

บทที่ 5 คณิตศาสตร์ตราสารหนี้และความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. แยกองค์ประกอบของตราสารหนี้ ได้แก่ มูลค่าที่ตราไว้ มูลค่าไถ่ถอน อัตราดอกเบี้ย ความถี่การจ่ายดอกเบี้ย วันครบกำหนด และอัตราผลตอบแทนที่ใช้คิดลด
2. ประเมินราคาตราสารไม่มีดอกเบี้ยและตราสารมีดอกเบี้ยจากหลักมูลค่าปัจจุบัน โดยจัดฐานเวลาและความถี่การทบต้นให้สอดคล้องกัน
3. พิสูจน์ และ ตีความ ความสัมพันธ์ระหว่าง coupon rate, yield และสถานะ premium-par-discount
4. หา Yield to Maturity (YTM) จากสมการราคาและอธิบายข้อจำกัดของ YTM ในฐานมาตรฐานวัดผลตอบแทน
5. สร้าง discount factors และ spot rates ด้วย bootstrap และคำนวณ forward rates จากเงื่อนไข no-arbitrage
6. คำนวณมูลค่าตามบัญชี การตัดจ่าย premium/discount และแยก clean price, dirty price กับ accrued interest
7. คำนวณ Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01/BPV และใช้ประมาณการการเปลี่ยนแปลงราคาจาก yield shock
8. อธิบาย key-rate duration และข้อจำกัดของ parallel-shift assumption
9. สร้าง immunized portfolio ภายใต้เงื่อนไข present-value matching และ duration matching พร้อมอธิบายบทบาทของ convexity
10. แยก interest-rate risk ออกจาก credit, liquidity, reinvestment และ embedded-option risk
11. เชื่อม zero-coupon curve และ forward-rate representation กับแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยเชิงสโตแคสติก
12. สร้างแบบจำลองตราสารหนี้ด้วย Excel หรือ Python ที่ตรวจสอบย้อนกลับได้และมี unit checks ของราคา yield duration และ convexity

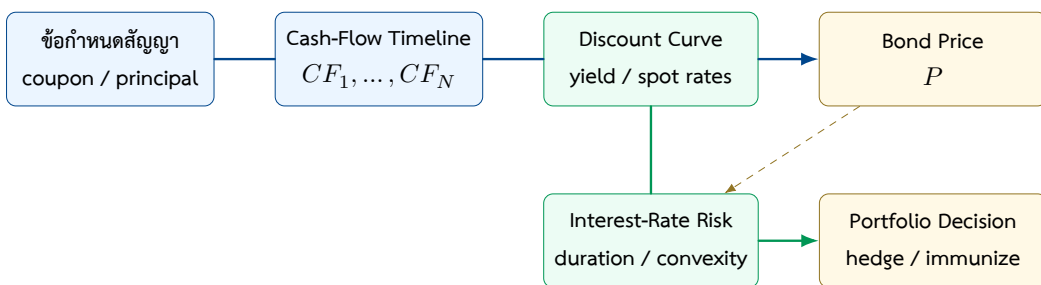
5.1 บทนำ: ตราสารหนี้คือชุดกระแสเงินสดที่มีโครงสร้างเวลา

ตราสารหนี้เป็นสิทธิเรียกร้องตามสัญญาที่กำหนดกระแสเงินสดในอนาคต ผู้ลงทุนจึงสามารถมองตราสารหนี้เป็นชุดของ cash flows ที่กระจายอยู่ตามเวลา แล้วใช้ discount factors ที่เหมาะสมแปลงกระแสเงินสดเหล่านั้นกลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบัน

แกนกลางของบทคือ

$$\text{Bond Price} = \text{Present Value of Contractual Cash Flows}$$

เมื่ออัตราที่ใช้คิดลดเปลี่ยนแปลง ราคาจะเปลี่ยนแปลงตาม จึงเกิดความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย ขณะเดียวกัน ตราสารหนี้ยังมีความเสี่ยงจากเครดิต สภาพคล่อง การลงทุนต่อ และเงื่อนไขแฝงในสัญญา ดังนั้น duration หรือ yield เพียงตัวเดียวไม่สามารถอธิบายความเสี่ยงทั้งหมดได้ [18]



รูปที่ 5.1: จากข้อกำหนดในสัญญาไปสู่ราคา ความไวต่ออัตราดอกเบี้ย และการบริหารพอร์ต

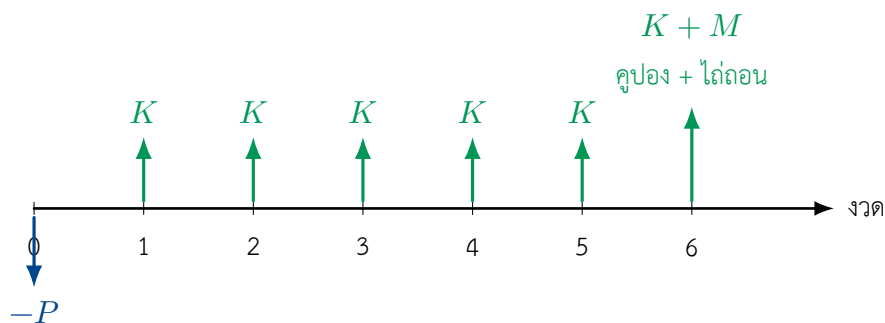
ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า “อัตราดอกเบี้ย”, “coupon rate”, “yield”, “YTM”, “spot rate” และ “forward rate” ไม่ใช่คำเดียวกัน แม้ทั้งหมดมีหน่วยเป็นอัตราต่อเวลา การคำนวณต้องระบุฐานเวลา ความถี่การทบต้น day-count convention และกระแสเงินสดที่อัตรานั้นใช้กำหนดราคาเสมอ

