

บทที่ 3 คณิตศาสตร์ของความเสี่ยงการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายความเสี่ยงของผลตอบแทนในฐานะตัวแปรสุ่ม และคำนวณค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้
2. คำนวณและตีความ covariance, correlation และ covariance matrix พร้อมเข้าใจข้อจำกัดของ correlation
3. แยกความเสี่ยงรวม ความเสี่ยงด้านลบ ความเสี่ยงเชิงระบบ ความเสี่ยงเทียบ benchmark ความเสี่ยงตามเส้นทาง และ tail risk ออกจากกันได้
4. คำนวณ downside deviation, beta, tracking error และ maximum drawdown ได้อย่างถูกต้องตามนิยาม
5. นิยามและคำนวณ Value-at-Risk (VaR) และ Expected Shortfall (ES/CVaR) ด้วยวิธีพาราเมตริกและ Historical Simulation ได้
6. อธิบาย EWMA volatility และเหตุผลที่แบบจำลองความเสี่ยงต้องได้รับการตรวจสอบด้วยข้อมูลจริง
7. เลือกมาตรวัดความเสี่ยงให้สอดคล้องกับคำถามการลงทุน แทนการใช้ตัวเลขเพียงตัวเดียวแทนความเสี่ยงทั้งหมด
8. สร้าง risk summary จากข้อมูลผลตอบแทนโดยระบุ data lineage, convention, horizon และสมมติฐานอย่างชัดเจน
9. แยกความแตกต่างระหว่าง แหล่งความเสี่ยง มาตรวัดความเสี่ยง และ เกณฑ์ตัดสินใจ/เพดานความเสี่ยง เพื่อไม่ใช่ตัวเลขเดียวแทนความเสี่ยงทุกมิติ
10. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของ risk estimate จากข้อมูลจริง โดยพิจารณา sample window, parameter uncertainty, regime change และผล backtesting ก่อนนำไปใช้กำหนดสถานะหรือวงเงิน

3.1 บทนำ: ความเสี่ยงไม่ใช่ตัวเลขเดียว

บทที่ 2 เปลี่ยนราคาและกระแสเงินสดให้เป็นอนุกรมผลตอบแทน บทนี้พัฒนาคำถามต่อไปว่า **ผลตอบแทนดังกล่าวไม่แน่นอนเพียงใด และความไม่แน่นอนแบบใดมีความสำคัญต่อการตัดสินใจลงทุน** กรอบพื้นฐานของ expected return, variance, covariance และ correlation เชื่อมต่อจากเอกสาร ส.247 และตำราคณิตศาสตร์การเงินของผู้เขียน ขณะที่ tail-risk framework เชื่อมกับวรรณกรรมมาตรฐานด้าน quantitative risk management [61, 62, 34]

คำว่า “ความเสี่ยง” ในการลงทุนมีหลายมิติ ความผันผวนเป็นเพียงมิติหนึ่ง ผู้ลงทุนอาจสนใจความน่าจะเป็นที่ผลตอบแทนต่ำกว่าเป้าหมาย ความไวต่อการเคลื่อนไหวของตลาด การเบี่ยงเบนจาก benchmark การลดลงจากจุดสูงสุดเดิม หรือความเสียหายรุนแรงบริเวณหางซ้ายของการแจกแจง

ดังนั้น การวัดความเสี่ยงที่ดีต้องเริ่มจากคำถามก่อนเลือกสูตร ไม่ใช่เลือกสูตรแล้วพยายามให้ตัวเลขเดียวอธิบายความเสี่ยงทุกชนิด

สามชั้นที่ต้องแยกก่อนวัดความเสี่ยง

การวิเคราะห์ที่ใช้จริงควรแยก (1) **แหล่งความเสี่ยง** เช่น ตลาด ดอกเบี้ย เครดิต หรือสภาพคล่อง (2) **มาตรวัดความเสี่ยง** เช่น SD, beta, MDD, VaR และ ES และ (3) **กฎตัดสินใจ** เช่น position limit, risk budget หรือ trigger สำหรับการลดสถานะ ทั้งสามชั้นเชื่อมกันแต่ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน ตัวอย่างเช่น VaR เป็นมาตรวัด tail threshold ไม่ใช่เพดานการขาดทุน และไม่ใช่สาเหตุของความเสี่ยง

อีกประเด็นที่สำคัญคือการแยก **ex ante risk** ออกจาก **ex post realized loss** ค่า volatility หรือ VaR ที่ประมาณก่อนลงทุนเป็นการสรุป distribution ภายใต้อข้อมูลและแบบจำลอง ณ เวลานั้น ส่วนผลขาดทุนที่เกิดขึ้นจริงเป็นเพียงหนึ่ง realization จาก distribution ดังกล่าว การที่วันหนึ่งไม่ขาดทุนจึงไม่ได้พิสูจน์ว่าแบบจำลองถูกต้อง และการเกิดขาดทุนเกิน VaR เพียงครั้งเดียวก็ไม่ได้พิสูจน์ว่าแบบจำลองผิดโดยอัตโนมัติ ต้องพิจารณาความถี่และรูปแบบของ exceptions ตลอดช่วงทดสอบ

ข้อสังเกต

ขอบเขตของบทนี้ เน้นมาตรวัดความเสี่ยงในระดับสินทรัพย์หรืออนุกรมผลตอบแทน เพื่อสร้างภาษากลางสำหรับบทถัดไป การรวมความเสี่ยงของพอร์ตหลายสินทรัพย์ด้วยเมทริกซ์ covariance จะพัฒนาในบทที่ 6 ส่วน portfolio VaR, risk limits, stress testing และ formal backtesting จะพัฒนาในบทที่ 11



รูปที่ 3.1: แผนที่มีมาตรวัดความเสี่ยงตามคำถามที่ต้องการตอบ โดยแยก dispersion, dependence, downside, relative/path และ tail risk ออกจากกัน

3.2 ผลตอบแทนในฐานะตัวแปรสุ่ม

ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มแทนอัตราผลตอบแทนหนึ่งงวด หาก R เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่รับค่า $r_1, \dots, r_m$ ด้วยความน่าจะเป็น $p_1, \dots, p_m$ โดย

$$p_j \geq 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$$

บทนิยาม 3.1

ค่าคาดหวังของผลตอบแทนคือ

$$\mu = \mathbb{E}(R) = \sum_{j=1}^m p_j r_j$$

ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคือ

$$\sigma^2 = \text{Var}(R) = \mathbb{E}[(R - \mu)^2] = \sum_{j=1}^m p_j (r_j - \mu)^2$$

และ

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(R)}$$

ถ้า R เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มี density $f_R(r)$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} r f_R(r) \, dr$$

และ

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (r - \mu)^2 f_R(r) \, dr$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีหน่วยเดียวกับผลตอบแทน จึงตีความได้สะดวกกว่าความแปรปรวน แต่ทั้งสองมาตรวัดให้ความสำคัญกับความเบี่ยงเบนด้านบวกและด้านลบแบบสมมาตร

ข้อสังเกต

คำคำตหมายถึงไม่ใช่ผลตอบแทนที่คาดว่าจะเกิดทุกงวด ค่า μ เป็นค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็นของ distribution ไม่ใช่ค่าพยากรณ์แบบจุดของผลตอบแทนงวดถัดไป ในทำนองเดียวกัน $\sigma = 10\%$ ไม่ได้หมายความว่า จะขาดทุนไม่เกิน 10% แต่บอกขนาดการกระจายภายใต้ distribution ที่ใช้ การแปลง volatility เป็น probability of loss หรือ tail loss ต้องอาศัยข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับรูปการแจกแจง

ข้อจำกัดเชิงแนวคิดของ variance คือผลตอบแทนที่สูงกว่าค่าเฉลี่ยมากถูกนับเป็น “ความเสี่ยง” เช่นเดียวกับผลตอบแทนต่ำกว่าค่าเฉลี่ยมาก แม้ผู้ลงทุนส่วนใหญ่ไม่ถือ upside surprise เป็นความเสียหาย ปัญหานี้เป็นเหตุผลหนึ่งที่ต้องมี downside measures และ tail measures ในหัวข้อถัดไป

