

บทที่ 7 ทฤษฎีพอร์ตของ Markowitz

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบาย feasible set, opportunity set, dominance และ mean–variance efficient portfolio ได้
2. ตั้งปัญหา target-return minimum variance และแก้ด้วย Lagrange multiplier ในรูปเวกเตอร์–เมทริกซ์
3. หา Global Minimum Variance Portfolio (GMV) และพิสูจน์สมบัติสำคัญของพอร์ตดังกล่าว
4. สร้างสมการ minimum-variance frontier แบบปิดรูปและแยก efficient branch ออกจาก inefficient branch
5. พิสูจน์ two-fund theorem สำหรับ frontier ของสินทรัพย์เสี่ยง
6. ใช้ mean–variance utility เพื่อเชื่อม risk aversion กับการเลือกพอร์ตบน efficient frontier
7. วิเคราะห์ผลของข้อจำกัด no short-selling ด้วย quadratic programming และเงื่อนไข KKT
8. อธิบาย corner portfolios และ active-set interpretation ได้
9. วิเคราะห์ sensitivity ของ optimal weights ต่อ expected-return vector และ covariance matrix
10. แยก in-sample efficient frontier ออกจาก realized out-of-sample performance
11. ออกแบบ robustness analysis ด้วย shrinkage, resampling, constraints และ rolling estimation
12. เตรียมแนวคิดจาก risky-asset frontier ไปสู่ risk-free asset, tangency portfolio และ CAPM ในบทถัดไป

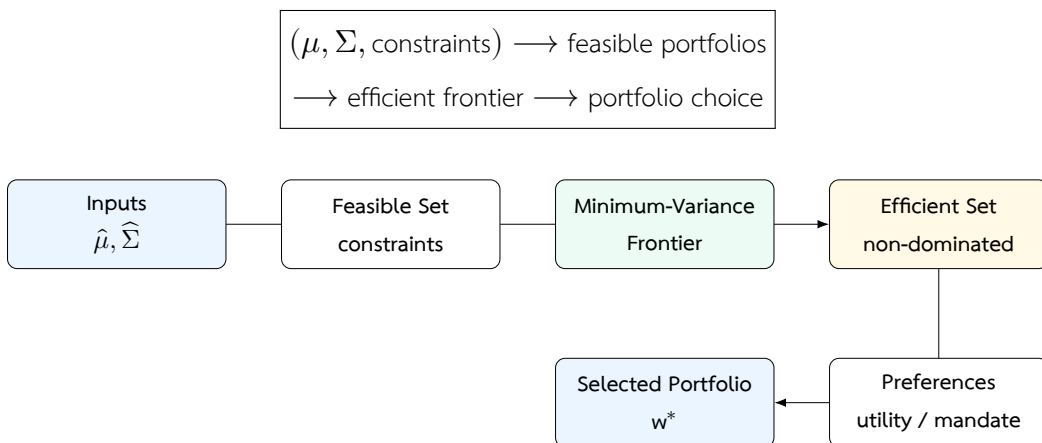
7.1 บทนำ: จากการวัดพอร์ตสู่การเลือกพอร์ต

บทที่ 6 แสดงว่า เมื่อกำหนดน้ำหนักพอร์ต w แล้ว ผลตอบแทนคาดหวังและความแปรปรวนของพอร์ตเขียนได้เป็น

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

บทนี้กลับทิศทางของคำถาม โดยถือว่า $\boldsymbol{\mu}$ และ $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็น inputs แล้วถามว่าเราควรเลือก $\mathbf{w}$ อย่างไรภายใต้เป้าหมายและข้อจำกัดที่กำหนด แนวคิดนี้เป็นแกนของทฤษฎีการเลือกพอร์ตของ Markowitz [33]

