

บทที่ 6 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. นิยามพอร์ตการลงทุนและน้ำหนักพอร์ตอย่างถูกต้อง รวมทั้งแยก long-only, short position และ fully-invested portfolio ได้
2. พิสูจน์ผลตอบแทนพอร์ตจาก simple returns และอธิบายเหตุผลที่ log returns ไม่สามารถนำมาถ่วงน้ำหนักในลักษณะเดียวกันได้โดยทั่วไป
3. คำนวณ ผลตอบแทน คาดหมาย ความแปรปรวน และส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน ของ พอร์ต สองสินทรัพย์ สามสินทรัพย์ และพอร์ต n สินทรัพย์
4. ใช้ covariance และ correlation อธิบายกลไกของ diversification และวิเคราะห์กรณี $\rho = 1, 0, -1$ ได้
5. เขียนสมการพอร์ตในรูปเวกเตอร์-เมทริกซ์

$$R_p = \mathbf{w}^T \mathbf{R}, \quad \mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

6. พิสูจน์ว่า covariance matrix เป็น symmetric positive semidefinite และอธิบายความสำคัญต่อการวิเคราะห์พอร์ตได้
7. วิเคราะห์ diversification limit ใน equal-weight/common-correlation model และอธิบายความแตกต่างระหว่าง naive diversification กับ covariance-aware diversification
8. คำนวณ marginal contribution to risk และ component contribution to risk เพื่ออธิบายแหล่งกำเนิดความเสี่ยงของพอร์ต
9. ประเมิน ค่า mean vector และ covariance matrix จาก ข้อมูล จริง พร้อม ตรวจสอบ data alignment, corporate actions, missing observations และ estimation risk
10. อธิบาย covariance shrinkage, correlation stress testing และเหตุผลที่ sample covariance ไม่ควรถูกมองเป็นค่าคงที่ที่ทราบแน่นอน
11. วิเคราะห์ international diversification โดยรวมผลตอบแทนสินทรัพย์ต่างประเทศกับความเสี่ยงอัตราแลกเปลี่ยนอย่างถูกต้อง

12. เตรียม risk inputs ที่มีคุณภาพสำหรับ Markowitz theory และ portfolio optimization ในบทถัดไป

6.1 บทนำ: จากสินทรัพย์รายตัวสู่ระบบของพอร์ต

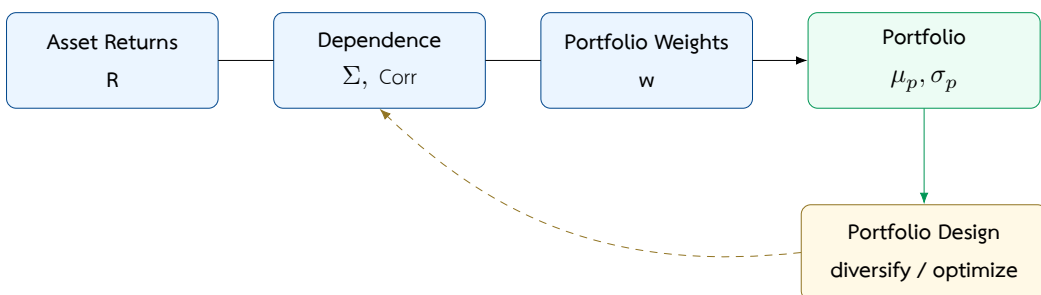
บทที่ 3 พัฒนามาตรวัดความเสี่ยงของผลตอบแทนและความสัมพันธ์ระหว่างสินทรัพย์ บทนี้เปลี่ยนหน่วยวิเคราะห์จากสินทรัพย์รายตัวไปเป็นพอร์ต ซึ่งทำให้คำถามสำคัญไม่ใช่เพียงว่าแต่ละสินทรัพย์มีความผันผวนเท่าใด แต่รวมถึงว่าสินทรัพย์เหล่านั้นเคลื่อนไหวรวมกันอย่างไร

หัวใจของการบริหารพอร์ตจึงอยู่ที่สามองค์ประกอบ

$$\text{Portfolio Risk} = \text{Weights} + \text{Individual Risks} + \text{Dependence Structure}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง ความเสี่ยงของพอร์ตไม่ได้เกิดจากค่าเฉลี่ยของความเสี่ยงรายตัว แต่เกิดจาก quadratic aggregation ผ่าน covariance matrix [33]

ประเด็นนี้เป็นความแตกต่างเชิงแนวคิดที่สำคัญมาก ตัวอย่างเช่น สินทรัพย์สองชนิดอาจมี volatility เท่ากันทุกประการ แต่ให้ความเสี่ยงของพอร์ตต่างกันอย่างมากหาก correlation ต่างกัน ดังนั้นการวิเคราะห์พอร์ตจึงต้องตอบพร้อมกันว่า “ถืออะไร” “ถือเท่าใด” และ “สินทรัพย์ที่ถือเคลื่อนไหวรวมกันอย่างไร” ไม่ใช่ดู volatility รายตัวแยกจากกัน



รูปที่ 6.1: โครงสร้างจากผลตอบแทนรายสินทรัพย์สู่ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต

ข้อสังเกต

Diversification ไม่ได้หมายถึงการถือสินทรัพย์ให้มากที่สุด แต่หมายถึงการออกแบบการรวมสินทรัพย์ โดยคำนึงถึงโครงสร้างการเคลื่อนไหวร่วมกัน หากสินทรัพย์จำนวนมากมี correlation สูงในเวลาเดียวกัน ประโยชน์จากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์อาจมีจำกัด

6.2 พอร์ตการลงทุนและน้ำหนักพอร์ต

ให้พอร์ตมีสินทรัพย์ n รายการ ณ ต้นช่วงเวลา t โดย $V_{i,t}$ เป็นมูลค่าที่ลงทุนในสินทรัพย์ i และ

$$V_{p,t} = \sum_{i=1}^n V_{i,t}$$

เป็นมูลค่ารวมของพอร์ต กำหนดน้ำหนักต้นทุนเป็น

$$w_{i,t} = \frac{V_{i,t}}{V_{p,t}}$$

ถ้าพอร์ต fully invested

$$\sum_{i=1}^n w_{i,t} = 1$$

หรือในรูปเวกเตอร์

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$$

บทนิยาม 6.1

ถ้า

$$w_i \geq 0 \quad \text{ทุก } i$$

พอร์ตเป็น long-only portfolio

ถ้าอนุญาต

$$w_i < 0$$

น้ำหนักติดลบแทน short position ภายใต้ข้อสมมติว่ากลยุทธ์สามารถขายชอร์ตได้

Gross exposure และ net exposure สามารถนิยามเป็น

$$G = \sum_{i=1}^n |w_i|$$

และ

$$N = \sum_{i=1}^n w_i$$

ตามลำดับ

สำหรับ fully-invested long-only portfolio จะมี $G = N = 1$ แต่พอร์ต long-short อาจมี $G > 1$ แม้ $N = 1$ หรือ $N = 0$