ตัวอย่าง 3.1. สมมติผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีสี่สถานการณ์

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (-12\%, -2\%, 8\%, 18\%)$$

และ

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.10, 0.20, 0.40, 0.30)$$

จะได้

$$\mu = 0.10(-0.12) + 0.20(-0.02) + 0.40(0.08) + 0.30(0.18) = 0.07$$

และ

$$\sigma^2 = 0.0089$$

ดังนั้น

$$\sigma \approx 0.09434 = 9.434\%$$

ผลตอบแทนคาดหวังเท่ากับ 7% ต่อหนึ่งงวด ขณะที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประมาณ 9.43%

3.2.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง

เมื่อมีข้อมูลผลตอบแทน $R_1, \dots, R_T$ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างคือ

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$$

ความแปรปรวนตัวอย่างแบบใช้ตัวหาร $T - 1$ คือ

Sample Mean และ Sample Variance

$$s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2$$

และ

$$s = \sqrt{s^2}$$

ตัวหาร $T - 1$ ให้ sample variance แบบ unbiased ภายใต้กรอบการสุ่มตัวอย่างมาตรฐาน หากข้อมูลที่มีถูกนิยามให้เป็นประชากรทั้งหมดที่สนใจ อาจใช้ตัวหาร T ได้ แต่ต้องระบุ convention ให้ชัดเจน

ในเชิงปฏิบัติ การเลือก $T - 1$ แก่เพียง bias เชิงพีชคณิตของ estimator ภายใต้สมมติฐานมาตรฐาน แต่ไม่ได้ทำให้ค่าประมาณ “แม่นยำ” โดยอัตโนมัติ หากตัวอย่างสั้น มี outlier หรือครอบคลุมเพียง regime เดียว ค่า $\bar{R}$ และ s ยังมี sampling uncertainty สูง จึงควรรายงาน sample period และตรวจ sensitivity ต่อ rolling window ควบคู่กับค่าประมาณจุดเดียว

หลักตรวจสอบค่าความเสี่ยงจากข้อมูลตัวอย่าง

คำนวณอย่างน้อยสามแบบควบคู่กัน: full-sample estimate เพื่อเห็นภาพรวม rolling estimate เพื่อเห็นการเปลี่ยนแปลงตามเวลา และ stress/subsample estimate เพื่อดูว่าค่าความเสี่ยงเปลี่ยนแปลงเพียงใดเมื่อเข้าสู่ช่วงวิกฤต หากข้อสรุปเปลี่ยนแรงเมื่อขยับหน้าต่างข้อมูลเพียงเล็กน้อย ควรถือว่า estimation risk มีนัยสำคัญ

ข้อสังเกต

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ของผลตอบแทน หนึ่งงวด และ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ของ อัตราการเติบโต หลายงวด ตอบคำถามต่างกัน บทที่ 2 แยกสองแนวคิดนี้ไว้แล้ว ในบทนี้ μ หรือ $\bar{R}$ ทำหน้าที่เป็นตำแหน่งศูนย์กลางของการแจกแจงผลตอบแทนสำหรับการวัดความเสี่ยง

3.2.2 การทำให้ความผันผวนเป็นรายปี

ถ้าผลตอบแทนแต่ละงวดมีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันและไม่สัมพันธ์กันตามเวลาโดยประมาณ ความแปรปรวนของผลรวม N งวดคือ

$$\text{Var} \left(\sum_{t=1}^N R_t \right) = N\sigma^2$$

จึงได้กฎ square-root-of-time

Volatility Scaling

$$\sigma_{\text{ann}} \approx \sqrt{N} \sigma_{\text{period}}$$

สำหรับข้อมูลรายวันมักใช้ $N \approx 252$ วันซื้อขายต่อปี

$$\sigma_{\text{ann}} \approx \sqrt{252} \sigma_{\text{day}}$$

สูตรนี้มาจากการบวก variance ของผลตอบแทนหลายงวดเมื่อ covariance ข้ามเวลาประมาณศูนย์ หากมี serial correlation จะเกิด cross-covariance terms เพิ่มขึ้นและกฎ $\sqrt{N}$ ไม่ตรงอีกต่อไป ดังนั้นการ annualize จึงเป็น **model-based conversion** ไม่ใช่เพียงการเปลี่ยนหน่วยเหมือนเซนติเมตรเป็นเมตร

ประเด็นที่ต้องระวัง

กฎ $\sqrt{N}$ เกิดจากสมมติฐานเกี่ยวกับ dependence และความคงที่ของ variance ไม่ใช่กฎทางบัญชี หากผลตอบแทนมี autocorrelation, volatility clustering, structural break หรือ regime change การ scaling แบบนี้อาจทำให้ประมาณความเสี่ยงผิด

3.2.3 Coefficient of Variation และข้อจำกัด

สัมประสิทธิ์ความแปรผันนิยามเป็น

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

CV อาจใช้เปรียบเทียบความผันผวนต่อหนึ่งหน่วยผลตอบแทนคาดหวังเมื่อ $\mu > 0$ และอยู่ห่างจากศูนย์พอสมควร แต่เมื่อ $\mu \leq 0$ หรือใกล้ศูนย์ ตัวเลขนี้อาจไม่เสถียรหรือไม่มีความหมายเชิงอันดับที่น่าเชื่อถือ

ตัวอย่างเช่น หากสินทรัพย์ A มี $\mu = 0.2\%$ และ $\sigma = 2\%$ จะได้ $CV = 10$ แต่หากประมาณค่าเฉลี่ยเปลี่ยนเพียงเล็กน้อยเป็น 0.1% ค่า CV จะกระโดดเป็น 20 ทั้งที่ volatility ไม่เปลี่ยน จึงไม่ควรใช้ CV จัดอันดับหลักทรัพย์เมื่อ expected return มีค่าเล็กน้อยหรือไม่เสถียร

3.2.4 Skewness และ Kurtosis

Variance ไม่บอกว่าการแจกแจงมีความเบ้หรือหางหนาเพียงใด ในข้อมูลการเงิน skewness ด้านลบและ excess kurtosis ที่สูงสามารถทำให้ความเสี่ยงด้านขาดทุนรุนแรงมากกว่าที่แบบจำลองปกติสื่อ การวิเคราะห์ความเสี่ยงจึงไม่ควรหยุดเพียง mean และ standard deviation

ในเชิงตีความ **negative skewness** หมายถึงทางด้านผลตอบแทนต่ำมีแนวโน้มยาวหรือรุนแรงกว่าด้านบวก ขณะที่ **high excess kurtosis** บ่งชี้ว่าการแจกแจงมีมวลบริเวณหางมากกว่าการแจกแจงปกติในบางลักษณะ อย่างไรก็ตามค่าประมาณ moment ลำดับสูงไวต่อ outlier มาก จึงควรใช้ร่วมกับ histogram, empirical quantiles และ tail measures มากกว่าตีความจากตัวเลขเพียงค่าเดียว

3.3 Covariance และ Correlation

ความ ผันผวน ของ สินทรัพย์ ราย ตัว ไม่ได้ บอก ว่า สินทรัพย์ สอง ตัว เคลื่อนไหว ร่วม กัน อย่างไร การ พิจารณา dependence จึงเป็นพื้นฐานของการกระจายการลงทุน [33]

บทนิยาม 3.2

สำหรับผลตอบแทน R_i และ R_j ที่มีค่าเฉลี่ย μ_i และ μ_j

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \mathbb{E}[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$$

ถ้า $\sigma_i, \sigma_j > 0$ correlation คือ

$$\rho_{ij} = \text{Corr}(R_i, R_j) = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Covariance มีหน่วยเป็นผลตอบแทนกำลังสอง ส่วน correlation ไม่มีหน่วยและอยู่ในช่วง $[-1, 1]$