ในเชิงการตัดสินใจ ต้องแยกสองชั้นออกจากกันให้ชัดเจน ชั้นแรกคือ *estimation layer* ซึ่งใช้ข้อมูลเพื่อประมาณ $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ และ $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ส่วนชั้นที่สองคือ *optimization layer* ซึ่งนำค่าประมาณเหล่านั้นเข้าสู่ปัญหาการเลือกพอร์ต ตัว optimizer สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องทุกชั้น แต่พอร์ตที่ได้ยังอาจไม่เหมาะสมในอนาคตหาก inputs มี estimation error สูง ดังนั้นคำว่า “optimal portfolio” จึงต้องตีความควบคู่กับคุณภาพของข้อมูลและแบบจำลองเสมอ



รูปที่ 7.1: โครงสร้างการเลือกพอร์ตในรอบ mean-variance

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า “optimal” ในบทนี้หมายถึง optimal ภายใต้ objective function, inputs และ constraints ที่ระบุ ไม่ได้หมายความว่าพอร์ตดังกล่าวจะให้ผลตอบแทนที่ดีที่สุดในอนาคต และ efficient frontier ที่ประมาณจากข้อมูลเป็น estimated frontier ไม่ใช่เส้นคงที่ของตลาด

7.2 Feasible Set, Opportunity Set และ Dominance

ให้มีสินทรัพย์เสี่ยง n รายการ โดย

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

และ

$$\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{R})$$

ถ้าอนุญาต short-selling และพอร์ต fully invested

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1\}$$

เมื่อส่งแต่ละ $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ ไปยังระนาบ risk-return ด้วย

$$\mathbf{w} \mapsto (\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}, \mathbf{w}^T \mu)$$

จะได้ opportunity set ซึ่งเป็นภาพของ feasible weights ในระนาบ risk-return

ข้อสังเกต

Feasible set และ opportunity set ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน Feasible set อยู่ใน *weight space* และบอกว่าน้ำหนักชุดใดทำได้ภายใต้ constraints ส่วน opportunity set อยู่ใน *risk-return space* และบอกว่าพอร์ตเหล่านั้นให้คู่ (σ_p, μ_p) ไต่บ้าง พอร์ตน้ำหนักต่างกันอาจถูกส่งไปยังจุด risk-return เดียวกันได้ จึงไม่ควรใช้สองคำนี้แทนกันโดยไม่ระบุนิยาม

บทนิยาม 7.1

พอร์ต P_1 ครอบงำพอร์ต P_2 ในความหมาย mean-variance ถ้า

$$\mu_1 \geq \mu_2$$

และ

$$\sigma_1 \leq \sigma_2$$

โดยมีอย่างน้อยหนึ่งสมการเป็นแบบเข้ม

พอร์ตที่ไม่มีพอร์ตอื่นใน feasible set ครอบงำเรียกว่า mean-variance efficient portfolio

7.2.1 ข้อสมมติและขอบเขตของกรอบ Mean-Variance

กรอบ mean-variance ใช้ expected return เป็นตัวแทน reward และ variance เป็นตัวแทน risk เกณฑ์นี้มีฐานเชิงทฤษฎีที่ชัดเจนภายใต้ quadratic utility และมีความสะดวกมากเมื่อผลตอบแทนอยู่ในตระกูลการแจกแจงที่อธิบายได้ดีด้วยพารามิเตอร์ตำแหน่งและการกระจาย เช่น กรณีนปกติ อย่างไรก็ตาม ในข้อมูลจริงที่มี skewness, fat tails หรือ downside asymmetry การใช้เพียงสองโมเมนต์แรกอาจไม่สะท้อนความเสี่ยงทั้งหมด จึงควรมอง mean-variance เป็นแบบจำลองอ้างอิงที่มีประโยชน์ ไม่ใช่คำอธิบายความเสี่ยงที่สมบูรณ์ในทุกสถานการณ์

การประยุกต์ใช้ต้องระบุอย่างน้อย investment horizon, return definition, วิธีประมาณ μ , วิธีประมาณ Σ , universe, short-sale rule, leverage rule และข้อจำกัดด้านสภาพคล่อง เพราะการเปลี่ยนองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งสามารถเปลี่ยน feasible set และ efficient frontier ได้ แม้ข้อมูลราคาชุดเดิมจะไม่เปลี่ยน