ในการใช้งานจริง ควรแยกคำว่า “fully invested” ออกจาก “unlevered” ให้ชัดเจน เงื่อนไข $N = 1$ เป็นเงื่อนไขทางบัญชีของน้ำหนักสุทธิ แต่ไม่ได้ควบคุมขนาด position รวม หากต้องการควบคุม leverage ต้องกำหนดข้อจำกัดของ gross exposure เพิ่ม เช่น $G \leq G_{\max}$ ส่วนกรณีที่ $\sum_i w_i < 1$ ส่วนที่เหลืออาจถูกตีความว่าเป็นเงินสดหรือสินทรัพย์ปลอดความเสี่ยง ซึ่งต้องระบุไว้ในแบบจำลองอย่างชัดเจน

ประเด็นที่ต้องระวัง

เงื่อนไข $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$ ไม่ได้แปลว่าไม่มี leverage หากมี short positions ตัวอย่างเช่น $\mathbf{w} = (1.5, -0.5)^T$ มี net exposure เท่ากับ 1 แต่ gross exposure เท่ากับ 2

6.3 ผลตอบแทนพอร์ตในหนึ่งช่วงเวลา

ให้ $R_{i,t+1}$ เป็น simple total return ของสินทรัพย์ i จาก t ถึง $t + 1$ หากไม่มี external cash flow ระหว่างช่วง

$$V_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n V_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$$

หารด้วย $V_{p,t}$

$$1 + R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n w_{i,t} (1 + R_{i,t+1})$$

$$\text{เมื่อ } \sum_i w_{i,t} = 1$$

Portfolio Simple Return

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n w_{i,t} R_{i,t+1} = \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$$

ทฤษฎีบท 6.1

ผลตอบแทน simple return ของพอร์ตในหนึ่งช่วงเวลาเป็นผลรวมเชิงเส้นของ simple returns รายสินทรัพย์เมื่อใช้น้ำหนักต้นทุน

สูตรนี้เป็นสูตรแบบ exact สำหรับ one-period buy-and-hold return เมื่อ R_i เป็น total return ที่สอดคล้องกับกระแสเงินสดของสินทรัพย์ หากมีการเติมหรือถอนเงินระหว่างงวด หรือมีการ rebalancing ภายในงวด ต้องแยกผลจากการลงทุนออกจาก external cash flow ก่อน มิฉะนั้นผลตอบแทนที่คำนวณได้จะปะปนกับการเปลี่ยนแปลงของเงินลงทุน

ประเด็นที่ต้องระวัง

โดยทั่วไป

$$r_{p,t} \neq \sum_i w_{i,t-1} r_{i,t}$$

เมื่อ r เป็น log return เพราะ logarithm ไม่แจกแจงผ่านผลรวมของมูลค่าสินทรัพย์ สมการเชิงเส้นของพอร์ตจึงควรสร้างจาก simple returns ก่อน

สำหรับ fully-invested portfolio ที่ไม่มี external cash flow จะมีความสัมพันธ์แบบ exact

$$r_{p,t+1} = \log \left(\sum_i w_{i,t} e^{r_{i,t+1}} \right)$$

ไม่ใช่ $\sum_i w_{i,t} r_{i,t+1}$ โดย weighted average ของ log returns อาจใช้เป็น first-order approximation ได้เมื่อผลตอบแทนมีขนาดเล็กและ dispersion ระหว่างสินทรัพย์ไม่สูงมาก แต่ไม่ควร

ใช้แทน exact portfolio return ในการตรวจผลหรือ backtest

6.4 ผลตอบแทนคาดหวังของพอร์ต

ให้

$$\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$$

และ

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

จาก linearity of expectation

$$\mathbb{E}(R_p) = \mathbb{E}(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) = \mathbf{w}^T \mu$$

ผลนี้ไม่ต้องสมมติว่าสินทรัพย์เป็นอิสระต่อกัน เพราะ expectation เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น อย่างไรก็ตาม สมการในรูปแบบนี้ดี ความ $\mathbf{w}$ เป็นน้ำหนักที่กำหนดไว้ล่วงหน้าหรือเป็นน้ำหนักที่ถือว่าคงที่ภายใต้ข้อมูลที่ใช้คำนวณ หากน้ำหนักเป็นตัวแปรสุ่มที่ขึ้นกับผลตอบแทนในงวดเดียวกัน ต้องวิเคราะห์ conditional expectation และความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกับผลตอบแทนเพิ่มเติม

จึงได้

Expected Portfolio Return

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mathbf{w}^T \mu$$

ตัวอย่าง 6.1. ให้

$$\mu_A = 8\% \quad \mu_B = 14\%$$

และ

$$w_A = 0.60 \quad w_B = 0.40$$

จะได้

$$\mu_p = 0.60(0.08) + 0.40(0.14) = 0.104 = 10.4\%$$

การคำนวณ expected return ยังไม่ต้องใช้ covariance แต่การคำนวณ portfolio risk จำเป็นต้องใช้

6.4.1 Scenario Representation

ถ้ามีสถานการณ์ $s = 1, \dots, m$ ที่มีความน่าจะเป็น p_s และเวกเตอร์ผลตอบแทน r_s

$$\sum_{s=1}^m p_s = 1$$

แล้ว

$$\mu = \sum_{s=1}^m p_s r_s$$

และ

$$\mu_p = \sum_{s=1}^m p_s w^T r_s$$

หากต้องการสร้าง risk inputs จาก scenario set เดียวกัน สามารถคำนวณ

$$\Sigma = \sum_{s=1}^m p_s (r_s - \mu)(r_s - \mu)^T$$

โดยสูตรนี้เป็น population-style scenario covariance เมื่อ p_s เป็นความน่าจะเป็นที่กำหนดให้ ไม่ใช่ตัวหาร $m - 1$ แบบ sample covariance

รูปแบบนี้มีประโยชน์เมื่อ expected returns และ dependence structure มาจาก economic scenarios แทนการประมาณจากค่าเฉลี่ยย้อนหลังเพียงอย่างเดียว และช่วยให้ผู้วิเคราะห์ตรวจได้ว่า scenario ที่ให้ผล