Correlation จึงเหมาะกับการเปรียบเทียบความสัมพันธ์เชิงเส้นของคู่สินทรัพย์ที่มี scale ต่างกัน แต่การไม่มีหน่วยก็ทำให้ข้อมูลเรื่อง “ขนาดความเสี่ยง” หายไป คู่สินทรัพย์สองคู่สามารถมี correlation เท่ากัน แต่คู่ที่มี volatility สูงกว่าย่อมสร้าง covariance และผลต่อความเสี่ยงพอร์ตมากกว่า

ทฤษฎีบท 3.1

ถ้า R_i และ R_j มี variance บวกและจำกัด แล้ว

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

พิสูจน์. ให้

$$X = R_i - \mu_i \quad \text{และ} \quad Y = R_j - \mu_j$$

จาก Cauchy-Schwarz inequality ใน L^2

$$|\mathbb{E}(XY)|^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = \sigma_i^2 \sigma_j^2$$

จึงได้

$$|\text{Cov}(R_i, R_j)| \leq \sigma_i \sigma_j$$

เมื่อหารด้วย $\sigma_i \sigma_j > 0$ จะได้

$$|\rho_{ij}| \leq 1$$

□

3.3.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง

sample covariance นิยามเป็น

$$s_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

และ sample correlation คือ

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}$$

สำหรับสินทรัพย์ n รายการสามารถรวบรวม covariance เป็นเมทริกซ์

$$\hat{\Sigma} = (s_{ij})_{n \times n}$$

เมทริกซ์ covariance ควรสมมาตรและ positive semidefinite ในเชิงทฤษฎี แต่การประมาณจากข้อมูลจริงอาจมีปัญหา numerical instability เมื่อจำนวนสินทรัพย์มากเมื่อเทียบกับจำนวน observations

ในทางปฏิบัติ correlation ยังมี **regime dependence** ด้วย ความสัมพันธ์ที่ต่ำในภาวะปกติอาจเพิ่มขึ้นพร้อมกันในช่วง market stress ทำให้ประโยชน์จาก diversification ลดลงในเวลาที่ต้องการมากที่สุด ดังนั้นการใช้ correlation matrix เพื่อสร้างพอร์ตควรมีทั้ง rolling estimates และ stressed correlations ไม่ควรอาศัยค่าเฉลี่ยระยะยาวเพียงชุดเดียว

ตัวอย่าง 3.2. ให้ผลตอบแทนสองสินทรัพย์ในสี่สถานการณ์เป็น

$$R_A = (-10\%, 2\%, 8\%, 16\%)$$

และ

$$R_B = (12\%, 5\%, 2\%, -6\%)$$

ด้วยความน่าจะเป็น

$$(0.10, 0.20, 0.40, 0.30)$$

จะได้

$$\mu_A = 7.4\% \quad \text{และ} \quad \mu_B = 1.2\%$$

รวมทั้ง

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = -0.004128$$

และ

$$\rho_{AB} \approx -0.9800$$

ค่าดังกล่าวบ่งชี้ความสัมพันธ์เชิงเส้นสวนทางกันสูงในชุดสถานการณ์สมมติ แต่การใช้ข้อมูลจริงต้องตรวจสอบเสถียรของ correlation ตามเวลา

ประเด็นที่ต้องระวัง

Correlation ใกล้ศูนย์หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นเด่นชัด ไม่ได้หมายถึงเป็นอิสระต่อกัน นอกจากนี้ correlation ขึ้นกับช่วงเวลา ความถี่ข้อมูล และภาวะตลาด และอาจเปลี่ยนแปลงมากในช่วงวิกฤต

3.4 Downside Risk และ Lower Partial Moments

Variance ลงโทษผลตอบแทนที่สูงกว่าค่าเฉลี่ยและต่ำกว่าค่าเฉลี่ยแบบสมมาตร แต่ในหลายปัญหา ผู้ลงทุนสนใจเฉพาะการต่ำกว่าเป้าหมาย จึงใช้ lower partial moments

บทนิยาม 3.3

ให้ τ เป็น target return หรือ minimum acceptable return และกำหนด

$$(x)_+ = \max(x, 0)$$

Lower Partial Moment ลำดับ $q > 0$ คือ

$$\text{LPM}_q(\tau) = \mathbb{E}[(\tau - R)_+^q]$$

สำหรับ $q = 2$

$$\text{LPM}_2(\tau) = \mathbb{E}[(\tau - R)_+^2]$$

และ Downside Deviation คือ

$$DD(\tau) = \sqrt{\text{LPM}_2(\tau)}$$

สำหรับข้อมูลตัวอย่างภายใต้ convention ที่หารด้วยจำนวน observations ทั้งหมด

$$\widehat{DD}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\tau - R_t)_+^2}$$

บางซอฟต์แวร์หารด้วยจำนวน observations ที่ต่ำกว่าเป้าหมายเท่านั้น จึงต้องระบุ denominator convention ก่อนเปรียบเทียบ

นอกจาก denominator แล้ว ค่า τ เป็นส่วนหนึ่งของคำถามการลงทุน ไม่ใช่พารามิเตอร์ที่เลือกตามความสะดวก หากเป้าหมายคือรักษาเงินต้นอาจใช้ $\tau = 0$ หากเป็นกองทุนที่มี required return หรือ benchmark อาจกำหนด target ต่างออกไป สันทรัพย์เดียวกันจึงสามารถมี downside risk ต่างกันภายใต้เป้าหมายของผู้ลงทุนต่างราย

ตัวอย่าง 3.3. ให้ผลตอบแทนข้างวดเป็น

$$(-8\%, -2\%, 1\%, 4\%, 7\%)$$

และกำหนด $\tau = 0$ จะได้

$$\text{LPM}_2(0) = \frac{0.08^2 + 0.02^2}{5} = 0.00136$$

ดังนั้น

$$DD(0) = \sqrt{0.00136} \approx 3.688\%$$

ขณะที่ shortfall probability เท่ากับ

$$\frac{2}{5} = 40\%$$

สองมาตรวัดนี้ตอบคำถามต่างกัน เพราะ shortfall probability บอกความถี่ ส่วน downside deviation สะท้อนขนาดของการต่ำกว่าเป้าหมายด้วย

3.5 Beta และความเสี่ยงเชิงระบบ

ความไวของสินทรัพย์ต่อปัจจัยตลาดสามารถอธิบายผ่าน market model

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

โดย R_M คือผลตอบแทนตลาด และ ε_i คือส่วนที่แบบจำลองตลาดอธิบายไม่ได้

บทนิยาม 3.4

ถ้า $\text{Var}(R_M) > 0$ เบตาของสินทรัพย์ i เทียบตลาดคือ

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}$$

ถ้า

$$\text{Cov}(R_M, \varepsilon_i) = 0$$

จะได้

$$\text{Var}(R_i) = \beta_i^2 \text{Var}(R_M) + \text{Var}(\varepsilon_i)$$

พจน์แรกคือ systematic component ภายใต้ market model ส่วนพจน์หลังคือ idiosyncratic component

ตัวอย่าง 3.4. ถ้า

$$\text{Cov}(R_i, R_M) = 0.00024$$

และ

$$\text{Var}(R_M) = 0.00016$$

จะได้

$$\beta_i = \frac{0.00024}{0.00016} = 1.5$$

ค่า $\beta = 1.5$ หมายถึง regression slope ต่อผลตอบแทนตลาดเท่ากับ 1.5 ไม่ได้หมายความว่าความเสี่ยงรวมของสินทรัพย์สูงกว่าตลาด 50% เพราะ total variance ยังขึ้นกับ idiosyncratic risk

Beta ในบทนี้เป็นมาตรวัด dependence กับตลาด ส่วนการเชื่อมโยง beta กับ expected return จะพัฒนาในบท asset pricing

