ ในกรณีที่

$$K_{cap} = K_{floor} = 0.05(5\%)$$

15.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ ในกรณีที่ $K_{cap} = K_{floor} = 0.05(5\%)$

15.4) ผลประโยชน์ของคอลลาร์ในแต่ละงวด $Collar_k$ ในกรณีที่ $K_{cap} = 0.06(6\%)$ และ

$$K_{floor} = 0.04(4\%)$$

15.5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลลาร์ $Collar_k$ ในกรณีที่

$$K_{cap} = 0.06(6\%) \text{ และ } K_{floor} = 0.04(4\%)$$

15.6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ในกรณีที่ $K_{cap} = 0.06(6\%)$ และ

$$K_{floor} = 0.04(4\%)$$

16) สำหรับการคำนวณราคาสวอปชั้นซึ่งสัญญาระบุข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ เงินต้นอ้างอิง (N) = 1,000,000 บาท, จำนวนงวดการจ่ายดอกเบี้ย $n = 4$, ระยะเวลางวด $\tau_k = 0.25$ ปี, อัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k และ อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F = 5\%$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.049
2	0.50	0.25	0.052	0.051
3	0.75	0.25	0.046	0.053
4	1.00	0.25	0.056	0.055

จงคำนวณ

16.1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ ที่เวลา $t = 0$

16.2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t = 0$

16.3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t = 0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

16.4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

16.5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชั้นผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

16.6) คำนวณราคาของสวอปชั้นผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

17) พิจารณาโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $f(t, T)$ ภายใต้กรอบทฤษฎี HJM ซึ่งให้นิยามว่า

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

โดย W_t เป็นมาตรฐานบราวเนียน และฟังก์ชัน $\sigma(t, T) = 0.01e^{-0.05(T-t)}$ ให้คำนวณพารามิเตอร์

$\alpha(t, T)$ ตามสมการ HJM, $\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds$ ที่เวลา $t = 0$ และ $T = 2$ ปี

18) สมมติให้อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าภายใต้ HJM มีฟังก์ชัน $\sigma(t, T) = a(T - t)$ และ $a = 0.02$

โดยกำหนด $t = 1$ และ $T = 3$ ปี จง

18.1) คำนวณ $\alpha(t, T)$ จากสมการ HJM

18.2) อธิบายผลกระทบของรูปแบบ $\sigma(t, T)$ ดังกล่าวต่อความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลาต่าง ๆ และผลต่อการกำหนดราคาตราสารหนี้แบบ zero-coupon

19) สมมติให้ $P(t, T)$ คือราคาของพันธบัตรไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) ที่เวลา t และครบกำหนดที่เวลา T โดยกำหนด $P(0, 1) = 0.95$, $P(0, 2) = 0.89$ และอัตราดอกเบี้ยต่อเนื่องในตลาดเป็นแบบ deterministic จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) $f(0, 1, 2)$ ที่เวลา 0 สำหรับช่วง $[1, 2]$ และอธิบายว่าอัตรานี้ใช้ประโยชน์อย่างไรในบริบทของการวัดความเสี่ยงภายใต้ forward measure

20) ให้นิยามฟังก์ชันราคาพันธบัตรแบบไม่มีคูปองเป็น $P(t, T) = e^{-r(T-t)}$ โดย $r = 5\%$ ต่อปีแบบทบต่อเนื่อง และกำหนดสัญญาออปชันพันธบัตรซึ่งมี payoff ณ เวลาครบกำหนด $T = 2$ เป็น

$$\max(P(T, T^*) - K, 0)$$

โดย $T^* = 3$ และ $K = 0.9$ จงหามูลค่าปัจจุบันของออปชันดังกล่าวโดยใช้แนวคิดของ forward measure ที่อิงกับพันธบัตร $P(t, T^*)$ เป็น numéraire

หมายเหตุ: numéraire คือสินทรัพย์ที่ใช้เป็น "หน่วยวัดมูลค่า" เมื่อเปลี่ยน measure เพื่อทำให้ราคาของสินทรัพย์อื่นเป็น martingale ซึ่งช่วยให้การกำหนดราคาทางคณิตศาสตร์มีความเป็นระบบและง่ายขึ้น

21) พิจารณาสัญญาคอลลอปชันสำหรับสินค้าโภคภัณฑ์ชนิดหนึ่ง (เช่น ทองคำ) ซึ่งราคาสปอตของสินค้าในปัจจุบันคือ $S(0)=1000$ บาทต่อหน่วย และราคาฟอร์เวิร์ด $F(0,T)=1040$ สำหรับ $T=1$ ปี ในขณะที่อัตราดอกเบี้ย $r(t)$ มีลักษณะเป็นอัตราผันแปรตามเวลา โดยเฉลี่ยอยู่ที่ 4% ต่อปีแบบทบต้นต่อเนื่อง และค่าความผันผวนของราคาสินค้าเท่ากับ $\sigma = 20\%$ ต่อปี