ตอบแทนสูงหรือต่ำเกิดพร้อมกันในสินทรัพย์ใดบ้าง

6.5 Covariance Matrix และความแปรปรวนของพอร์ต

ให้

$$\Sigma = \text{Var}(\mathbf{R}) = \mathbb{E}[(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})^T]$$

สมาชิกตำแหน่ง (i, j) คือ

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$$

และสมาชิกแนวทแยงคือ

$$\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

เมื่อ $\sigma_i, \sigma_j > 0$ covariance และ correlation เชื่อมกันด้วย

$$\Sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

จึงมองได้ว่า covariance matrix รวมทั้ง “ขนาดความผันผวน” และ “ทิศทางการเคลื่อนไหวร่วมกัน” ไว้ในวัตถุทางคณิตศาสตร์เดียวกัน

ทฤษฎีบท 6.2

สำหรับน้ำหนักพอร์ต $\mathbf{w}$

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

หรือในรูปผลรวม

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

พิสูจน์. จาก

$$R_p - \mu_p = \mathbf{w}^T (\mathbf{R} - \mu)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= \mathbb{E} [(R_p - \mu_p)^2] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{w}^T (\mathbf{R} - \mu) (\mathbf{R} - \mu)^T \mathbf{w}] \\ &= \mathbf{w}^T \mathbb{E} [(\mathbf{R} - \mu) (\mathbf{R} - \mu)^T] \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \end{aligned}$$

□

6.5.1 เหตุใด Covariance Matrix ต้องเป็น Positive Semidefinite

ทฤษฎีบท 6.3

Covariance matrix เป็น symmetric positive semidefinite กล่าวคือ

$$\Sigma^T = \Sigma$$

และสำหรับทุก $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \geq 0$$

พิสูจน์. ความสมมาตรเกิดจาก

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \text{Cov}(R_j, R_i)$$

และ

$$\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} = \text{Var}(\mathbf{a}^T \mathbf{R}) \geq 0$$

จึงได้ผลตามต้องการ

□

ผลนี้สำคัญเพราะ variance ของ portfolio ใด ๆ ต้องไม่ติดลบ นอกจากนี้ sample covariance matrix ที่คำนวณจาก return matrix ชุดเดียวกันด้วยสูตรมาตรฐานจะเป็น PSD โดยโครงสร้างอยู่แล้ว ดังนั้นหากเมทริกซ์ที่สร้างจากข้อมูลมี negative eigenvalues ขนาดมีนัยสำคัญ สาเหตุที่ควรตรวจเป็นลำดับต้น ๆ ได้แก่ pairwise deletion ที่ใช้ sample คนละช่วง การปิดเศษ correlation มากเกินไป การปรับ correlation ที่ละคู่โดยไม่รักษาความสอดคล้อง หรือความผิดพลาดในการประกอบเมทริกซ์ ส่วน eigenvalue ติดลบขนาดเล็กมากอาจเกิดจาก numerical roundoff และควรพิจารณาเทียบกับ tolerance ที่เหมาะสม

6.6 พอร์ตสองสินทรัพย์และบทบาทของ Correlation

ให้ w เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 1 และ $1 - w$ เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 2

$$\mu_p = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$$

และ

Two-Asset Portfolio Variance

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

ตัวอย่าง 6.2. กำหนด

$$\mu_A = 8\% \quad \sigma_A = 12\%$$

$$\mu_B = 14\% \quad \sigma_B = 20\%$$

$$\rho_{AB} = 0.25$$

และ

$$w_A = 0.60 \quad w_B = 0.40$$

ผลตอบแทนคาดหวังคือ

$$\mu_p = 10.4\%$$

ส่วนความแปรปรวนคือ

$$\sigma_p^2 = 0.6^2(0.12)^2 + 0.4^2(0.20)^2 + 2(0.6)(0.4)(0.25)(0.12)(0.20)$$

จึงได้

$$\sigma_p^2 = 0.014464$$

และ

$$\sigma_p \approx 12.03\%$$

ขณะที่ weighted average volatility เท่ากับ

$$0.6(12\%) + 0.4(20\%) = 15.2\%$$

ความแตกต่างระหว่าง 15.2% กับ 12.03% แสดงผลของ covariance ต่อ diversification

สำหรับ long-only two-asset portfolio ผลของ correlation เห็นได้โดยตรงจาก

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \rho_{12}} = 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 \geq 0$$

เมื่อ $0 \leq w \leq 1$ ดังนั้นถ้า weights และ volatilities คงเดิม การลด correlation จะไม่เพิ่ม portfolio variance และโดยทั่วไปจะเพิ่มประโยชน์จาก diversification นี่เป็นเหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าทำไมสินทรัพย์ที่ volatility สูงกว่าเล็กน้อยอาจยังมีประโยชน์ต่อพอร์ต หากมี correlation ต่ำหรือเป็นลบกับสินทรัพย์เดิม

6.6.1 กรณี Correlation เท่ากับ 1

เมื่อ $\rho_{12} = 1$

$$\sigma_p = |w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_2|$$

สำหรับ long-only weights

$$\sigma_p = w\sigma_1 + (1 - w)\sigma_2$$

จึงไม่มีประโยชน์จากการหักล้างความเสี่ยงเชิงเส้น

6.6.2 กรณี Correlation เท่ากับ 0

เมื่อ $\rho_{12} = 0$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2$$

แม้ covariance เป็นศูนย์ ความเสี่ยงพอร์ตยังไม่เป็นศูนย์ และ zero correlation ไม่ได้แปลว่าสินทรัพย์เป็นอิสระต่อกันโดยทั่วไป เพราะ correlation วัดเฉพาะความสัมพันธ์เชิงเส้น

6.6.3 กรณี Correlation เท่ากับ -1 และพอร์ตความแปรปรวนศูนย์

เมื่อ $\rho_{12} = -1$

$$\sigma_p^2 = [w\sigma_1 - (1 - w)\sigma_2]^2$$

ดังนั้นน้ำหนัก

$$w^{(0)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

และ

$$1 - w^{(0)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

ทำให้

$$\sigma_p = 0$$

ภายใต้แบบจำลอง

สำหรับ $\sigma_A = 12\%$ และ $\sigma_B = 20\%$

$$w_A^{(0)} = 0.625$$

และ

$$w_B^{(0)} = 0.375$$

ทำให้ expected return เท่ากับ

$$\mu_p = 0.625(0.08) + 0.375(0.14) = 10.25\%$$

ผลลัพธ์นี้ไม่ได้หมายความว่าสามารถสร้าง “สินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง” ได้จากสินทรัพย์เสี่ยงทั่วไปเสมอไป แต่เกิดจากสมมติฐานที่เข้มมากกว่า $\rho = -1$ แบบคงที่และ covariance structure ที่ใช้ยังคงเดิมตลอดช่วงลงทุน