ข้อสังเกต

Beta ไม่ใช่ค่าคงที่ของหลักทรัพย์ ค่าที่ประมาณขึ้นกับ market proxy, sample period, data frequency และ corporate events ตัวอย่างเช่น beta รายวัน 1 ปีอาจต่างจาก beta รายสัปดาห์ 5 ปีอย่างมีสาระ การรายงาน beta โดยไม่บอก benchmark และ estimation window จึงตรวจสอบซ้ำไม่ได้

3.6 Tracking Error

เมื่อพอร์ตมี benchmark ความเสี่ยงที่สำคัญอาจเป็นความผันผวนของผลตอบแทนส่วนเกินเทียบกับ benchmark ให้

$$A_t = R_{p,t} - R_{b,t}$$

เรียกว่า active return

บทนิยาม 3.5

Tracking Error แบบ ex post คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ active return

$$TE = SD(A_t) = SD(R_{p,t} - R_{b,t})$$

สำหรับข้อมูลตัวอย่าง

$$\widehat{\text{TE}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (A_t - \bar{A})^2}$$

ถ้า active return รายวันอยู่ภายใต้สมมติฐานเดียวกับ volatility scaling

$$\text{TE}_{\text{ann}} \approx \sqrt{252} \text{TE}_{\text{day}}$$

ข้อสังเกต

Tracking Error ต่ำไม่ได้หมายความว่าพอร์ตมีความเสี่ยงรวมต่ำ พอร์ตอาจเคลื่อนไหวใกล้เคียง benchmark ที่มีความผันผวนสูงได้ Tracking Error จึงเป็น relative risk ไม่ใช่ total risk

ในงานบริหารพอร์ตควรแยก **ex post tracking error** ซึ่งคำนวณจาก active returns ที่เกิดขึ้นแล้ว ออกจาก **ex ante tracking error** ซึ่งเป็นค่าคาดการณ์จากแบบจำลอง covariance และ active weights ค่าทั้งสองอาจต่างกันเมื่อ covariance เปลี่ยนหรือพอร์ตถูกปรับระหว่างทาง การควบคุม mandate จึงควรระบุชัดว่ากำลังใช้ TE แบบใด

3.7 Maximum Drawdown และความเสี่ยงตามเส้นทาง

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ใช่ลำดับเวลาของผลตอบแทน แต่ผู้ลงทุนเผชิญความมั่งคั่งเป็นเส้นทาง ให้ W_t เป็น wealth index และ

$$H_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$$

เป็น running peak

บทนิยาม 3.6

Drawdown ในรูปสัดส่วนความเสียหายที่เป็นจำนวนบวกคือ

$$D_t = 1 - \frac{W_t}{H_t}$$

โดย

$$0 \leq D_t \leq 1$$

Maximum Drawdown คือ

$$\text{MDD} = \max_t D_t$$

ตัวอย่าง 3.5. ถ้า wealth index เป็น

100, 108, 105, 112, 98, 101, 115

จุดสูงสุดก่อนการลดลงคือ 112 และ trough คือ 98 จึงได้

$$\text{MDD} = 1 - \frac{98}{112} = 0.125 = 12.5\%$$

แม้พอร์ตจะจบที่ 115 สูงกว่าจุดสูงสุดเดิม แต่ระหว่างทางผู้ลงทุนเคยเผชิญ drawdown 12.5%

MDD ขึ้นกับเส้นทางและช่วงตัวอย่างอย่างมาก จึงไม่ควรใช้เปรียบเทียบโดยไม่ระบุ sample period

Drawdown ยังมีความไม่สมมาตรเชิงคณิตศาสตร์ หากมูลค่าลดลงสัดส่วน D จากจุดสูงสุด ผลตอบแทนที่ต้องได้จาก trough เพื่อกลับสู่จุดเดิมคือ

$$G = \frac{D}{1 - D}$$

ดังนั้น drawdown 20% ต้องฟื้น 25% แต่ drawdown 50% ต้องฟื้น 100% ความสัมพันธ์นี้อธิบายว่าทำไมการควบคุม drawdown มีความหมายต่อความอยู่รอดของพอร์ต แม้ MDD จะไม่ใช่มาตรวัดความน่าจะเป็น

3.8 Value-at-Risk

เพื่อให้ sign convention ชัดเจน กำหนดตัวแปร loss

$$L = -R$$

สำหรับผลตอบแทนในรูปอัตรา หรือ

$$L_V = -V_0 R$$

สำหรับความเสียหายในหน่วยเงินเมื่อ V_0 เป็นมูลค่าฐาน

บทนิยาม 3.7

สำหรับระดับความเชื่อมั่น $\alpha \in (0, 1)$ กำหนด Value-at-Risk เป็น quantile ของ loss

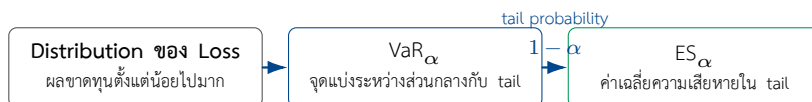
$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : \Pr(L \leq \ell) \geq \alpha\}$$

ดังนั้น VaR ที่ระดับ 99% เป็น threshold ที่มี probability mass อย่างน้อย 99% อยู่ไม่เกินค่านั้นภายใต้แบบจำลองที่ใช้

สำหรับ 1-day VaR ที่ 99% หาก distribution และ calibration คงที่ในระยะยาว เราคาดจำนวนวันที่ loss เกิน VaR โดยเฉลี่ยประมาณ 1% ของวัน ไม่ใช่ว่า “จะไม่ขาดทุนเกิน VaR” การตีความนี้เชื่อม VaR เข้ากับ backtesting โดยตรง เพราะแบบจำลองที่รายงาน 99% แต่มี exceptions บ่อยเกินไปกำลัง understate tail risk ในเชิง coverage

ประเด็นที่ต้องระวัง

VaR ไม่ใช่ “การขาดทุนสูงสุดที่เป็นไปได้” เพราะการขาดทุนที่มากกว่า VaR ยังเกิดขึ้นได้ใน tail probability ประมาณ $1 - \alpha$ ภายใต้ distribution ที่สมมติ



VaR ตอบว่า “tail เริ่มที่ระดับใด” ส่วน ES ตอบว่า “เมื่อเข้า tail แล้ว โดยเฉลี่ยรุนแรงเพียงใด” จึงควรใช้ร่วมกัน เมื่อสนใจ extreme loss

รูปที่ 3.2: ความสัมพันธ์เชิงแนวคิดระหว่าง Value-at-Risk และ Expected Shortfall ภายใต้ loss convention

3.8.1 Parametric Normal VaR

ถ้า

$$R \sim N(\mu, \sigma^2)$$

และ

$$L = -R$$

จะได้

$$L \sim N(-\mu, \sigma^2)$$

ดังนั้น

Normal VaR

$$\text{VaR}_\alpha(L) = -\mu + z_\alpha \sigma$$

โดย $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$

ถ้าต้องการ VaR ในหน่วยเงินและใช้ linear return approximation

$$\text{VaR}_{\alpha,V} = V_0 (-\mu + z_\alpha \sigma)$$

ตัวอย่าง 3.6. สมมติผลตอบแทนรายวันมี

$$\mu = 0.04\% \quad \text{และ} \quad \sigma = 1.20\%$$

ที่ระดับ 99% ใช้

$$z_{0.99} \approx 2.3263$$

จึงได้ VaR ในอัตราผลตอบแทน

$$\text{VaR}_{0.99} = -0.0004 + 2.3263(0.012) \approx 0.02752$$

หรือประมาณ 2.752%

ถ้ามูลค่าสถานะเท่ากับ 10 ล้านบาท

$$\text{VaR}_{0.99,V} \approx 275,200$$

ภายใต้สมมติฐานของแบบจำลอง

3.8.2 Historical Simulation

ให้ realized losses เป็น

$$L_1, \dots, L_T$$

Historical Simulation ประมาณ VaR ด้วย empirical quantile

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}^{\text{HS}} = \widehat{Q}_{\alpha}(L_1, \dots, L_T)$$