ข้อสังเกต

Mean-variance efficiency เป็น conditional statement พอร์ตที่ efficient ภายใต้ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\Sigma}$ ชุดหนึ่ง อาจไม่ efficient เมื่อ estimation window, estimator, constraints หรือ market regime เปลี่ยน

7.3 Target-Return Minimum-Variance Problem

สมมติ Σ เป็น symmetric positive definite และต้องการผลตอบแทนเป้าหมาย μ_0

Mean-Variance Optimization

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mu^T \mathbf{w} = \mu_0 \end{aligned}$$

ตัวคูณ $1/2$ ไม่เปลี่ยนคำตอบ แต่ทำให้อนุพันธ์สะดวกขึ้น ภายใต้กรณี unconstrained ที่อนุญาต short-selling หาก μ ไม่เป็นค่าคงที่เท่ากันทุกสินทรัพย์ จะสามารถสร้าง target return ได้หลากหลายมากผ่าน long-short positions แต่ความเป็นไปได้เชิงคณิตศาสตร์นี้ไม่ได้หมายความว่าพอร์ตดังกล่าวดำเนินการได้จริงเมื่อมี leverage, borrow หรือ position limits

สร้าง Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda (1^T \mathbf{w} - 1) - \gamma (\mu^T \mathbf{w} - \mu_0)$$

เงื่อนไขอันดับหนึ่งคือ

$$\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} - \gamma \mu = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{1} + \gamma \mu)$$

กำหนด

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu, \quad C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad \Delta = AC - B^2 \quad (7.1)$$

จาก constraints

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\Delta > 0$

$$\lambda = \frac{C - B\mu_0}{\Delta}$$

และ

$$\gamma = \frac{A\mu_0 - B}{\Delta}$$

จึงได้ผลสำคัญ

ทฤษฎีบท 7.1

ถ้า Σ positive definite และ $\Delta > 0$ พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุดที่ให้ expected return เท่ากับ μ_0 คือ

$$w(\mu_0) = \Sigma^{-1} \left[\frac{C - B\mu_0}{\Delta} \mathbf{1} + \frac{A\mu_0 - B}{\Delta} \mu \right] \quad (7.2)$$

สูตรนี้มีความหมายสำคัญสองประการ ประการแรก น้ำหนักพอร์ตขึ้นกับ Σ^{-1} จึงไวต่อ covariance estimation โดยเฉพาะเมื่อเมทริกซ์มี condition number สูง ประการที่สอง target return เข้าสู่สูตรแบบเชิงเส้น ทำให้ frontier portfolios ทั้งหมดอยู่บน affine subspace ที่มีมิติต่ำกว่าพื้นที่น้ำหนักเดิม ซึ่งเป็นพื้นฐานของ two-fund theorem ในหัวข้อถัดไป

พิสูจน์. เงื่อนไขอันดับหนึ่งให้รูปของ w ด้านบน และ constraints ให้ระบบเชิงเส้นสำหรับ λ, γ เมื่อ $\Delta > 0$ ระบบมีคำตอบเอกลักษณ์

เนื่องจาก Σ positive definite ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

เป็น strictly convex ขณะที่ constraints เป็น affine ดังนั้น feasible stationary point เป็น global minimizer ที่มีเอกลักษณ์ $\square$

7.4 เหตุใด $\Delta \geq 0$

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า Σ positive definite แล้ว

$$\Delta = AC - B^2 \geq 0$$

และ $\Delta > 0$ ถ้า μ ไม่เป็นสัดส่วนกับ $\mathbf{1}$

พิสูจน์. กำหนด

$$\mathbf{x} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{1}$$

และ

$$\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2} \boldsymbol{\mu}$$

จะได้

$$A = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

$$B = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

และ

$$C = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$$

จาก Cauchy–Schwarz inequality

$$B^2 \leq AC$$

จึงได้

$$\Delta \geq 0$$

และ equality เกิดเมื่อ $\mathbf{x}$ กับ $\mathbf{y}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งเทียบเท่ากับ $\boldsymbol{\mu}$ เป็นสัดส่วนกับ $\mathbf{1}$