ประเด็นที่ต้องระวัง

Perfect negative correlation ที่คงอยู่ตลอดเวลาเป็นกรณีเชิงทฤษฎีที่เข้มมาก Sample correlation ที่ใกล้ -1 ในช่วงข้อมูลหนึ่งไม่ใช่หลักประกันว่าจะคงอยู่ในอนาคต โดยเฉพาะในช่วง market stress

6.7 พอร์ตสามสินทรัพย์และพอร์ตหลายสินทรัพย์

สำหรับสามสินทรัพย์

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 \\ &\quad + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

เมื่อจำนวนสินทรัพย์เพิ่ม รูปเมทริกซ์

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

ช่วยลดความซับซ้อนของ notation และเป็นฐานของ optimization ในบทถัดไป

ตัวอย่าง 6.3. ให้

$$\mathbf{w} = (0.40, 0.35, 0.25)^T$$

$$\boldsymbol{\mu} = (0.08, 0.12, 0.10)^T$$

และ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0.0036 & -0.0014 \\ 0.0036 & 0.0324 & 0.00756 \\ -0.0014 & 0.00756 & 0.0196 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = 0.099 = 9.9\%$$

และ

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = 0.008845$$

ดังนั้น

$$\sigma_p \approx 9.405\%$$

จาก diagonal ของ Σ จะได้ $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 18\%$ และ $\sigma_3 = 14\%$ ขณะที่ correlations ที่สอดคล้องกันคือประมาณ 0.20, -0.10 และ 0.30 สำหรับคู่ $(1, 2)$, $(1, 3)$ และ $(2, 3)$ ตามลำดับ ตัวอย่างนี้จึงแสดงให้เห็นว่าคู่ที่มี covariance ติดลบช่วยลดความเสี่ยง risk aggregation บางส่วน แม้สินทรัพย์ทุกตัวจะยังมี variance เป็นบวก

6.7.1 จำนวนพารามิเตอร์ของ Covariance Matrix

covariance matrix ของสินทรัพย์ n รายการมี variance n ค่า และ covariance ที่ไม่ซ้ำกัน

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ค่า จึงมีพารามิเตอร์อิสระทั้งหมด

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

เมื่อ n ใหญ่ ปัญหาสำคัญจึงเปลี่ยนจากการคำนวณเมทริกซ์ไปเป็นการประมาณเมทริกซ์จำนวนพารามิเตอร์สูงจากข้อมูลที่จำกัด

ยิ่งไปกว่านั้น หาก sample covariance คำนวณจากข้อมูล T ช่วงหลังหักค่าเฉลี่ย rank ของเมทริกซ์จะไม่เกิน $T - 1$ ดังนั้นเมื่อ $n \geq T$ เมทริกซ์ sample covariance จะ singular อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ปัญหานี้มีผลโดยตรงต่อ portfolio optimization ที่ต้องอาศัยการแก้ระบบสมการหรือ inverse ของ covariance matrix และเป็นเหตุผลหนึ่งที่ต้องใช้ shrinkage หรือ factor structure ในพอร์ตที่มีสินทรัพย์จำนวนมาก

6.8 Diversification: กลไกทางคณิตศาสตร์

6.8.1 Naive Diversification

Naive diversification ลด concentration ด้วยการกระจายเงินไปยังสินทรัพย์จำนวนมาก วิธีนี้ง่ายและอาจลด idiosyncratic exposure แต่ไม่ได้ใช้ covariance structure โดยตรง

ค่า

$$\sum_{i=1}^n w_i \sigma_i$$

ไม่ใช่ portfolio volatility โดยทั่วไป เพราะไม่มี cross-covariance terms

6.8.2 Covariance-Aware Diversification

แนวคิด mean-variance ของ Markowitz ใช้ expected returns, variances และ covariances พร้อมกัน [33] ดังนั้นพอร์ตที่มีสินทรัพย์จำนวนน้อยกว่าอาจมี diversification ที่ดีกว่าพอร์ตขนาดใหญ่ หากสินทรัพย์ในพอร์ตแรกมี dependence structure ที่เหมาะสมกว่า

6.8.3 Equal-Weight/Common-Correlation Model

สมมติสินทรัพย์ n รายการมี volatility เท่ากัน σ correlation ระหว่างคู่ทุกคู่เท่ากัน ρ และ

$$w_i = \frac{1}{n}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \frac{1}{n^2} [n\sigma^2 + n(n-1)\rho\sigma^2] \\ &= \sigma^2 \left[\rho + \frac{1-\rho}{n} \right]\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6.4

ภายใต้ equal-weight/common-correlation model

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left(\rho + \frac{1-\rho}{n} \right)$$

ถ้า $\rho \geq 0$ คงที่

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \rho \sigma^2$$

ส่วน

$$\frac{1 - \rho}{n} \sigma^2$$

ลดลงเมื่อ n เพิ่มขึ้น ขณะที่

$$\rho \sigma^2$$

ไม่หายไปจากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์เพียงอย่างเดียว ในแบบจำลองนี้จึงตีความได้ว่าพจน์ที่ลดลงตาม $1/n$ เป็นส่วนที่ diversification สามารถลดได้จากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์ ขณะที่พจน์ที่เกิดจาก common co-movement ยังคงอยู่ แม้การตีความนี้ไม่ควรถูกขยายไปแทน systematic risk ของ factor model โดยอัตโนมัติ

ประเด็นที่ต้องระวัง

สำหรับ equicorrelation matrix ขนาด n เงื่อนไขที่เมทริกซ์เป็น PSD คือ

$$-\frac{1}{n-1} \leq \rho \leq 1$$

ดังนั้นไม่สามารถกำหนด common correlation ติดลบค่าคงที่ เช่น $\rho = -0.20$ แล้วปล่อยให้ $n \rightarrow \infty$ โดยยังถือว่า covariance matrix ถูกต้องสำหรับทุก n

6.9 Marginal Risk และ Risk Contribution

การรู้เพียง σ_p บอกขนาดความเสี่ยงรวม แต่ยังไม่บอกว่าสินทรัพย์ใดสร้างความเสี่ยงให้พอร์ตเท่าใด

จาก

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$$

อนุพันธ์ต่อ w_i คือ

Marginal Contribution to Risk

$$MRC_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p}$$

กำหนด component contribution to risk เป็น

$$RC_i = w_i MRC_i = \frac{w_i (\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p}$$

โดย Euler decomposition ให้

ทฤษฎีบท 6.5

ถ้า $\sigma_p > 0$

$$\sum_{i=1}^n RC_i = \sigma_p$$

พิสูจน์.