วิธีนี้ไม่กำหนด parametric distribution เช่น Normal โดยตรง แต่ยังสมมติว่าประวัติที่เลือกเป็นตัวแทนของความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องในอนาคต

การเลือก lookback window จึงเป็น trade-off สำคัญ: หน้าต่างยาวให้ observations ใน tail มากขึ้นแต่ผสมข้อมูล regime เก่าที่อาจไม่เกี่ยวข้อง ขณะที่หน้าต่างสั้นตอบสนองต่อภาวะล่าสุดได้เร็วแต่ quantile มี sampling noise สูง โดยเฉพาะที่ระดับ 99% ซึ่งใช้ข้อมูลเพียงส่วนน้อยบริเวณหาง

ประเด็นที่ต้องระวัง

Historical Simulation ไม่ได้แปลว่า “ไม่มีแบบจำลอง” เพราะการเลือก lookback window, sampling frequency, quantile interpolation, weighting scheme และ data cleaning ล้วนเป็น model choices

3.8.3 Holding Period และ Square-Root Scaling

VaR ที่รายงานควรระบุอย่างน้อย

1. ตัวแปรที่วัดและหน่วย
2. confidence level
3. holding period
4. แบบจำลองหรือ estimation method

ภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสม อาจประมาณ

$$\text{VaR}_{\alpha,h} \approx \sqrt{h} \text{VaR}_{\alpha,1}$$

แต่การ scaling นี้อาจไม่น่าเชื่อถือเมื่อ volatility เปลี่ยนตามเวลา ผลตอบแทนมี serial dependence หรือ distribution เปลี่ยนตาม horizon

3.9 Expected Shortfall หรือ Conditional Value-at-Risk

VaR บอกตำแหน่ง threshold แต่ไม่ได้บอกว่าหลังจากทะลุ threshold แล้ว การขาดทุนรุนแรงเพียงใด

บทนิยาม 3.8

สำหรับ loss L กำหนด Expected Shortfall ที่ระดับ α ด้วย quantile integral

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) \, du$$

ถ้า distribution ต่อเนื่องในบริเวณ quantile ที่เกี่ยวข้อง

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)]$$

นิยามแบบ quantile integral ใช้ได้สมำเสมอกับ distribution ที่ไม่ต่อเนื่องและ empirical distributions มากกว่าการอาศัย conditional expectation เพียงรูปเดียว [41]

สำหรับ distribution ต่อเนื่องภายใต้ loss convention โดยทั่วไป $\text{ES}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ เพราะ ES เฉลี่ยเฉพาะค่าที่อยู่ตั้งแต่ threshold ไปทางหางขวาของ loss หากผลคำนวณให้ ES ต่ำกว่า VaR อย่างมีนัยสำคัญ ควรตรวจสอบ sign

convention, quantile definition และ implementation ก่อนตีความทางเศรษฐกิจ [34, 72]

3.9.1 Normal Expected Shortfall

ถ้า

$$R \sim N(\mu, \sigma^2)$$

และ $L = -R$

Normal Expected Shortfall

$$\text{ES}_\alpha(L) = -\mu + \sigma \frac{\phi(z_\alpha)}{1 - \alpha}$$

โดย ϕ คือ standard normal density

ตัวอย่าง 3.7. ใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง Normal VaR ที่

$$\mu = 0.0004 \quad \sigma = 0.012 \quad \alpha = 0.99$$

และ

$$\phi(2.3263) \approx 0.02665$$

จะได้

$$\text{ES}_{0.99} \approx -0.0004 + 0.012 \frac{0.02665}{0.01} \approx 0.03158$$

หรือประมาณ 3.158%

สำหรับมูลค่า 10 ล้านบาท เท่ากับประมาณ 315,800 บาท

3.9.2 VaR กับ ES ตอบคำถามต่างกัน

ตารางที่ 3.1: เปรียบเทียบ VaR และ Expected Shortfall

ประเด็น	VaR	Expected Shortfall
คำถามหลัก	threshold ของ loss อยู่ที่ไหน	เมื่อเข้าสู่ tail แล้ว loss โดยเฉลี่ยรุนแรงเพียงใด
ใช้ข้อมูลหลัง threshold	ไม่สรุปความรุนแรงโดยตรง	ใช้ tail severity โดยตรง
การตีความ	quantile	tail average / quantile integral
optimization	อาจมีปัญหาด้าน non-convexity ในบางกรณี	มีโครงสร้างเหมาะกับ convex optimization มากกว่าในหลายบริบท

3.9.3 คุณสมบัติของ Coherent Risk Measure

มาตรวัดความเสี่ยง $\rho(X)$ บนตัวแปร loss เรียกว่า coherent หากมีสมบัติหลัก [3]

1. **Monotonicity** ถ้า $X \leq Y$ เกือบแน่นอน แล้ว $\rho(X) \leq \rho(Y)$
2. **Translation invariance** สำหรับค่าคงที่ c

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

3. **Positive homogeneity** สำหรับ $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

4. **Subadditivity**

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Expected Shortfall ภายใต้นิยามมาตรฐานเป็น coherent risk measure ส่วน VaR ไม่เป็น subadditive สำหรับ distribution บางประเภท จึงอาจให้ผลที่ไม่สอดคล้องกับหลัก diversification ในบางกรณี

ความหมายเชิงปฏิบัติของ subadditivity คือ “การรวมสองพอร์ตไม่ควรถูกประเมินว่าเสี่ยงมากกว่าผลรวมของความเสี่ยงที่แยกกันโดยไม่มีเหตุผล” คุณสมบัตินี้สอดคล้องกับ intuition ของ diversification และเป็นเหตุผลสำคัญที่ ES ถูกใช้ในงานบริหาร tail risk และ optimization หลายประเภท แม้การใช้งานจริงยังต้องระวัง

estimation error ของ tail distribution

3.10 EWMA Volatility และความเสี่ยงที่เปลี่ยนตามเวลา

ข้อมูลผลตอบแทนทางการเงินมักมี volatility clustering คือช่วงที่ความผันผวนสูงมีแนวโน้มตามด้วยช่วงที่ความผันผวนสูง และช่วงสงบมีแนวโน้มตามด้วยช่วงสงบ แบบจำลอง EWMA ให้น้ำหนักข้อมูลล่าสุดมากกว่าข้อมูลเก่า

บทนิยาม 3.9

กำหนด EWMA conditional variance โดย

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(R_{t-1} - \mu)^2$$

โดย

$$0 < \lambda < 1$$

เมื่อขยาย recursion

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} (R_{t-j} - \mu)^2$$

ภายใต้ infinite-history idealization

น้ำหนักของ squared innovation ที่ lag j คือ

$$(1 - \lambda) \lambda^{j-1}$$

จึงลดลงแบบเรขาคณิตตามความเก่าของข้อมูล

ค่า λ จึงควบคุม trade-off ระหว่าง ความไวต่อข่าวล่าสุด กับ ความเรียบของค่าประมาณ ค่า λ ต่ำให้น้ำหนักข้อมูลใหม่มากและตอบสนองเร็ว ส่วนค่า λ สูงทำให้ volatility เปลี่ยนช้ากว่า สามารถสรุปความจำของน้ำหนักด้วย half-life

$$h_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\lambda)}$$

เช่น $\lambda = 0.94$ มี half-life ประมาณ 11.2 งวด หมายความว่าน้ำหนักของ shock จะลดลงเหลือครึ่งหนึ่งหลัง

ประมาณ 11 จวด

ตัวอย่าง 3.8. ให้

$$\lambda = 0.94$$

$$\sigma_{t-1} = 1.5\%$$

และ

$$R_{t-1} - \mu = -3\%$$

จะได้

$$\sigma_t^2 = 0.94(0.015)^2 + 0.06(0.03)^2 = 0.0002655$$

ดังนั้น

$$\sigma_t = \sqrt{0.0002655} \approx 1.629\%$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