5.2 องค์ประกอบของตราสารหนี้และสัญลักษณ์

ตารางที่ 5.1: สัญลักษณ์หลักที่ใช้ในบท

สัญลักษณ์	ความหมาย	หมายเหตุ
F	มูลค่าที่ตราไว้ (face/par value)	ฐานคำนวณคูปองในกรณีทั่วไป
M	มูลค่าไถ่ถอน (redemption value)	อาจเท่าหรือไม่เท่ากับ F
c	nominal coupon rate ต่อปี	ต้องระบุ frequency
m	จำนวนครั้งที่จ่ายคูปองต่อปี	เช่น $m = 2$ สำหรับครึ่งปี
K	คูปองต่อหนึ่งงวด	โดยทั่วไป $K = cF/m$
T	อายุคงเหลือในหน่วยปี	อาจเป็นเศษปีได้
N	จำนวนงวดคูปองที่เหลือ	ถ้าเป็นจำนวนเต็ม มักมี $N = mT$
$y^{(m)}$	nominal YTM ต่อปี ทบต้น m ครั้ง	periodic yield $i = y^{(m)}/m$
i	yield ต่อหนึ่งงวดคูปอง	ใช้กับ cash flows ที่ห่างกันหนึ่งงวด
v	discount factor หนึ่งงวด	$v = (1 + i)^{-1}$
P	ราคาตราสาร ณ วันประเมิน	ต้องระบุ clean หรือ dirty ระหว่างวันคูปอง



รูปที่ 5.2: แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารคูปองมาตรฐาน

5.3 ราคาตราสารหนี้จากมูลค่าปัจจุบัน

5.3.1 หลักมูลค่าปัจจุบันทั่วไป

ให้ตราสารจ่ายกระแสเงินสด CF_k ณ เวลา t_k และให้ $d(0, t_k)$ เป็น discount factor จาก t_k กลับสู่เวลา 0

หลักการประเมินราคาตราสารหนี้

$$P = \sum_{k=1}^q CF_k d(0, t_k)$$

สมการนี้เป็นหลักทั่วไปที่สุดของบท สูตร YTM, spot-rate pricing และการ bootstrap ล้วนเป็นกรณีหรือการประยุกต์ของสมการเดียวกัน

5.3.2 ตราสารไม่มีคูปอง

บทนิยาม 5.1

ตราสารไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) จ่ายเพียงมูลค่าไถ่ถอน M ณ เวลา T ถ้าอัตราผลตอบแทนที่เป็นผลต่อปีเท่ากับ y

$$P = \frac{M}{(1+y)^T}$$

ตัวอย่าง 5.1. ตราสารไม่มีคูปองมีมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อายุ 5 ปี และ yield 10% ต่อปี

$$P = 100,000(1.10)^{-5} \approx 62,092.13 \text{ บาท}$$

5.3.3 ตราสารมีคูปอง

ถ้า yield ต่อหนึ่งงวดคูปองเท่ากับ i และเหลือ N งวด

Coupon Bond Pricing

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{K}{(1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^N}$$

หรือ

$$P = K a_{\overline{N}|i} + Mv^N$$

โดย

$$a_{\overline{N}|i} = \frac{1 - v^N}{i} \quad v = (1 + i)^{-1}$$

ถ้า $M = F$ และจ่ายคูปองปีละครั้ง $K = cF$

$$P = cF a_{\overline{N}|i} + Fv^N$$

ตัวอย่าง 5.2. ตราสารมูลค่าที่ตราไว้และมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราคูปอง 10% อายุคงเหลือ 10 ปี YTM 8% และจ่ายคูปองปีละครั้ง

$$P = 10,000 a_{\overline{10}|0.08} + 100,000(1.08)^{-10}$$

จึงได้

$$P \approx 113,420.16 \text{ บาท}$$

5.3.4 ความถี่การจ่ายคูปองและฐาน yield

หากจ่ายคูปองปีละ m ครั้ง

$$K = \frac{cF}{m}$$

และถ้า YTM เสนอเป็น nominal rate $y^{(m)}$

$$i = \frac{y^{(m)}}{m}$$

ดังนั้น

Bond Pricing with m Coupon Payments per Year

$$P = \sum_{k=1}^{mT} \frac{cF/m}{(1 + y^{(m)}/m)^k} + \frac{M}{(1 + y^{(m)}/m)^{mT}}$$

หากทราบ effective annual yield y_{eff} แทน periodic yield ที่สอดคล้องคือ

$$i = (1 + y_{\text{eff}})^{1/m} - 1$$

ไม่ใช่ y_{eff}/m โดยทั่วไป

5.4 Premium, Par และ Discount

กำหนด modified coupon rate ต่อหนึ่งงวดเมื่อเทียบกับมูลค่าไถ่ถอนเป็น

$$g = \frac{K}{M}$$

จาก

$$P = Ka_{\overline{N}|i} + Mv^N$$

และ

$$1 - v^N = ia_{\overline{N}|i}$$

จะได้

Base-Amount Formula

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

หรือ

$$P = M + M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

อีกแบบหนึ่งคือ

Makeham Form

$$P = \frac{K}{i} + \left(M - \frac{K}{i}\right) v^N$$

ทฤษฎีบท 5.1

สมมติ $M > 0$, $i > 0$ และคูปองคงที่ แล้ว

$$g > i \iff P > M$$

$$g = i \iff P = M$$

และ

$$g < i \iff P < M$$

พิสูจน์. จาก

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

และเพราะ

$$M > 0 \quad \text{และ} \quad a_{\overline{N}|i} > 0$$

เครื่องหมายของ $P - M$ จึงตรงกับเครื่องหมายของ $g - i$ □

ในกรณี $F = M$ และ coupon frequency กับ yield convention สอดคล้องกัน สามารถเปรียบเทียบ coupon rate กับ YTM ได้โดยตรง