$$\sum_i RC_i = \frac{\sum_i w_i (\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}{\sigma_p} = \sigma_p$$

□

Percentage risk contribution คือ

$$PRC_i = \frac{RC_i}{\sigma_p}$$

และ

$$\sum_i PRC_i = 1$$

ข้อสังเกต

น้ำหนักเงินลงทุนและน้ำหนักความเสี่ยงเป็นคุณลักษณะ สินทรัพย์ที่มี capital weight ต่ำอาจสร้าง risk contribution สูง หาก volatility สูงหรือ covariance กับส่วนอื่นของพอร์ตสูง นอกจากนี้ MRC_i , RC_i หรือ PRC_i สามารถติดลบได้ หากสินทรัพย์ i มีบทบาทเป็น hedge และช่วยลด volatility ของพอร์ต ค่า risk contribution ติดลบจึงไม่ใช่ความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แต่ต้องตีความร่วมกับเครื่องหมายของน้ำหนักและ covariance structure ส่วน MRC_i เป็นผลกระทบเฉพาะที่จากการเปลี่ยน w_i เล็กน้อยโดยยังไม่ได้บังคับ budget constraint ให้ weights อื่นเปลี่ยนแปลงตาม

6.10 International Diversification และ Currency Risk

สำหรับผู้ลงทุนไทยที่ถือสินทรัพย์ต่างประเทศ ให้ $R_{\text{asset,FX}}$ เป็นผลตอบแทนสินทรัพย์ในสกุลเงินต่างประเทศ และให้ R_{FX} เป็นผลตอบแทนของสกุลเงินต่างประเทศเทียบกับบาท โดยนิยามให้ค่าเพิ่มหมายถึงเงินต่างประเทศแข็งค่าต่อบาท

ผลตอบแทนสกุลบาทแบบ exact คือ

Foreign Asset Return in Domestic Currency

$$1 + R_{\text{THB}} = (1 + R_{\text{asset,FX}})(1 + R_{\text{FX}})$$

ดังนั้น

$$R_{\text{THB}} = R_{\text{asset,FX}} + R_{\text{FX}} + R_{\text{asset,FX}} R_{\text{FX}}$$

สำหรับผลตอบแทนขนาดเล็ก

$$R_{\text{THB}} \approx R_{\text{asset,FX}} + R_{\text{FX}}$$

ถ้าใช้ log returns และนิยามอัตราแลกเปลี่ยนในทิศทางเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์แบบ exact

$$r_{\text{THB}} = r_{\text{asset,FX}} + r_{\text{FX}}$$

ซึ่งเป็นกรณีที่ log return มีข้อได้เปรียบด้านการบวกข้ามองค์ประกอบแบบคูณ แม้จะไม่สามารถถ่วงน้ำหนักข้าม

สินทรัพย์ในพอร์ตแบบเดียวกับ simple return ได้

จึงเห็นว่า international diversification อาจลด dependence ระหว่างตลาดทุน แต่เพิ่ม currency exposure เข้ามาในพอร์ต การ hedge ค่าเงินจึงเปลี่ยน covariance structure ของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนไทยได้รับจริง

ประเด็นที่ต้องระวัง

ต้องกำหนดทิศทางของอัตราแลกเปลี่ยนให้ชัด หากนิยาม FX quote ในทิศกลับกัน เครื่องหมายของ R_{FX} จะเปลี่ยน การใช้สูตรโดยไม่กำหนด quote convention อาจทำให้ตีความผลตอบแทนผิดพลาด

6.11 การประมาณ Mean Vector และ Covariance Matrix จากข้อมูลจริง

ให้มีผลตอบแทนที่จัดแนววันตรงกัน T ช่วงเวลา สำหรับ n สินทรัพย์

$$R_t = (R_{1t}, \dots, R_{nt})^T \quad t = 1, \dots, T$$

sample mean vector คือ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$$

และ sample covariance matrix คือ

Sample Covariance Matrix

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})^T$$

ทั้ง $\hat{\mu}$ และ $\hat{\Sigma}$ ขึ้นกับ sampling frequency และ estimation window อย่างมีนัยสำคัญ การใช้ข้อมูลรายวัน ให้จำนวนสังเกตมากขึ้นแต่ไวต่อ microstructure และ asynchronous trading มากขึ้น ขณะที่ข้อมูลรายเดือน ลด noise บางส่วนแต่มีจำนวนสังเกตน้อยลง จึงไม่มีความถี่เดียวที่เหมาะสมกับทุกวัตถุประสงค์

การ annualize volatility ด้วย $\sqrt{K}$ และ covariance ด้วย K เป็นกฎที่อาศัยสมมติฐานว่าผลตอบแทนข้ามช่วงไม่มี serial covariance ที่มีนัยสำคัญ หากมี autocorrelation หรือ overlapping returns การ scaling

แบบง่ายอาจคลาดเคลื่อนและควรใช้ long-horizon variance ที่รวม autocovariance terms

6.11.1 Data Alignment

ก่อนประมาณ covariance ต้องตรวจสอบอย่างน้อย

1. ใช้วันที่สังเกตเดียวกันทุกสินทรัพย์
2. ใช้ adjusted prices หรือ total-return data ที่สะท้อน corporate actions ตามวัตถุประสงค์
3. ไม่ forward-fill ราคาข้ามวันที่ไม่มีการซื้อขายโดยไม่พิจารณาผลต่อ volatility และ correlation
4. ใช้ return frequency เดียวกัน
5. ตรวจสอบ missing values และ asynchronous trading
6. ตรวจสอบ outliers ว่าเป็นเหตุการณ์ตลาดจริงหรือ data error

ประเด็นที่ต้องระวัง

Pairwise deletion อาจทำให้ covariance แต่ละคู่ถูกประมาณจากคนละ sample period และเมทริกซ์ที่ประกอบขึ้นอาจไม่เป็น PSD แม้ covariance matrix ทางทฤษฎีต้องเป็น PSD

6.12 Estimation Risk และ Covariance Shrinkage

Sample covariance เป็น estimator ไม่ใช่ค่าความจริงที่ทราบแน่นอน เมื่อ n มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับ T estimation noise สามารถทำให้ portfolio optimization ไวต่อข้อมูลอย่างมาก แม้เมทริกซ์จะเป็น PSD ทางคณิตศาสตร์ แต่ก็อาจมี eigenvalues เล็กมากและ condition number สูง ทำให้ผลลัพธ์จาก optimizer เปลี่ยนรุนแรงจากการเปลี่ยนข้อมูลเพียงเล็กน้อย