□

กรณี $\Delta = 0$ ภายใต้ Σ positive definite เทียบเท่ากับ $\boldsymbol{\mu} = c\mathbf{1}$ สำหรับค่าคงที่ c กล่าวคือ expected return ของสินทรัพย์ทุกตัวเท่ากัน ดังนั้นพอร์ต fully invested ทุกพอร์ตมี expected return เท่ากับ c หากกำหนด $\mu_0 = c$ ข้อจำกัดด้านผลตอบแทนจะซ้ำกับ budget constraint ในเชิงข้อมูล และหากกำหนด $\mu_0 \neq c$ ปัญหาจะไม่มี feasible solution ประเด็นนี้อธิบายว่าทำไมสูตร frontier แบบปิดรูปจึงต้องสมมติ $\Delta > 0$

7.5 Global Minimum Variance Portfolio

หากไม่กำหนด target return ปัญหาคือ

$$\min_w \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

ภายใต้

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$$

ทฤษฎีบท 7.3

Global Minimum Variance Portfolio คือ

$$\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{A} \quad (7.3)$$

โดย

$$\mu_{\text{GMV}} = \frac{B}{A} \quad \sigma_{\text{GMV}}^2 = \frac{1}{A} \quad (7.4)$$

ฟังก์ชัน Lagrangian คือ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1)$$

จึงได้

$$\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{1}$$

หรือ

$$\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

ใช้ budget constraint

$$1 = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = \lambda A$$

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{1}{A}$$

และได้สูตรน้ำหนัก GMV จากนั้น

$$\mu_{\text{GMV}} = \mu^T \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{A} = \frac{B}{A}$$

ส่วน variance คือ

$$\sigma_{\text{GMV}}^2 = \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{A^2} = \frac{1}{A}$$

□

ข้อสังเกตสำคัญคือ $\mathbf{w}_{\text{GMV}}$ ขึ้นกับ Σ แต่ไม่ขึ้นกับ μ โดยตรง จึงมักมีความเสถียรกว่าพอร์ตที่ไล่ตาม target return หรือ expected-return forecasts เมื่อการประมาณค่า mean มี noise สูง อย่างไรก็ตาม GMV ยังไวต่อ covariance estimation และอาจมีน้ำหนักสุดโต่งได้หากอนุญาต short-selling โดยไม่มีข้อจำกัด

7.5.1 กรณีสองสินทรัพย์

ถ้า w เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 1

$$\sigma_p^2 = w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1-w) \sigma_{12}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ w จะได้

Two-Asset GMV

$$w_1^{\text{GMV}} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}},$$

$$w_2^{\text{GMV}} = 1 - w_1^{\text{GMV}}$$

ตัวส่วน $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} = \text{Var}(R_1 - R_2)$ จึงสะท้อนความเสี่ยงของผลตอบแทนส่วนต่างระหว่างสองสินทรัพย์ หากส่วนต่างแทบไม่ผันผวน สินทรัพย์ทั้งสองให้ข้อมูลด้าน diversification ที่ใกล้เคียงกันมาก และสูตรน้ำหนักจะไวต่อค่าประมาณ covariance มากขึ้น

7.6 Minimum-Variance Frontier

จาก optimality condition

$$\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{1} + \gamma \boldsymbol{\mu}$$

จึงมี

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = \lambda + \gamma \mu_0$$

แทนค่า λ และ γ

ทฤษฎีบท 7.4

Minimum-variance frontier ของ risky assets ภายใต้ unconstrained short-selling คือ

$$\sigma^2(\mu) = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \quad (7.5)$$

และสามารถเขียนรอบ GMV เป็น

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta} \left(\mu - \frac{B}{A} \right)^2 \quad (7.6)$$