ข้อสังเกต

ตราสารที่ซื้อขายสูงกว่าพาร์ไม่ได้แปลว่า “แพงเกินไป” และตราสารที่ต่ำกว่าพาร์ไม่ได้แปลว่า “ถูก” สถานะ premium หรือ discount เป็นกลไกที่ทำให้ present value ของกระแสเงินสดสอดคล้องกับ

yield ที่ตลาดกำหนด

5.5 Yield to Maturity

บทนิยาม 5.2

Yield to Maturity คือ periodic rate i ที่ทำให้ present value ของ contractual cash flows เท่ากับ ราคาตราสาร

$$f(i) = \sum_{k=1}^N \frac{K}{(1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^N} - P = 0$$

YTM จึงเป็น IRR ของชุดกระแสเงินสดภายใต้ convention ที่กำหนด [62]

ทฤษฎีบท 5.2

ถ้า $CF_k > 0$ ทุกงวดและ $i > -1$

$$P(i) = \sum_{k=1}^N CF_k (1+i)^{-k}$$

เป็นฟังก์ชันลดลงอย่างเคร่งครัด เพราะ

$$P'(i) = - \sum_{k=1}^N k CF_k (1+i)^{-k-1} < 0$$

ดังนั้น หากราคาที่กำหนดอยู่ในช่วงของฟังก์ชันราคา ราคา YTM มีเอกลักษณ์

Bisection สำหรับ YTM

1. เลือก i_L และ i_U ให้ $f(i_L)f(i_U) < 0$
2. กำหนด

$$i_M = \frac{i_L + i_U}{2}$$

3. เลือกครึ่งช่วงที่ยังคร่อมราก

4. ทำซ้ำจน residual หรือความกว้างช่วงต่ำกว่า tolerance ที่กำหนด

Bisection มี convergence ที่ทนทานและเหมาะสมเป็น reference implementation สำหรับตรวจสอบผลจาก spreadsheet หรือ library อื่น

ประเด็นที่ต้องระวัง

YTM ไม่ใช่ realized return ที่รับประกัน หากขายก่อนครบกำหนด หาก reinvest coupons ด้วยอัตราที่ต่างจาก YTM หรือหาก cash flows เปลี่ยนเพราะ default หรือ embedded option ผลตอบแทนจริงอาจต่างจาก YTM อย่างมีนัยสำคัญ

5.6 ราคาและ Yield: Monotonicity และ Convexity

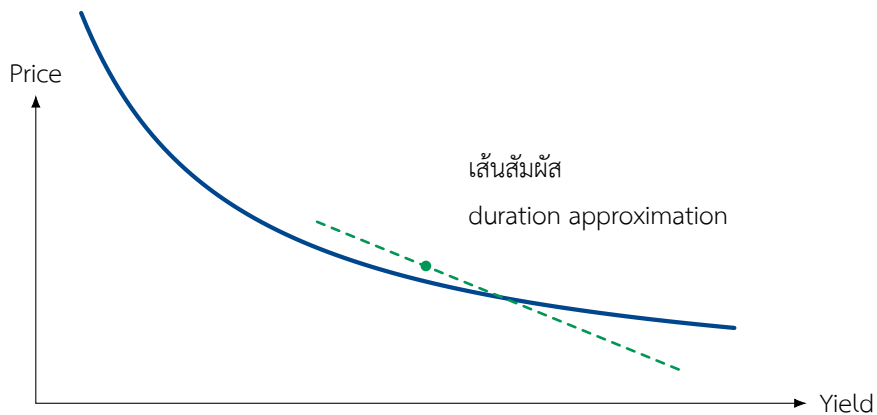
สำหรับกระแสเงินสดบวก

$$P'(i) < 0$$

และ

$$P''(i) = \sum_{k=1}^N k(k+1)CF_k(1+i)^{-k-2} > 0$$

ดังนั้น price–yield relationship ของ plain-vanilla bond ที่ cash flows คงที่มีลักษณะลดลงและนูน



รูปที่ 5.3: เส้นราคา–yield มีลักษณะลดลงและนูน ขณะที่ duration เป็นความชันเฉพาะที่

5.7 Spot Rate, Discount Factor และ Bootstrap

YTM ใช้อัตราเดียวสำหรับกระแสเงินสดหลายเวลา แต่การกำหนดราคาแบบ no-arbitrage ใช้ discount factor เฉพาะแต่ละ maturity

บทนิยาม 5.3

ให้ s_t เป็น spot rate แบบ effective annual สำหรับอายุ t ปี

$$d_t = d(0, t) = \frac{1}{(1 + s_t)^t}$$

และ

$$P = \sum_t CF_t d_t$$

5.7.1 Bootstrap

สมมติ zero-coupon อายุ 1 ปีมี spot rate 3%

$$d_1 = \frac{1}{1.03} = 0.9708738$$

จากนั้นมีตราสาร 2 ปี มูลค่าไถ่ถอน 1,000 บาท คูปอง 40 บาทต่อปี และราคา 1,000 บาท

$$1000 = 40d_1 + 1040d_2$$

จึงได้

$$d_2 = \frac{1000 - 40d_1}{1040} \approx 0.9241972$$

ดังนั้น

$$s_2 = d_2^{-1/2} - 1 \approx 4.0202\%$$

หลัก bootstrap ทำซ้ำโดยใช้ discount factors ที่หาได้แล้วหาค present value ของ cash flows ต้นทางออกก่อนแก้ discount factor ของ maturity ถัดไป