แนวคิด shrinkage สร้าง estimator

Linear Covariance Shrinkage

$$\hat{\Sigma}_\lambda = (1 - \lambda)\hat{\Sigma} + \lambda F \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

โดย F เป็น structured target เช่น diagonal covariance หรือ constant-correlation target [30] ส่วน λ ควบคุม trade-off ระหว่างข้อมูลใน sample กับโครงสร้างที่เสถียรมากกว่า ในการประยุกต์ไม่ควรเลือก λ เพียงเพื่อให้ผลลัพธ์ดูเรียบ แต่ควรใช้เกณฑ์เชิงสถิติหรือวิธีประมาณที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของ risk estimation

ทฤษฎีบท 6.6

ถ้า $\hat{\Sigma}$ และ F เป็น PSD และ $0 \leq \lambda \leq 1$ แล้ว $\hat{\Sigma}_\lambda$ เป็น PSD

พิสูจน์. สำหรับทุก a

$$a^T \hat{\Sigma}_\lambda a = (1 - \lambda) a^T \hat{\Sigma} a + \lambda a^T F a$$

ทั้งสองพจน์ไม่ติดลบ จึงได้

$$a^T \hat{\Sigma}_\lambda a \geq 0$$

□

ข้อสังเกต

Shrinkage ไม่ได้สร้างข้อมูลใหม่ แต่ยอมเพิ่ม bias บางส่วนเพื่อแลกกับ variance ของ estimator ที่ลดลง เป้าหมายคือความเสถียรของ risk estimate และ downstream portfolio weights

6.13 Correlation Stress Testing

Correlation ไม่คงที่ตามเวลา โดยเฉพาะในช่วงวิกฤต dependence ระหว่างสินทรัพย์เสี่ยงอาจสูงขึ้น จึงควรตรวจสอบว่าพอร์ตตอบสนองอย่างไรหาก correlation structure เปลี่ยน

วิธี stress แบบง่ายอาจกำหนด candidate correlation matrix

$$C^{\text{stress}} = (1 - \eta)C + \eta \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

โดย

$$0 \leq \eta \leq 1$$

ซึ่งต้น pairwise correlations เข้าใกล้ 1 ขณะที่ diagonal ยังคงเท่ากับ 1

สำหรับ stress construction นี้ หาก C เป็น correlation matrix ที่ถูกต้องและ $0 \leq \eta \leq 1$ แล้ว C^{stress}

จะยังเป็น PSD เพราะเป็น convex combination ของ PSD matrices C และ $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ จึงเป็นวิธี stress ที่รักษา global consistency ของ correlation matrix ได้ดีกว่าการเพิ่ม correlation ที่ละคู่แบบอิสระ

ถ้า $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$\Sigma^{\text{stress}} = DC^{\text{stress}}D$$

แล้วคำนวณ

$$\sigma_{p,\text{stress}} = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma^{\text{stress}} \mathbf{w}}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Stress matrix ต้องผ่าน validity checks เช่น symmetry, unit diagonal สำหรับ correlation matrix และ PSD ไม่ควรปรับ correlation ที่ละคู่โดยอิสระแล้วสมมติว่าเมทริกซ์ที่ได้ยังเป็น correlation matrix ที่ถูกต้อง

6.14 Diversification Ratio

มาตรวัดหนึ่งที่ช่วยแยก weighted standalone volatility ออกจาก portfolio volatility คือ diversification ratio

บทนิยาม 6.2

สำหรับ long-only portfolio

$$DR = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sigma_i}{\sigma_p}$$

จาก triangle inequality ของ standard deviation

$$\sigma_p \leq \sum_i w_i \sigma_i$$

เมื่อ $w_i \geq 0$ จึงได้

$$DR \geq 1$$

ค่า DR สูงขึ้นสะท้อนว่าการรวม covariance ทำให้ portfolio volatility ต่ำกว่า weighted standalone volatility มากขึ้น แต่ไม่ได้บอกว่า expected return สูงขึ้นหรือว่าพอร์ตเหมาะสมที่สุด หากสินทรัพย์ทุกตัวเคลื่อนไหวร่วมกันอย่างสมบูรณ์ในทิศทางเดียวกันจะได้ $DR = 1$ ส่วนค่า $DR > 1$ สะท้อน diversification benefit ภายใต้ metric นี้ ทั้งนี้นิยามดังกล่าวเหมาะสมที่สุดกับ long-only portfolio เพราะเมื่อมี short positions ตัวเลขอาจไม่สะท้อน standalone risk aggregation ในความหมายเดียวกัน

6.15 กรณีศึกษางานวิจัย: Correlation และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50

Witayakiattilerd และคณะศึกษาหลักทรัพย์ใน SET50 จำนวน 41 หลักทรัพย์ โดยใช้ข้อมูลรายวันในช่วง 4 มกราคม 2017 ถึง 30 ธันวาคม 2021 และใช้ correlation, beta แนวคิด modern portfolio theory และข้อกำหนดด้าน short selling เพื่อศึกษาการจัดพอร์ตหลักทรัพย์และกลยุทธ์การลงทุน [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: บทเรียนที่เชื่อมกับบทนี้

ผลการศึกษาดังกล่าวมีคุณค่าในฐานะตัวอย่างเชิงประจักษ์ของแนวคิด dependence structure มีผลต่อการสร้างพอร์ต แต่ผลการจัดพอร์ตหลักทรัพย์ในช่วงข้อมูลดังกล่าวเป็น historical empirical finding ไม่ใช่คำแนะนำการลงทุนปัจจุบัน
สิ่งที่ควรนำไปใช้ต่อคือกระบวนการ

aligned returns $\rightarrow$ correlation/covariance estimation
 $\rightarrow$ portfolio construction $\rightarrow$ out-of-sample evaluation

มากกว่าการนำรายชื่อหลักทรัพย์ในอดีตไปใช้โดยตรง

6.16 จาก Risk Aggregation สู่ Portfolio Optimization

บทนี้ตอบคำถามว่า เมื่อกำหนด w , μ และ Σ แล้ว พอร์ตมี expected return และ risk เท่าใด กล่าวคือเป็นปัญหาแบบ “forward evaluation” จาก inputs ไปสู่คุณลักษณะของพอร์ต

บทถัดไปเปลี่ยนทิศของปัญหาเป็น “inverse design” คือเริ่มจากเป้าหมายด้านผลตอบแทนและความเสี่ยง แล้วหาน้ำหนักที่สอดคล้องกับเป้าหมายนั้น