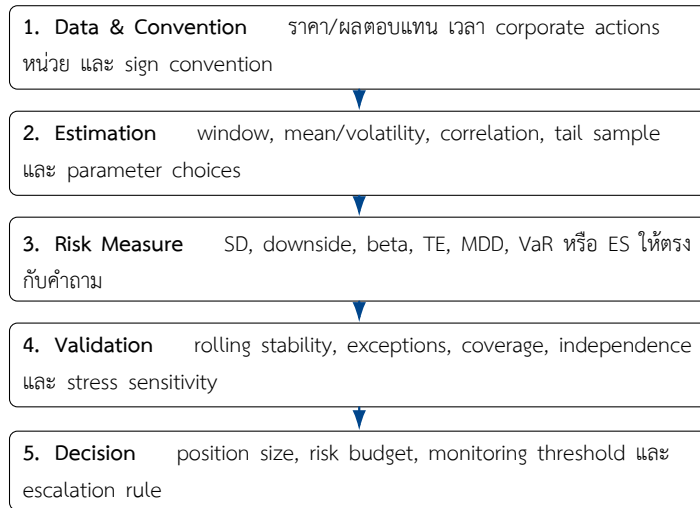
EWMA ทำให้ volatility เปลี่ยนตามข้อมูลล่าสุด แต่หากใช้ Normal EWMA ใน VaR หรือ ES ยังมี distributional assumption แบบ Normal เป็นอีกชั้นหนึ่ง จึงไม่ควรสรุปว่า time-varying volatility แก้ปัญหา fat tails ได้ทั้งหมด

3.11 การตรวจสอบแบบจำลองความเสี่ยง

ค่าความเสี่ยงที่คำนวณได้เป็น forecast ของ distribution หรือ tail threshold จึงต้องตรวจสอบด้วย realized outcomes

การ validation ควรแยกอย่างน้อยสองคำถาม: **coverage** ว่าจำนวน exceptions สอดคล้องกับระดับความเชื่อมั่นหรือไม่ และ **independence** ว่า exceptions กระจายตามเวลาอย่างเหมาะสมหรือกระจุกตัวเป็นกลุ่ม

หาก exceptions เกิดติดกันในช่วงวิกฤต แม้จำนวนรวมดูใกล้เคียงค่าคาดหวัง ก็อาจบ่งชี้ว่าแบบจำลองตอบสนองต่อ regime change ซ้ำเกินไป



รูปที่ 3.3: วงจรจากข้อมูลสู่การตัดสินใจด้านความเสี่ยง โดยบังคับให้ risk estimate ผ่านการตรวจสอบก่อนนำไปใช้กำหนดสถานะหรือวงเงิน

สำหรับ VaR กำหนด exception indicator

$$I_t = 1\{L_t > \text{VaR}_{\alpha,t}\}$$

ถ้าแบบจำลอง calibrated ถูกต้องในเชิง coverage โดยประมาณ

$$\mathbb{E}(I_t) = 1 - \alpha$$

และจำนวน exceptions ใน T วันควรใกล้เคียง

$$T(1 - \alpha)$$

3.11.1 Violation Ratio

ถ้าเกิด exception จริง x ครั้ง

$$VR = \frac{x}{T(1 - \alpha)}$$

ค่าใกล้ 1 หมายถึงจำนวน exceptions ใกล้ค่าที่คาดจาก nominal coverage แต่ไม่ได้ยืนยันว่า exceptions กระจายอย่างเป็นอิสระ

ในเชิงบริหารความเสี่ยง $VR > 1$ มักชี้ว่าแบบจำลองให้ VaR ต่ำเกินไปเมื่อเทียบกับ realized losses ส่วน $VR < 1$ อาจเกิดจากแบบจำลอง conservative เกินไปหรือช่วงทดสอบสงบกว่าช่วงประมาณค่า อย่างไรก็ตามทั้งสองกรณีต้องดูความไม่แน่นอนเชิงสถิติและ clustering ของ exceptions ก่อนตัดสินคุณภาพแบบจำลอง

ตัวอย่าง 3.9. VaR ที่ระดับ 99% มีข้อมูล 500 วันและเกิด exception 9 วัน จำนวนที่คาดคือ

$$500(0.01) = 5$$

ดังนั้น

$$VR = \frac{9}{5} = 1.8$$

แบบจำลองมี exceptions มากกว่าที่ nominal coverage คาดไว้ 80% ในเชิงจำนวน แต่การตัดสินเชิงสถิติยังต้องใช้ formal backtesting

การทดสอบ formal coverage และ independence เช่น Kupiec และ Christoffersen จะพัฒนาในบทที่ 11 [29, 15]

3.12 กรณีศึกษาจากงานวิจัย: VaR และ CVaR ของหุ้นธนาคารไทย

งานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาความเสี่ยงของหุ้นกลุ่มธนาคารไทยและดัชนี SET Finance ด้วยข้อมูลในช่วงปี 2017–2021 โดยเปรียบเทียบ Normal EWMA กับ Historical Simulation ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% พร้อมตรวจสอบแบบจำลองด้วย Violation Ratio, Three-Zone Approach และการประเมิน CVaR [71]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: หลักการอ่านกรณีศึกษาทางประวัติศาสตร์

ตัวเลขในส่วนนี้เป็นผลจาก sample period ปี 2017–2021 และ methodology ของงานวิจัยดังกล่าว จึงใช้เพื่อศึกษาความไวของ risk estimates ต่อแบบจำลองและการตรวจสอบคุณภาพของแบบจำลอง ไม่ควรตีความเป็นอันดับความเสี่ยงปัจจุบันหรือคำแนะนำซื้อขายหลักทรัพย์

ตารางที่ 3.2: ตัวอย่างค่าเฉลี่ยความเสี่ยงรายวันระดับ 99% จากกรณีศึกษาหุ้นธนาคารไทย ปี 2017–2021

หลักทรัพย์	SD (%)	Normal EWMA VaR (%)	Historical VaR (%)	Normal EWMA CVaR/ES (%)	Historical CVaR/ES (%)
BAY	1.83342	4.27498	4.81192	4.89627	6.58033
BBL	1.66791	3.90430	5.68874	4.46950	7.63402
KBANK	2.07678	4.85173	6.48606	5.55548	9.16025
KKP	1.74970	4.06866	5.58098	4.66158	9.06688
KTB	1.62364	3.80265	4.65200	4.35285	7.88938
SCB	1.95513	4.56549	6.03957	5.22802	9.21371
LHFG	1.59193	3.72377	4.34851	4.26322	6.51605
TCAP	1.75994	4.10823	4.50237	4.70461	8.23542
TISCO	1.66323	3.83718	5.24258	4.40079	8.47776
TTB	2.22489	5.20752	6.80535	5.96147	11.19225
SET Finance	1.30504	3.04015	3.73471	3.48238	6.98334

ตารางแสดงประเด็นสำคัญสามประการ

1. การจัดอันดับความเสี่ยงสามารถเปลี่ยนเมื่อเปลี่ยนแบบจำลอง แม้ใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน
2. Historical ES/CVaR สามารถสูงกว่า Normal EWMA ES อย่างมากเมื่อ empirical tail รุนแรงกว่าที่ Normal assumption สืบ
3. แบบจำลองที่ให้ตัวเลขคุณสมบัติสมผลยังต้องผ่านการตรวจสอบกับ realized losses ก่อนนำไปใช้จริง

เมื่ออ่านตัวเลขเชิงเปรียบเทียบจะเห็นภาพชัดขึ้น เช่น TTB มี Historical CVaR 11.19225% เทียบกับ Normal EWMA CVaR 5.96147% หรือประมาณ 1.88 เท่า ขณะที่ SET Finance มี Historical CVaR 6.98334% เทียบกับ Normal EWMA CVaR 3.48238% หรือประมาณ 2.01 เท่า ความต่างดังกล่าวไม่ได้พิสูจน์ว่า Historical Simulation “ดีกว่าเสมอ” แต่ชี้ว่า สมมติฐานเกี่ยวกับ tail มีผลต่อขนาด risk estimate อย่างมาก และผู้ใช้ควรตรวจว่าแบบจำลองใดสอดคล้องกับ realized outcomes มากกว่าในบริษัทที่ใช้งาน