ประเด็นที่ต้องระวัง

การ bootstrap ในตลาดจริงต้องคำนึงถึง instrument conventions, settlement, day count, coupon dates, interpolation และ market quotes ที่แตกต่างกัน การใช้ตัวอย่าง annual cash flow แบบเรียบง่ายมีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงตรรกะทางคณิตศาสตร์

5.8 Forward Rate และ Term Structure

ให้ $f_{m,n}$ เป็น effective annual forward rate สำหรับช่วง m ถึง n

บทนิยาม 5.4

ภายใต้ no-arbitrage

$$(1 + s_n)^n = (1 + s_m)^m (1 + f_{m,n})^{n-m}$$

จึงได้

$$1 + f_{m,n} = \left[\frac{(1 + s_n)^n}{(1 + s_m)^m} \right]^{1/(n-m)}$$

จาก $s_1 = 3\%$ และ $s_2 \approx 4.0202\%$

$$f_{1,2} = \frac{(1 + s_2)^2}{1 + s_1} - 1 \approx 5.0505\%$$

เมื่อใช้ continuous compounding และ instantaneous forward rate

Continuous Forward-Rate Representation

$$P(0, T) = \exp \left(- \int_0^T f(0, u) \, du \right)$$

ข้อสังเกต

yield curve อาจมีลักษณะ upward, flat, inverted หรือ humped แต่รูปทรงเพียงอย่างเดียวไม่ใช่คำพยากรณ์เศรษฐกิจที่แน่นอน เพราะสะท้อน expected future rates, term premium, liquidity, supply-demand และปัจจัยเชิงสถาบันร่วมกัน

5.9 มูลค่าตามบัญชีและการตัดจ่าย Premium/Discount

สมมติซื้อ bond ที่ราคา $B_0 = P$ และใช้ effective yield ต่อหนึ่งงวด i ภายใต้วิธี effective interest ดอกเบี้ยทางคณิตศาสตร์ของงวด k คือ

$$I_k = iB_{k-1}$$

ถ้าคูปองที่ได้รับเท่ากับ K

$$B_k = B_{k-1} + I_k - K$$

ดังนั้น

Book-Value Recursion

$$B_k = B_{k-1}(1+i) - K$$

ถ้า bond เป็น premium bond จะมี $K > I_k$ ในช่วงแรกโดยทั่วไปและ book value ลดเข้าหา redemption value ส่วน discount bond จะมี $I_k > K$ โดยทั่วไปและ book value เพิ่มขึ้นเข้าหา redemption value

ทฤษฎีบท 5.3

หาก yield i และ contractual cash flows คงที่ Book value หลังจ่ายคูปองงวดที่ k เท่ากับ present value ณ เวลานั้นของ remaining cash flows

$$B_k = Ka_{\overline{N-k}|i} + Mv^{N-k}$$

พิสูจน์. เริ่มจาก

$$B_{k-1} = Ka_{\overline{N-k+1}|i} + Mv^{N-k+1}$$

ใช้ identity

$$(1+i)a_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

จะได้

$$B_{k-1}(1+i) - K = Ka_{\overline{N-k}|i} + Mv^{N-k} = B_k$$

□

5.10 ราคาตราสารระหว่างวันจ่ายคูปอง

เมื่อ settlement date อยู่ระหว่าง coupon dates ต้องแยก dirty price กับ clean price

บทนิยาม 5.5

Dirty price หรือ full price คือ present value ของ cash flows ที่ผู้ซื้อจะมีสิทธิได้รับจาก settlement date เป็นต้นไป

Accrued interest คือส่วนคูปองที่สะสมจากวันจ่ายคูปองล่าสุดถึง settlement date ตาม day-count convention

Clean price คือ

$$P_{\text{clean}} = P_{\text{dirty}} - AI$$

ภายใต้ simple fraction approximation ถ้า α เป็นสัดส่วนของ coupon period ที่ผ่านไปแล้ว

$$AI \approx \alpha K$$

หากเวลาเหลือถึง coupon ถัดไปเท่ากับ $1 - \alpha$ งวด และ periodic yield เท่ากับ i

$$P_{\text{dirty}} = \sum_{j=1}^N \frac{CF_j}{(1+i)^{j-\alpha}}$$

ในงานจริงต้องใช้ settlement rule และ day-count convention ของตลาดนั้น ไม่ควรแทน α ด้วยจำนวนวันหารจำนวนวันในงวดแบบใดก็ได้โดยไม่ตรวจสอบมาตรฐาน

ตัวอย่าง 5.3. สมมติ coupon ต่อครึ่งปีเท่ากับ 3 บาท และผ่านไป 40% ของ coupon period

$$AI = 0.40(3) = 1.20 \text{ บาท}$$

ถ้า dirty price เท่ากับ 102.75 บาท

$$P_{\text{clean}} = 102.75 - 1.20 = 101.55 \text{ บาท}$$

5.11 Macaulay Duration

Macaulay duration วัดค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของเวลาที่ได้รับ present value ของ cash flows