บทถัดไปเปลี่ยนทิศของปัญหาเป็น

เลือก w

ภายใต้เงื่อนไข เช่น

$$1^T w = 1$$

เพื่อให้

$$w^T \Sigma w$$

ต่ำที่สุดสำหรับ target return หรือเพื่อหาพอร์ตบน efficient frontier



รูปที่ 6.2: บทที่ 6 ทำหน้าที่เป็นสะพานจากการประมาณความเสี่ยงไปสู่ทฤษฎีพอร์ตและ optimization

6.17 Data Lineage และ Model Validation

ตารางที่ 6.1: Checklist สำหรับ Portfolio Risk Model

องค์ประกอบ	ต้องบันทึก	ความผิดพลาดที่พบบ่อย
Price data	source, adjusted/ unadjusted, currency	corporate actions ทำให้ return ผิด
Calendar	common dates, holidays, time zones	asynchronous observations
Return definition	simple/log, total/price return	ใช้ log return เป็น exact portfolio return
Frequency	daily/weekly/monthly	annualization ไม่สอดคล้อง
Missing data	deletion/imputation rule	covariance แต่ละ คู่ ใช้ sample คนละชุด
Mean estimate	window, estimator, forecast source	historical mean ถูก ใช้ เป็น expected return โดยไม่ประเมิน uncertainty
Covariance	sample/shrinkage/factor estimator	near-singular หรือ unstable matrix
Correlation stress	scenario และ PSD check	ปรับที่ละคู่จน matrix invalid
Currency	FX quote และ hedge assumption	เครื่องหมาย FX return ผิด
Validation	rolling window / holdout / stress test	ประเมิน และ ทดสอบ บน ข้อมูล ชุดเดียวทั้งหมด

Minimum Validation Set

ก่อนส่ง $\hat{\mu}$ และ $\hat{\Sigma}$ ไปยัง optimizer ควรตรวจสอบอย่างน้อย

1. $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^T$ ภายใน numerical tolerance
2. diagonal entries ไม่ติดลบ
3. eigenvalues ไม่ติดลบเกิน tolerance ที่อธิบายได้ และตรวจ condition number หรือ near-singularity เมื่อจะใช้ optimization

4. portfolio variance จาก matrix formula ตรงกับ direct calculation ใน test cases รวมทั้งตรวจหน่วยว่า daily, monthly หรือ annualized สอดคล้องกัน
5. ผลลัพธ์ไม่เปลี่ยนอย่างรุนแรงจากการเลื่อน estimation window เล็กน้อย
6. ผ่าน correlation และ volatility stress scenarios ที่เกี่ยวข้อง

6.18 Investment Lab: Portfolio Risk Engine

Investment Lab: Excel: จากระาคาไปสู่ Covariance Matrix

เลือกสินทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการและสร้าง workbook ที่มี

1. adjusted price data ที่จัดวันตรงกัน
2. simple-return matrix
3. mean vector
4. covariance matrix
5. correlation matrix
6. equal-weight portfolio
7. portfolio variance และ volatility
8. risk contribution ของแต่ละสินทรัพย์
9. correlation stress scenario

ทดลองเพิ่มจำนวนสินทรัพย์ใน equal-weight portfolio แล้วสร้างกราฟ n กับ σ_p พร้อมอธิบายว่าผลที่เห็นเกิดจากจำนวนสินทรัพย์หรือ dependence structure และเปรียบเทียบอย่างน้อยสองช่วงเวลา เช่น normal period กับ stress period เพื่อดูว่า diversification benefit เปลี่ยนเมื่อ correlation regime เปลี่ยนหรือไม่

Investment Lab: Python: Portfolio Risk Functions

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `portfolio_return(w, mu)`
- `portfolio_variance(w, cov)`
- `portfolio_sd(w, cov)`
- `cov_from_corr(vol, corr)`

- `is_psd(cov)`
- `linear_shrinkage(sample, target, lambda)`
- `risk_contributions(w, cov)`
- `diversification_ratio(w, cov)`
- `stress_correlation(corr, eta)`

สร้าง unit tests สำหรับ two-asset formula, three-asset matrix formula, perfect-negative-correlation case, PSD test, shrinkage PSD preservation และ Euler risk decomposition

6.19 ข้อจำกัดของกรอบ Mean–Variance

แม้ variance–covariance framework เป็นรากฐานสำคัญของ portfolio theory แต่มีข้อจำกัด

1. variance ปฏิบัติต่อ upside และ downside deviations แบบสมมาตร จึงไม่แยกความผันผวนที่ผู้ลงทุนชอบออกจาก downside risk ที่ผู้ลงทุนกังวล
2. expected returns และ covariances ต้องประมาณจากข้อมูลหรือแบบจำลองและมี estimation error
3. dependence อาจ nonlinear มี tail dependence และเปลี่ยนตาม regime ซึ่ง covariance เพียงเมทริกซ์เดียวอาจสรุปได้ไม่ครบ
4. sample correlation ในช่วงปกติอาจไม่สะท้อน crisis dependence
5. transaction costs, taxes, liquidity และ market impact ยังไม่อยู่ในสมการพื้นฐาน
6. short-sale และ leverage constraints เปลี่ยน feasible set
7. multi-period investing มี rebalancing และ path dependence ที่ one-period model ไม่ครอบคลุมทั้งหมด

ข้อจำกัดเหล่านี้ไม่ได้ทำให้ mean–variance framework หมดประโยชน์ แต่กำหนดขอบเขตการตีความและเป็นแรงจูงใจให้พัฒนาแบบจำลองที่สมบูรณ์ขึ้นในบทต่อไป

บทสรุปท้ายบท

บทนี้สร้างสะพานจากความเสี่ยงรายสินทรัพย์ไปสู่ความเสี่ยงของพอร์ต โดยผลตอบแทน simple return ของพอร์ตหนึ่งช่วงเวลาเป็นผลรวมเชิงเส้น

$$R_p = \mathbf{w}^T \mathbf{R}$$

และ expected return คือ

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$$

ขณะที่ความเสี่ยงรวมมีโครงสร้างกำลังสอง

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

จึงขึ้นกับทั้งน้ำหนัก variance รายสินทรัพย์ และ covariance ระหว่างทุกคู่

Diversification benefit เกิดจาก dependence structure ไม่ใช่จำนวนสินทรัพย์เพียงอย่างเดียว ใน equal-weight/common-correlation model

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left(\rho + \frac{1 - \rho}{n} \right)$$

ซึ่งแสดงว่าความเสี่ยงส่วนที่เกิดจาก common co-movement ไม่หายไปเพียงเพราะเพิ่มจำนวนสินทรัพย์

Risk contribution ช่วยแยกแหล่งที่มาของ portfolio volatility โดย

$$RC_i = \frac{w_i (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})_i}{\sigma_p}$$