อีกข้อสังเกตคือ SD กับ tail risk ไม่ให้ ranking เดียวกันโดยอัตโนมัติ แม้ TTB มี SD สูงสุดในตารางและมีค่าทางสูงมาก แต่ความแตกต่างระหว่างหลักทรัพย์อื่น ๆ เปลี่ยนตาม Normal EWMA หรือ Historical Simulation

จึงไม่ควรสรุป “หุ้นใดเสี่ยงกว่า” โดยไม่ระบุทั้ง metric, confidence level, horizon และ model

ผลการตรวจสอบในงานวิจัยยังแสดงว่า acceptance หรือ rejection ของแบบจำลองแตกต่างกันตาม confidence level และวิธีประเมิน จึงสนับสนุนหลักการว่า risk model ไม่มีคุณภาพโดยอาศัยความซับซ้อนของสูตรเพียงอย่างเดียว [71]

3.13 Data Risk, Estimation Risk และ Model Risk

การวัดความเสี่ยงมีความเสี่ยงของตัวมันเองอย่างน้อยสามชั้น

3.13.1 Data Risk

เกิดจากข้อมูลผิด ไม่ครบ หรือไม่สอดคล้อง เช่น missing prices, corporate actions ที่ไม่ได้ปรับ, stale prices, timestamp mismatch, survivorship bias และ currency mismatch

3.13.2 Estimation Risk

เกิดจากการประมาณพารามิเตอร์จากตัวอย่างจำกัด เช่น mean, volatility, beta, correlation และ tail quantile ซึ่งสามารถเปลี่ยนเมื่อเปลี่ยน sample period

3.13.3 Model Risk

เกิดจากสมมติฐานหรือโครงสร้างแบบจำลอง เช่น Normality, iid assumption, fixed correlation, linear exposure หรือ lookback window ที่ไม่เหมาะสมกับสถานะตลาด

สามชั้นนี้สามารถเกิดพร้อมกันได้ ตัวอย่างเช่นราคาบางวัน stale (data risk) ทำให้ volatility ถูกประมาณต่ำ (estimation risk) และเมื่อนำค่าดังกล่าวไปใส่ Normal VaR ที่สมมติทางบาง (model risk) ความคลาดเคลื่อนอาจสะสมจน risk limit ที่กำหนดจากผลลัพธ์ดูปลอดภัยเกินจริง ดังนั้น governance ที่ดีต้องตรวจตั้งแต่ต้นทาง ข้อมูล ไม่ใช่ตรวจเฉพาะสูตรสุดท้าย

แนวทางควบคุมแบบใช้งานจริง

Data risk: ใช้ data dictionary, timestamp check และ corporate-action audit **Estimation risk:** ใช้ rolling window, confidence interval, bootstrap หรือ sensitivity analysis **Model risk:** ใช้ challenger model, out-of-sample validation และ stress scenario หากโมเดลหลายแบบให้คำตอบต่างกันมาก ความแตกต่างนั้นเองเป็นข้อมูลเกี่ยวกับ model uncertainty

Minimum Risk-Model Record

การรายงานตัวเลขความเสี่ยงควรระบุอย่างน้อย

1. ตัวแปรและ sign convention
2. data source และ sample period
3. frequency และ timestamp convention
4. return definition และ corporate-action adjustment
5. estimation window
6. confidence level และ horizon
7. model specification
8. parameter choices เช่น λ
9. validation method
10. ข้อจำกัดและเหตุการณ์ที่แบบจำลองอาจใช้ไม่ได้

3.14 การเลือกมาตรวัดความเสี่ยงให้เหมาะกับคำถาม

หลักที่สำคัญคือ ไม่มีมาตรวัดใดเป็น “ดีที่สุด” โดยไม่ระบุ decision problem ผู้จัดการกองทุนตามดัชนีอาจให้ความสำคัญกับ Tracking Error มากกว่านักลงทุนที่กังวลการขาดทุนจาก peak ขณะที่ผู้กำหนด risk limit ระยะสั้นอาจใช้ VaR/ES ร่วมกับ liquidity และ stress metrics ตารางต่อไปจึงควรอ่านเป็นแผนที่เลือกเครื่องมือ ไม่ใช่อันดับคุณภาพของมาตรวัด

ตารางที่ 3.3: แผนทีการเลือกมาตรวัดความเสี่ยง

คำถาม	มาตรวัดหลัก	ข้อควรระวัง
ผล ตอบแทน กระจาย จาก ค่าเฉลี่ยเพียงใด	Variance / SD	สมมาตรต่อ upside และ downside
สินทรัพย์สองตัวเคลื่อนไหวร่วมกันอย่างไร	Covariance / Correlation	correlation ไม่เท่ากับ independence
ขาดทุนต่ำกว่าเป้าหมายเพียงใด	LPM / Downside Deviation	ต้องกำหนด target และ denominator convention
ไวต่อการเคลื่อนไหวตลาดเพียงใด	Beta	ไม่ใช่ total risk
เบี่ยงจาก benchmark เพียงใด	Tracking Error	ไม่วัด absolute risk
เคย ลด จาก peak มาก ที่สุดเท่าใด	MDD	ขึ้นกับเส้นทางและ sample period
threshold ของ tail loss อยู่ที่ใด	VaR	ไม่บอก severity หลัง threshold
เมื่ออยู่ใน tail แล้วรุนแรงเพียงใด	ES/CVaR	ขึ้นกับ tail model และ sample
volatility ปัจจุบัน เปลี่ยนอย่างไร	EWMA	ยัง ต้องเลือก λ และ distribution assumption

3.15 Investment Lab: Risk Measurement Pipeline

Investment Lab: Risk Dashboard จากข้อมูลผลตอบแทน

วัตถุประสงค์ สร้างรายงานความเสี่ยงที่สามารถตรวจสอบย้อนกลับได้

1. เลือกสินทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการและกำหนด sample period
2. คำนวณ mean, SD, skewness และ kurtosis
3. สร้าง covariance และ correlation matrix
4. คำนวณ downside deviation ที่ target อย่างน้อย 2 ค่า

5. เลือก benchmark และคำนวณ beta กับ tracking error
6. สร้าง wealth index และคำนวณ MDD
7. คำนวณ Historical VaR/ES ที่ 95% และ 99%
8. ประมาณ EWMA volatility และ Normal VaR/ES
9. สร้าง exception indicators สำหรับช่วง out-of-sample
10. สรุปว่า metric ใดให้ข้อมูลที่ metric อื่นไม่ให้

Quality Gate ก่อนส่ง Risk Dashboard

รายงานควรผ่านอย่างน้อย 6 จุด: (1) ใช้ return convention เดียวกันทุกสินทรัพย์ (2) ระบุ sample และ as-of date (3) ตรวจสอบ missing/stale data (4) ระบุ denominator/quantile convention (5) แยก in-sample estimation จาก out-of-sample validation และ (6) อธิบายว่าตัวเลขแต่ละตัวนำไปใช้ตัดสินใจอะไร หาก dashboard มีตัวเลขมากแต่ตอบข้อ 6 ไม่ได้ ควรถือว่ายังไม่พร้อมใช้งาน

Investment Lab: Research Reproduction: VaR-CVaR และ Model Validation

หากมีข้อมูลต้นฉบับช่วงปี 2017–2021 ให้ทำซ้ำการฝึกศึกษาหุ้นธนาคารไทยตามขั้นตอน

1. สร้าง daily return โดยบันทึก price adjustment และ trading calendar
2. ประมาณ volatility ด้วย EWMA
3. คำนวณ Normal VaR/ES ที่ 95% และ 99%
4. คำนวณ Historical Simulation VaR/ES ด้วย quantile convention ที่ระบุ
5. สร้าง exception indicator และ Violation Ratio
6. เปรียบเทียบผลกับตารางที่ 3.2
7. หากผลต่างจากงานเดิม ให้ตรวจสอบ calendar, missing data, price convention, quantile interpolation และ EWMA initialization ก่อนสรุป