ให้ t_k เป็นเวลาในหน่วยปี PV_k เป็น present value ของ cash flow ที่เวลา t_k และ

$$P = \sum_k PV_k$$

บทนิยาม 5.6

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_k t_k PV_k}{P}$$

กำหนด

$$w_k = \frac{PV_k}{P}$$

จะได้

$$w_k \geq 0 \quad \text{และ} \quad \sum_k w_k = 1$$

ดังนั้น

$$D_{\text{Mac}} = \sum_k w_k t_k$$

จึงเป็น weighted-average time ของ cash flows ในหน่วยปี

สำหรับ zero-coupon bond ที่ครบกำหนด T

$$D_{\text{Mac}} = T$$

สำหรับ coupon bond ที่ cash flow ส่วนหนึ่งได้รับก่อน maturity จะมี

$$D_{\text{Mac}} < T$$

เมื่อคูปองเป็นบวก

5.12 Modified Duration และ Price Sensitivity

ในกรณี yield $y^{(m)}$ เสนอเป็น nominal annual yield ทบต้น m ครั้ง

บทนิยาม 5.7

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1 + y^{(m)}/m}$$

และสำหรับ yield shift เล็ก

First-Order Price Approximation

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y^{(m)}$$

สูตรนี้ใช้ $\Delta y^{(m)}$ ในหน่วย decimal เช่น 25 bp เท่ากับ

$$0.0025$$

ตัวอย่าง 5.4. ถ้า

$$D_{\text{mod}} = 6.8$$

และ yield เพิ่ม 50 bp

$$\Delta y = 0.005$$

จะได้

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -6.8(0.005) = -0.034 = -3.4\%$$

ถ้าราคาเริ่มต้น 105 บาท ราคาประมาณใหม่คือ

$$105(1 - 0.034) = 101.43 \text{ บาท}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Modified duration เป็น local linear approximation จึงเหมาะกับ yield change ขนาดเล็กและสมมติว่า cash flows ไม่เปลี่ยนแปลงตาม yield หาก bond มี call, put หรือ prepayment behavior ความสัมพันธ์นี้อาจคลาดเคลื่อนมาก

5.13 Convexity

Duration ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ส่วน convexity ใช้อนุพันธ์อันดับสองเพื่อสะท้อนความโค้งของ price–yield relation

กำหนด convexity ต่อ nominal yield $y^{(m)}$ เป็น

$$\mathcal{C} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial (y^{(m)})^2}$$

สำหรับ cash flows ที่เกิดทิ้งงวดคูปอง $k = 1, \dots, N$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{m^2 P} \sum_{k=1}^N \frac{k(k+1)CF_k}{(1 + y^{(m)}/m)^{k+2}}$$

เมื่อใช้ Taylor approximation อันดับสอง

Duration–Convexity Approximation

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y + \frac{1}{2} \mathcal{C} (\Delta y)^2$$

สำหรับ plain-vanilla option-free bond ที่ cash flows คงที่ convexity เป็นบวก จึงทำให้ราคาลดน้อยกว่าที่เส้น duration tangent คาดเมื่อ yield เพิ่มขึ้น และราคาเพิ่มมากกว่าที่ linear approximation คาดเมื่อ yield ลดในระดับขนาดใกล้เคียงกัน

5.14 DV01 หรือ BPV

DV01 วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาโดยประมาณเมื่อ yield เปลี่ยนหนึ่ง basis point

$$1 \text{ bp} = 0.0001$$

จาก duration approximation

บทนิยาม 5.8

$$DV01 \approx PD_{\text{mod}}(0.0001)$$

โดยทั่วไป DV01 รายงานเป็นจำนวนเงินบวกแทนขนาดการเปลี่ยนแปลง หาก yield เพิ่ม 1 bp ราคาจะลดประมาณ DV01 และหาก yield ลด 1 bp ราคาจะเพิ่มประมาณ DV01 ภายใต้ first-order approximation

ตัวอย่าง 5.5. ถ้าราคาเท่ากับ 10 ล้านบาทและ modified duration เท่ากับ 4.5

$$DV01 \approx 10,000,000(4.5)(0.0001) = 4,500 \text{ บาท}$$

5.15 Key-Rate Duration และการเปลี่ยนรูปของ Yield Curve

single duration สมมติโดยนัยว่าการเปลี่ยน yield ที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปด้วย parallel shift หนึ่งค่า แต่ yield curve จริงอาจ steepen, flatten, twist หรือเปลี่ยนเฉพาะบาง tenor

ให้ z_j เป็น yield/spot rate ที่ key maturity j และ Δz_j เป็น bump ขนาดเล็ก

บทนิยาม 5.9

Key-rate duration ที่ tenor j สามารถประมาณด้วย central difference

$$KRD_j \approx -\frac{P(z_j + \Delta z_j) - P(z_j - \Delta z_j)}{2P_0 \Delta z_j}$$

เมื่อ bump rate อื่นตาม interpolation rule ที่กำหนดคงเดิม

จากนั้นการเปลี่ยนแปลงราคาอันดับหนึ่งจาก nonparallel curve shock ประมาณได้ด้วย

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\sum_j KRD_j \Delta z_j$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Key-rate duration ขึ้นกับวิธี bump และ interpolation ของ yield curve จึงไม่ใช่ตัวเลขที่เป็นอิสระจาก curve construction methodology

5.16 Immunization

หลัก immunization ใช้โครงสร้างของ present value และ duration เพื่อลดความไวของ surplus ระหว่างสินทรัพย์และภาระผูกพันต่อการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย [62, 18]