และ

$$\sum_i RC_i = \sigma_p$$

ในเชิงประจักษ์ covariance matrix ต้องถูกมองเป็นค่าประมาณที่มี estimation risk จึงต้องตรวจ data alignment, PSD, rank/conditioning, stability และ stress scenarios รวมทั้งอาจใช้ shrinkage เพื่อเพิ่มความเสถียร โดยเฉพาะเมื่อจำนวนสินทรัพย์มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับจำนวนสังเกต

เมื่อ $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ และ $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ได้รับการตรวจสอบแล้ว บทถัดไปจะใช้ตัวแปรเหล่านี้เพื่อศึกษาการเลือกน้ำหนักพอร์ตอย่างเป็นระบบภายใต้กรอบ Markowitz

คำศัพท์สำคัญ

- Portfolio weight
- Fully invested
- Long-only
- Short position
- Gross exposure
- Net exposure
- Portfolio return
- Expected return
- Variance
- Covariance
- Correlation
- Covariance matrix
- Positive semidefinite
- Diversification
- Naive diversification
- Common correlation
- Marginal contribution to risk
- Risk contribution
- Diversification ratio
- International diversification
- Currency risk
- Sample covariance
- Covariance shrinkage
- Correlation stress
- Estimation risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. พอร์ตมีสินทรัพย์ 4 รายการ มูลค่า 200,000, 300,000, 250,000 และ 250,000 บาท จงหาน้ำหนักพอร์ต และตรวจเงื่อนไข fully invested
2. พอร์ต long-short มีน้ำหนัก $(1.2, 0.5, -0.7)^T$ จงหา net exposure และ gross exposure
3. พิสูจน์ว่า simple return ของพอร์ตหนึ่งช่วงเวลาเท่ากับ $\mathbf{w}^T \mathbf{R}$ เมื่อใช้น้ำหนักต้นงวด
4. ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขที่แสดงว่า weighted average ของ log returns ไม่เท่ากับ exact log return ของพอร์ต
5. ให้ $\mathbf{w} = (0.3, 0.4, 0.3)^T$ และ $\boldsymbol{\mu} = (0.06, 0.10, 0.14)^T$ จงหา expected portfolio return
6. พิสูจน์สูตร $\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$
7. พิสูจน์ว่า covariance matrix เป็น symmetric PSD
8. พอร์ตสองสินทรัพย์มี $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 18\%$, $w_1 = 0.55$ และ $\rho = 0.30$ จงหา σ_p
9. ใช้ข้อมูลในข้อก่อนคำนวณ σ_p ใหม่เมื่อ $\rho = 1, 0, -1$ และตีความผล
10. พิสูจน์น้ำหนัก zero-variance portfolio เมื่อ $\rho = -1$

11. สำหรับพอร์ตสามสินทรัพย์ จงขยาย $\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$ เป็น scalar formula
12. covariance matrix ของสินทรัพย์ 20 รายการมีพารามิเตอร์อิสระกี่ค่า
13. พิสูจน์ equal-weight/common-correlation variance formula
14. อธิบายเหตุผลที่ equicorrelation matrix ต้องมี $\rho \geq -1/(n-1)$
15. พอร์ตมี $\mathbf{w} = (0.4, 0.35, 0.25)^T$ และใช้ covariance matrix จากตัวอย่างพอร์ตสามสินทรัพย์ข้างต้น จงคำนวณ MRC, RC และ PRC
16. พิสูจน์ Euler risk decomposition $\sum_i RC_i = \sigma_p$
17. สินทรัพย์ต่างประเทศให้ผลตอบแทน 8% ในสกุลเงินท้องถิ่น และสกุลเงินนั้นแข็งค่าต่อบาท 4% จงหา exact THB return และ first-order approximation
18. อธิบายว่าทำไม pairwise deletion อาจทำให้ covariance matrix ไม่เป็น PSD
19. พิสูจน์ว่า convex combination ของ PSD matrices ยังเป็น PSD และเชื่อมผลกับ covariance shrinkage
20. ออกแบบ correlation stress test สำหรับพอร์ต 5 สินทรัพย์และอธิบาย validity checks ที่ต้องทำ
21. เปรียบเทียบ naive diversification กับ covariance-aware diversification โดยสร้างตัวอย่างที่พอร์ต 5 สินทรัพย์มีความเสี่ยงต่ำกว่าพอร์ต 20 สินทรัพย์
22. อธิบายเหตุผลที่ sample covariance matrix ไม่ควรถูกส่งเข้า optimizer โดยไม่ทำ stability analysis
23. พิสูจน์ว่า sample covariance matrix ที่คำนวณจาก return matrix ชุดเดียวกันเป็น PSD และอธิบายว่าทำไม pairwise deletion จึงอาจทำลายสมบัตินี้
24. ถ้ามีสินทรัพย์ $n = 120$ รายการ แต่ใช้ข้อมูลรายเดือนเพียง $T = 60$ เดือน จงอธิบาย rank limitation ของ sample covariance matrix และผลต่อการทำ portfolio optimization
25. แสดงว่าในกรณี long-only two-asset portfolio มี $\partial \sigma_p^2 / \partial \rho_{12} \geq 0$ และตีความเชิงการลงทุน
26. แสดงว่า exact log return ของ fully-invested one-period portfolio คือ $\log(\sum_i w_i e^{r_i})$ และเปรียบเทียบกับ $\sum_i w_i r_i$ ด้วยตัวอย่างเชิงตัวเลข

คำถามชวนคิด

1. จำนวนสินทรัพย์ในพอร์ตเป็นมาตรวัด diversification ที่ดีเพียงใด
2. เหตุใด correlation ระหว่างสินทรัพย์จึงมักเปลี่ยนในช่วงวิกฤต และมีผลต่อพอร์ตอย่างไร
3. ถ้าสินทรัพย์มี expected return สูงแต่สร้าง risk contribution สูงมาก ควรลดน้ำหนักเสมอหรือไม่
4. การใช้ข้อมูลย้อนหลัง 5 ปีเพื่อประมาณ covariance สำหรับพอร์ตในอีก 1 ปีข้างหน้ามีสมมติฐานแฝงอะไรบ้าง
5. ในการสร้างพอร์ตระหว่างประเทศ การ hedge ค่าเงินอาจเพิ่มความเสี่ยงในบางกรณีได้หรือไม่

6. เหตุใด portfolio optimization จึงอาจไวต่อ expected-return estimates มากกว่า covariance estimates

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 6

- [30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.
- [33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: [10.2307/2975974](https://doi.org/10.2307/2975974).
- [68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.