21.1) จงใช้สูตรของ Black (Black '76) คำนวณมูลค่าคอลลอปชันที่มีราคาใช้สิทธิ $K=1020$ และมีอายุ 1 ปี

21.2) อธิบายผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย $r(t)$ ต่อราคาของออปชัน

22) บริษัทหนึ่งต้องการทำประกันความเสี่ยงราคาน้ำมันล่วงหน้าโดยใช้ฟุทออปชัน ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ $K=75$ ดอลลาร์/บาร์เรล และราคาฟอร์เวิร์ดน้ำมันในอีก 6 เดือนข้างหน้าเท่ากับ $F(0,0.5)=72$ ดอลลาร์/บาร์เรล โดยให้อัตราดอกเบี้ยต่อเนื่องแปรผันตามเวลาเฉลี่ย $r=3\%$ ต่อปี และค่าความผันผวน $\sigma=25\%$ ต่อปี

22.1) จงคำนวณมูลค่าฟุทออปชันโดยใช้ตัวแบบของ Black (Black '76) สำหรับออปชันบนฟิวเจอร์ส

22.2) วิเคราะห์ว่าหากอัตราดอกเบี้ยพุ่งขึ้นไป 5% ต่อปี จะทำให้บริษัทควรซื้อหรือขายออปชันเพิ่มขึ้นหรือไม่

23) บริษัทแห่งหนึ่งทำสัญญา Interest Rate Cap เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากการกู้ยืมในอัตราดอกเบี้ยลอยตัว โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- Notional principal: 100 ล้านบาท
- Cap rate: 5%
- ระยะเวลา: 3 ปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- สมมติให้อัตราดอกเบี้ยคาดการณ์ในแต่ละงวดเป็น 5.5%, 4.8%, 6.2%, 5.1%, 5.6%, 4.9%

23.1) จงคำนวณกระแสเงินสดที่ได้รับจากสัญญา Cap ในแต่ละงวด

23.2) วิเคราะห์ผลประโยชน์ของการใช้ Cap สำหรับบริษัทนี้ภายใต้สถานการณ์ดังกล่าว

24) นักลงทุนรายหนึ่งซื้อ Interest Rate Collar โดยมีรายละเอียด

- Notional: 50 ล้านบาท
- Cap rate: 6%, Floor rate: 4%
- ระยะเวลา: 2 ปี ชำระทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- สมมติให้อัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจริงเป็น 3.5%, 4.2%, 5.8%, 6.5%

24.1) คำนวณกระแสเงินสดที่ได้รับหรือจ่ายจากสัญญา Collar ในแต่ละงวด

24.2) อธิบายว่า Collar ช่วยลดต้นทุนหรือจำกัดความเสี่ยงในมุมมองของนักลงทุนอย่างไร

25) พิจารณบริษัทแห่งหนึ่งได้รับสิทธิในการทำ payer swaption ซึ่งอนุญาตให้บริษัทเข้าสู่สัญญาแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย โดยจ่ายดอกเบี้ยคงที่และรับดอกเบี้ยลอยตัวในอีก 1 ปีข้างหน้า (swap เริ่มต้นใน 1 ปี) รายละเอียดของ swaption ดังนี้

- Notional amount: 200 ล้านบาท
- Fixed rate (strike rate): 3.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- ระยะเวลา swap หลังจากใช้สิทธิ: 2 ปี ชำระดอกเบี้ยทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวคาดการณ์ในช่วง swap: 4.2%, 3.8%, 4.5%, 4.0%

25.1) บริษัทควรใช้สิทธิ swaption หรือไม่? เพราะเหตุใด

25.2) หากใช้สิทธิ จงคำนวณกระแสเงินสดสุทธิตลอดอายุ swap

26) นักลงทุนรายหนึ่งถือ receiver swaption ซึ่งให้สิทธิรับอัตราคงที่ 5% และจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว โดย swap มีระยะเวลา 3 ปี เริ่มต้นในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยมีข้อมูลเพิ่มเติม

- Notional: 100 ล้านบาท

- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวคาดการณ์: 4.3%, 5.2%, 5.6%, 5.1%, 5.4%, 5.0%
- อัตราดอกเบี้ยปัจจุบัน: 4.5% (ต่อเนื่อง)

26.1) ประเมินว่า swaption นี้มีมูลค่าในเชิงเศรษฐศาสตร์หรือไม่

26.2) วิเคราะห์ประโยชน์ของการถือ receiver swaption ในบริบทของการบริหารพอร์ตลงทุน