ให้ A เป็น present value ของสินทรัพย์และ L เป็น present value ของหนี้สิน
เงื่อนไข first-order แบบพื้นฐานคือ

$$A = L$$

และ

$$D_A = D_L$$

ทฤษฎีบท 5.4

ภายใต้ small parallel yield shift Δy หาก

$$A = L$$

และ

$$D_A = D_L$$

แล้ว first-order change ของ surplus

$$S = A - L$$

มีค่าเป็นศูนย์โดยประมาณ

พิสูจน์. ใช้ duration approximation

$$\Delta A \approx -AD_A \Delta y$$

และ

$$\Delta L \approx -LD_L \Delta y$$

ดังนั้น

$$\Delta S = \Delta A - \Delta L$$

จึงได้

$$\Delta S \approx -(AD_A - LD_L) \Delta y$$

เมื่อ $A = L$ และ $D_A = D_L$

$$AD_A = LD_L$$

จึงมี

$$\Delta S \approx 0$$

□

5.16.1 สองสินทรัพย์สำหรับภาระผูกพันหนึ่งก้อน

ให้สินทรัพย์ 1 และ 2 มี durations D_1 และ D_2 โดยต้องการ duration เป้าหมาย D_L

กำหนดน้ำหนัก

$$w_1 + w_2 = 1$$

และ

$$w_1 D_1 + w_2 D_2 = D_L$$

จะได้

$$w_1 = \frac{D_2 - D_L}{D_2 - D_1}$$

และ

$$w_2 = \frac{D_L - D_1}{D_2 - D_1}$$

ถ้าต้องการ long-only solution จะต้องให้ D_L อยู่ระหว่าง D_1 และ D_2

5.16.2 Convexity Condition

เมื่อสินทรัพย์และหนี้สินมี value และ duration match กัน เงื่อนไขเสริมที่มักต้องการคือ

$$C_A \geq C_L$$

เพื่อให้ asset value มี second-order response ที่ไม่ด้อยกว่าหนี้สินภายใต้ small parallel shifts

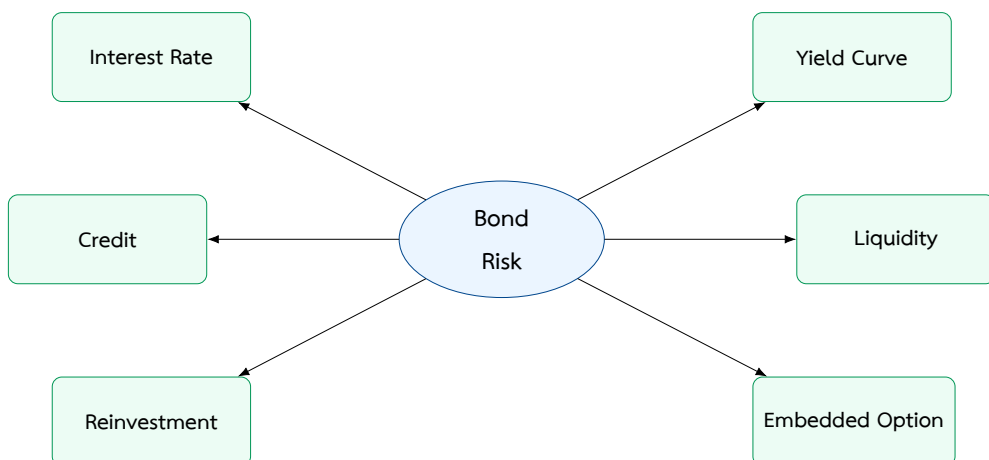
ประเด็นที่ต้องระวัง

Immunization ไม่ใช่การกำจัดความเสี่ยงอย่างถาวร Duration เปลี่ยนตามเวลา yield curve และ cash flows จึงต้อง rebalance และยังต้องบริหาร curve risk, credit spread risk, liquidity risk และ optionality แยกต่างหาก

5.17 ความเสี่ยงของตราสารหนี้ที่ Duration ไม่ครอบคลุม

ตารางที่ 5.2: มิติความเสี่ยงสำคัญของตราสารหนี้

ความเสี่ยง	กลไก	มาตรวัด/แนวทางที่เกี่ยวข้อง
Interest-rate risk	risk-free/benchmark curve เปลี่ยน	duration, convexity, KRD, DV01
Curve risk	tenor ต่างกันเคลื่อนไหวไม่เท่ากัน	KRD, scenario shocks
Credit-spread risk	spread ของผู้ออกเพิ่ม/ลด	spread duration, CS01, credit analysis
Default risk	ผู้ออกไม่จ่ายตามสัญญา	PD, LGD, recovery, rating transition
Liquidity risk	ซื้อขายยากหรือ spread กว้าง	bid-ask, market depth, liquidity premium
Reinvestment risk	coupon ถูกลงทุนต่อที่อัตราใหม่	horizon return / immunization
Embedded-option risk	call/put/prepayment เปลี่ยน cash flows	effective duration, OAS, scenario models
Inflation risk	purchasing power ลด	real yield, inflation-linked instruments



รูปที่ 5.4: ตราสารหนี้มีความเสี่ยงหลายมิติซึ่งต้องใช้มาตรวัดมากกว่าหนึ่งประเภท

5.18 สะพานสู่งานวิจัย: Zero-Coupon Curve และ Stochastic Rates

งานของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาการกำหนดราคาตราสารหนี้และการแปลงมูลค่าตราสารเป็นเงินสดตามเวลา โดยเปรียบเทียบแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย Vasicek, CIR และ Hull-White ในข้อมูลตลาดตราสารหนี้ไทย [70]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: จาก Discount Curve สู่ Stochastic Interest Rates

คณิตศาสตร์ในบทนี้เชื่อมกับงานดังกล่าวผ่านความสัมพันธ์

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) \, ds \right)$$

เมื่อ forward curve $f(t, s)$ กลายเป็นตัวแปรสุ่ม ราคา zero-coupon bond จึงเป็นฟังก์ชันของเส้นอัตราดอกเบี้ยที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