การใช้ข้อมูลช่วงเวลาอื่นถือเป็น replication หรือ extension ไม่ใช่ reproduction ของ sample เดิม

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์ของความเสี่ยงจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่ tail risk โดยเริ่มจากการมองผลตอบแทนเป็นตัวแปรสุ่มและวัดการกระจายด้วย variance กับ standard deviation จากนั้นใช้ covariance และ correlation เพื่ออธิบาย dependence และใช้ beta เพื่อวัดความไวต่อปัจจัยตลาด

ความเสี่ยงด้านลบถูกแยกออกด้วย lower partial moments และ downside deviation ขณะที่ tracking error วัดความเสี่ยงเทียบ benchmark และ maximum drawdown วัดความเสี่ยงตามเส้นทาง

สำหรับ tail risk การกำหนด loss convention ทำให้ VaR และ ES มีความสอดคล้องกัน VaR เป็น quantile threshold ส่วน ES สรุปความรุนแรงหลัง threshold Historical Simulation ใช้ empirical distribution โดยตรง ขณะที่ Normal EWMA ทำให้ volatility ปรับตามข้อมูลล่าสุดแต่ยังคง distributional assumption

สุดท้าย การวัดความเสี่ยงต้องคำนึงถึง data risk, estimation risk และ model risk ควบคู่กับตัวเลข จึงควรรายงาน sample period, frequency, convention, horizon, confidence level, model specification และ ผล validation ทุกครั้งที่น่า risk estimate ไปใช้

คำศัพท์สำคัญ

- Expected return
- Variance
- Standard deviation
- Covariance
- Correlation
- Covariance matrix
- Skewness
- Kurtosis
- Lower Partial Moment
- Downside deviation
- Beta
- Systematic risk
- Idiosyncratic risk
- Tracking Error
- Maximum Drawdown
- Value-at-Risk
- Expected Shortfall
- Conditional Value-at-Risk
- Historical Simulation
- EWMA
- Exception
- Violation Ratio
- Data risk
- Estimation risk
- Model risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ผลตอบแทน (5%, -2%, 10%, -6%, 8%) จงหาค่าเฉลี่ย sample variance และ sample standard deviation
2. พิสูจน์ว่า variance ไม่เปลี่ยนเมื่อบวกค่าคงที่ให้ตัวแปรสุ่ม

3. อธิบายเงื่อนไขที่ทำให้การ annualize volatility ด้วย $\sqrt{252}$ สมเหตุสมผล
4. พิสูจน์ว่า $|\rho_{ij}| \leq 1$ ด้วย Cauchy-Schwarz inequality
5. สร้างตัวอย่างตัวแปรสุ่มสองตัวที่มี correlation เท่ากับศูนย์แต่ไม่เป็นอิสระต่อกัน
6. คำนวณ downside deviation สำหรับข้อมูล $(-8\%, -2\%, 1\%, 4\%, 7\%)$ ที่ target 0% และ 2%
7. ถ้า $\text{Cov}(R_i, R_M) = 0.00030$ และ $\text{Var}(R_M) = 0.00020$ จงหา beta และตีความ
8. จาก active returns รายเดือน 12 ค่า จงคำนวณ annualized tracking error โดยระบุสมมติฐาน
9. จาก wealth index ที่กำหนด จงหาจุด peak, trough, drawdown และ MDD
10. ถ้า $R \sim N(0.0005, 0.015^2)$ จงหา Normal VaR ที่ 95% และ 99%
11. จากข้อมูล loss 100 ค่า จงอธิบายขั้นตอนคำนวณ Historical VaR และ ES ที่ 95% พร้อมระบุ quantile convention
12. พิสูจน์สูตร Normal ES จาก expectation ของ truncated normal distribution
13. อธิบายเหตุผลที่ VaR อาจไม่เป็น subadditive ในบาง distribution
14. ให้ $\lambda = 0.94$, $\sigma_{t-1} = 1.5\%$ และ innovation เท่ากับ -3% จงหา EWMA volatility วงถัดไป
15. แบบจำลอง VaR 99% มีข้อมูล 500 วันและ exceptions 9 วัน จงหา Violation Ratio และอภิปรายข้อจำกัดของการใช้ VR เพียงอย่างเดียว
16. จากตารางที่ 3.2 เลือกหลักทรัพย์อย่างน้อย 3 ตัวและเปรียบเทียบ risk ranking ระหว่าง Normal EWMA กับ Historical Simulation
17. อธิบายความแตกต่างระหว่าง data risk, estimation risk และ model risk พร้อมยกตัวอย่างอย่างละ 2 กรณี
18. แบบจำลอง A ให้ VaR 99% ต่ำกว่าแบบจำลอง B แต่ ES สูงกว่า จงอธิบายว่าเหตุการณ์นี้สะท้อนรูป tail ที่ต่างกันอย่างไร และควรตรวจสอบข้อมูลใดก่อนเลือกแบบจำลอง
19. สร้าง rolling 60-day volatility และ rolling 250-day volatility จากข้อมูลชุดเดียวกัน แล้วอภิปราย trade-off ระหว่าง responsiveness กับ estimation noise
20. สมมติ risk dashboard รายงาน SD, beta, MDD และ ES ให้กำหนดตัวอย่าง decision rule ที่เหมาะสมกับแต่ละมาตรวัด โดยไม่ใช้มาตรวัดใดแทน risk limit โดยตรง

คำถามชวนคิด

1. สินทรัพย์ที่มี standard deviation ต่ำกว่าอาจมี tail risk สูงกว่าได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. Correlation ที่ต่ำในภาวะปกติสามารถสร้างความมั่นใจเกินจริงด้าน diversification ได้อย่างไร

3. หากผู้ลงทุนสนใจการรักษาเงินต้นมากกว่าความผันผวนโดยรวม ควรใช้มาตรวัดใดร่วมกัน
4. VaR และ ES ควรแทนที่กันหรือควรใช้ร่วมกัน เพราะเหตุใด
5. แบบจำลองความเสี่ยงที่ผ่าน backtest ในอดีตควรถูกเชื่อถือในอนาคตโดยอัตโนมัติหรือไม่
6. ระหว่าง การใช้โมเดลเดียว ที่ซับซ้อน มาก กับ การใช้ หลาย โมเดล ที่ เรียบง่าย เพื่อ เปรียบ เทียบ model uncertainty แนวทางใดเหมาะสมกับ governance มากกว่าในบริษัทใด

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 3

- [3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. “Coherent Measures of Risk”. In: *Mathematical Finance* 9.3 (1999), pp. 203–228.
- [15] Peter F. Christoffersen. “Evaluating Interval Forecasts”. In: *International Economic Review* 39.4 (1998), pp. 841–862.
- [29] Paul H. Kupiec. “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”. In: *The Journal of Derivatives* 3.2 (1995), pp. 73–84.
- [33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: [10.2307/2975974](https://doi.org/10.2307/2975974).
- [34] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. 2nd ed. Princeton University Press, 2015.
- [41] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. “Optimization of Conditional Value-at-Risk”. In: *The Journal of Risk* 2.3 (2000), pp. 21–41.
- [61] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การลงทุนในตลาดการเงิน: เอกสารประกอบการเรียนรายวิชา ส.247 ตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์*. ปทุมธานี, 2021.
- [62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.
- [71] Wichai Witayakiattilerd, Natthaphon Reunprot, Wachirada Limpanawannakul, and Jirawan Phuphon. “Analyzing Stock Performance in the Banking Sector: Unveiling Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk Strategies”. In: *Thailand Statistician* 22.4 (2024), pp. 877–893.
- [72] Yasuhiro Yamai and Toshinao Yoshiba. “Value-at-Risk versus Expected Shortfall: A Practical Perspective”. In: *Journal of Banking & Finance* 29.4 (2005), pp. 997–1015.

Part II

การประเมินมูลค่างานศิลปะ