แบบจำลอง Vasicek, CIR และ Hull-White เพิ่มโครงสร้างพลวัตให้ short rate หรือ term structure แต่หลัก present-value/no-arbitrage ที่ใช้ในบทนี้ยังคงเป็นรากฐานของการกำหนดราคา

ผลการศึกษาเชิงประจักษ์ของแบบจำลองหนึ่งใน sample period ไม่ควรถูกตีความว่าแบบจำลองนั้นดีที่สุดในทุกตลาดหรือทุกช่วงเวลา การเลือก interest-rate model ต้องพิจารณาวัตถุประสงค์ calibration target, instrument set และ out-of-sample validation

5.19 Data Lineage และ Pricing Convention

การคำนวณตราสารหนี้ไวต่อ convention มากกว่าการดูสูตรเพียงอย่างเดียว

ตารางที่ 5.3: Checklist สำหรับข้อมูลและ convention ของตราสารหนี้

รายการ	ต้องระบุ	ความผิดพลาดที่พบบ่อย
Settlement	trade date, settlement date	ใช้ maturity fraction ผิด
Coupon	rate, frequency, coupon dates	ใช้ annual rate เป็น periodic coupon
Yield	nominal/effective/continuous	หาร effective yield ด้วย frequency โดยตรง
Day count	ACT/365, ACT/360, 30/360 หรือ convention อื่น	accrued interest ผิด
Price	clean/dirty	เทียบ market clean price กับ model dirty price
Redemption	par หรือ redemption premium	สมมติ $M = F$ โดยไม่ตรวจ
Curve	source, interpolation, compounding	bootstrap/integration basis ไม่ตรงกัน
Credit	risk-free, government, corporate spread	ใช้ government curve กับ risky cash flow โดยไม่ปรับ
Option	callable/puttable/prepayable	ใช้ fixed cash-flow duration กับ option bond

5.20 Investment Lab: Fixed-Income Analytics

Investment Lab: Excel: Bond Pricing, Yield และ Interest-Rate Risk

สร้าง workbook อย่างน้อย 5 ซีต

1. **Inputs** ระบุ settlement, maturity, face, redemption, coupon rate, frequency, YTM และ day-count assumption
2. **CashFlows** แสดงวันที่/งวด coupon principal total cash flow discount factor และ present value
3. **Price-Yield** สร้าง yield grid รอบ base yield อย่างน้อย ± 200 bp และคำนวณ exact price

4. **Risk** คำนวณ Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01 และ approximation error
5. **Curve** bootstrap discount factors/spot rates จากตราสารตัวอย่าง แล้วคำนวณ forward rates

สร้างกราฟ price–yield curve และเปรียบเทียบ exact repricing กับ duration และ duration–convexity approximation สำหรับ shocks ± 25 , ± 50 , ± 100 และ ± 200 bp

Investment Lab: Python: Fixed-Income Companion

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `bond_price(...)`
- `ytm_bisection(...)`
- `macaulay_duration(...)`
- `modified_duration(...)`
- `convexity(...)`
- `dv01(...)`
- `clean_dirty_price(...)`
- `bootstrap_discount_factors(...)`
- `forward_rate(...)`
- `two_asset_immunization(...)`

ควรมี unit tests อย่างน้อยสำหรับกรณี par bond, zero-coupon bond, premium bond, discount bond, duration ของ zero-coupon และ round-trip test ที่นำราคาจากฟังก์ชัน pricing กลับไปหา YTM แล้วได้ yield เดิมภายใน tolerance

5.21 การเลือกมาตรวัดให้เหมาะกับปัญหา

ตารางที่ 5.4: แผนทีการเลือกเครื่องมือวิเคราะห์ตราสารหนี้

คำถาม	เครื่องมือหลัก	ข้อควรระวัง
ราคา จาก contractual cash flows เท่าใด	PV / discount factors	convention ต้องตรง cash flows
อัตราเดียวที่ทำให้ราคาเท่ากันคือเท่าใด	YTM	ไม่ใช่ realized return ที่รับประกัน
อัตราเฉพาะ maturity เป็นเท่าใด	Spot rate	ต้องสร้าง curve อย่างสอดคล้อง
อัตรา implied ระหว่างสอง maturity คือเท่าใด	Forward rate	ขึ้นกับ compounding convention
ราคาไวต่อ parallel yield shift เพียงใด	Modified duration / DV01	เป็น first-order/local measure
ความโค้งของราคาเป็นอย่างไร	Convexity	cash flows ต้อง ไม่ เปลี่ยน จาก option exercise
curve เปลี่ยนเฉพาะ tenor ใดมีผลอย่างไร	Key-rate duration	ขึ้น กับ bump/ interpolation method
จับคู่สินทรัพย์กับหนี้สินอย่างไร	PV + duration matching	ต้อง rebalance และดู convexity/ curve risk
credit spread เปลี่ยนมีผลอย่างไร	Spread duration / CS01	แยกจาก risk-free rate movement

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์ตราสารหนี้จากหลักมูลค่าปัจจุบัน โดยมองตราสารเป็นชุด contractual cash flows ที่ต้องคิดลดด้วยอัตราหรือ discount factors ที่สอดคล้องกับเวลา

ในกรอบ YTM ราคาของ plain-vanilla bond เป็นฟังก์ชันลดลงและนูนของ yield ความสัมพันธ์ premium-par-discount เกิดจากการเปรียบเทียบ coupon rate กับ required yield บนฐานเวลาเดียวกัน ขณะที่ YTM เป็น IRR ของ contractual cash flows และไม่ควรถูกตีความเป็นผลตอบแทนจริงที่รับประกัน

การกำหนดราคาทีละเยียดขึ้นใช้ spot rates และ discount factors ตาม maturity แล้วสร้าง term structure ด้วย bootstrap จากนั้น forward rates เกิดจาก no-arbitrage identities

มูลค่าตามบัญชีอธิบายการตัดจ่าย premium หรือสะสม discount ตาม effective yield ส่วนการซื้อขายระหว่าง coupon dates ต้องแยก dirty price, accrued interest และ clean price ตาม market convention

ความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ยวัดด้วย Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01 และ key-rate duration โดย duration เป็น first-order sensitivity และ convexity เป็น second-order correction Immunization ใช้ present-value matching กับ duration matching แต่ต้อง rebalance และยังคงเผชิญ curve, credit, liquidity และ option risk

สุดท้าย การวิเคราะห์ตราสารหนี้ที่ตรวจสอบได้ต้องบันทึก settlement, day count, compounding, coupon schedule, clean/dirty convention, curve construction และ model assumptions ก่อนนำตัวเลขไปใช้ในการบริหารพอร์ต

คำศัพท์สำคัญ

- Face value
- Redemption value
- Coupon rate
- Yield to Maturity
- Discount factor
- Spot rate
- Forward rate
- Yield curve
- Premium bond
- Par bond
- Discount bond
- Book value
- Accrued interest
- Dirty price
- Clean price
- Macaulay duration
- Modified duration
- Convexity
- DV01 / BPV
- Key-rate duration
- Spread duration
- CS01
- Immunization
- Reinvestment risk
- Embedded-option risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ตราสารไม่มีคูปองมีมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อายุ 4 ปี และ effective annual yield 6% จงหาราคา
2. พันธบัตรมูลค่าที่ตราไว้ 100,000 บาท คูปอง 8% จ่ายปีละครั้ง อายุ 6 ปี และ YTM 7% จงหาราคา
3. พิสูจน์ base-amount formula

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

4. พิสูจน์ Makeham form จากสูตร coupon-bond pricing
5. อธิบายว่าทำไม coupon rate 8% กับ YTM 8% อาจไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าราคาเท่าพาร์ หาก compounding conventions ไม่ตรงกัน
6. แสดงว่า price function ของ bond ที่มี cash flows เป็นบวกเป็นฟังก์ชันลดลงของ yield
7. สร้าง bisection algorithm เพื่อหา YTM และทดสอบ round trip จากราคาที่สร้างด้วย yield 5.5%
8. ใช้ zero-coupon 1 ปีและ coupon bond 2 ปีที่กำหนดเพื่อ bootstrap d_1, d_2 และ spot rates
9. พิสูจน์ forward-rate identity จาก no-arbitrage
10. สร้าง amortization schedule ของ premium bond และตรวจว่า book value เข้าใกล้ redemption value
11. ตราสารจ่ายคูปอง 4 บาทต่อครึ่งปี settlement ผ่านไป 35% ของ coupon period และ dirty price 103.20 บาท จงหา accrued interest แบบ simple fraction และ clean price
12. คำนวณ Macaulay duration ของ zero-coupon 7 ปี
13. ตราสารมี modified duration 5.2 และราคา 98.50 บาท หาก yield เพิ่ม 75 bp จงประมาณราคาใหม่ด้วย duration
14. เพิ่ม convexity 42 ให้ข้อก่อนและคำนวณ duration-convexity approximation
15. พอร์ตตราสารหนี้มีมูลค่า 25 ล้านบาทและ modified duration 6.4 จงประมาณ DV01
16. อธิบายว่าทำไม parallel duration อาจล้มเหลวเมื่อ yield curve steepen
17. สร้าง key-rate shocks ที่ 2Y, 5Y และ 10Y แล้วอธิบายวิธีประมาณผลกระทบต่อพอร์ต
18. ภาระผูกพันมี duration 6 ปี เลือกจาก bond duration 3 ปีและ 9 ปี จงหาน้ำหนัก long-only ที่ match duration
19. พิสูจน์ว่า PV matching กับ duration matching ทำให้ first-order change ของ surplus เป็นศูนย์ภายใต้ small parallel shift
20. อธิบายว่าทำไม callable bond ต้องใช้ effective duration มากกว่า modified duration แบบ fixed

cash flows

คำถามชวนคิด

1. เหตุใด bond ที่ซื้อขายต่ำกว่าพาร์จึงไม่จำเป็นต้องให้ผลตอบแทนที่น่าสนใจกว่า bond ที่ซื้อขายสูงกว่าพาร์
2. YTM มีข้อจำกัดอะไรบ้างเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับตราสารที่มี embedded options
3. หาก yield curve ไม่ขยับแบบขนาน duration matching เพียงอย่างเดียวเพียงพอหรือไม่
4. Positive convexity มีคุณค่าต่อผู้ถือ bond อย่างไร และเหตุใด bond ที่มี call option อาจมี negative convexity ในบางช่วง
5. ในการบริหารพอร์ตตราสารหนี้ขนาดใหญ่ ควรให้ความสำคัญกับ curve construction หรือ security selection มากกว่ากัน หรือทั้งสองส่วนเชื่อมโยงกันอย่างไร

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 5

- [18] Frank J. Fabozzi. *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8th ed. Pearson, 2012.
- [62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.
- [70] Wichai Witayakiattilerd, Kammanai Phothong, Kanticha Sudtinont, and Panisara Bundasak. “Instant Exchange Analytics: A Compelling Mathematical Model for Real-Time Debt Instrument and Cash Conversion Rates”. In: *Thailand Statistician* 22.2 (2024), pp. 390–406.

Part III

ทฤษฎีพอร์ตและการกำหนดราคาสินทรัพย์