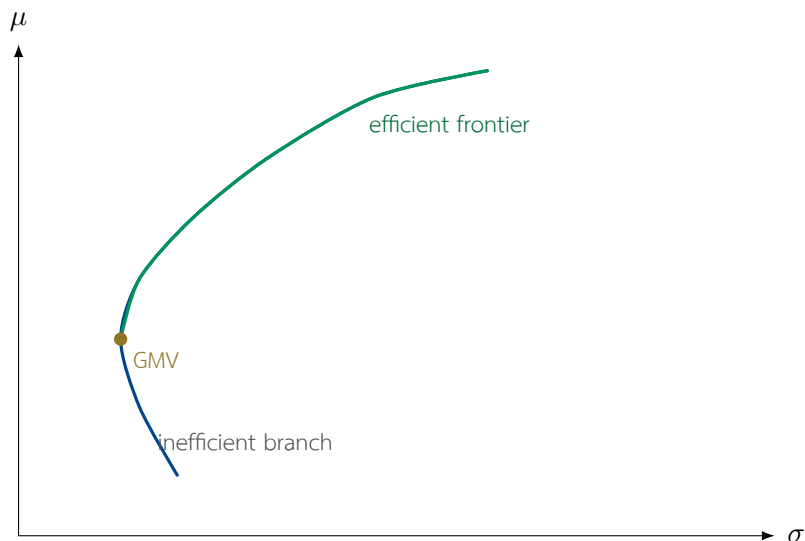
สมการหลังทำให้เห็นทันทีว่า variance ต่ำสุดเกิดเมื่อ

$$\mu = \frac{B}{A} = \mu_{\text{GMV}}$$

และ

$$\sigma^2 = \frac{1}{A}$$

ในระนาบ (μ, σ^2) สมการเป็นพาราโบลา ส่วนในระนาบ (σ, μ) สมการเต็มเป็นไฮเพอร์โบลา แต่ในทางการเงินพิจารณาเฉพาะครึ่งระนาบ $\sigma \geq 0$ จึงเห็นแขนบนและแขนล่างที่มาบรรจบกัน ณ GMV แขนบนเป็นส่วนที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าสำหรับความเสี่ยงระดับเดียวกัน



รูปที่ 7.2: Minimum-variance frontier และ efficient branch

บทนิยาม 7.2

ส่วนของ minimum-variance frontier ที่

$$\mu \geq \mu_{\text{GMV}}$$

คือ efficient frontier

ส่วนที่

$$\mu < \mu_{\text{GMV}}$$

เป็น inefficient branch เพราะสำหรับทุกจุดบนแกนล่าง มีพอร์ตบนแกนบนที่มี variance เท่ากันแต่ expected return สูงกว่า

การแบ่ง efficient/inefficient จึงไม่ใช่เรื่องของ “ความเสี่ยงต่ำหรือสูง” เพียงอย่างเดียว แต่เป็นเรื่องของ dominance ตัวอย่างเช่น พอร์ตที่มีความเสี่ยงสูงกว่า GMV อาจยังมีประสิทธิภาพ หากไม่มีพอร์ตอื่นที่ให้ expected return อย่างน้อยเท่ากันด้วยความเสี่ยงที่ต่ำกว่า

7.7 ตัวอย่างเชิงตัวเลขสามสินทรัพย์

พิจารณา

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.10 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

และ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.00192 & 0.00144 \\ 0.00192 & 0.0144 & 0.00756 \\ 0.00144 & 0.00756 & 0.0324 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้สอดคล้องกับ volatilities 8%, 12%, 18% และ pairwise correlations 0.20, 0.10, 0.35 จากการคำนวณได้ประมาณ

$$A = 197.7324, \quad B = 14.7551, \quad C = 1.29864, \quad \Delta = 39.0718$$

สำหรับ target return

$$\mu_0 = 10\%$$

ได้

$$w(0.10) \approx \begin{bmatrix} 0.3149 \\ 0.3703 \\ 0.3149 \end{bmatrix}$$

และ

$$\sigma_p \approx 9.12\%$$

ส่วน GMV คือ

$$w_{\text{GMV}} \approx \begin{bmatrix} 0.7082 \\ 0.2181 \\ 0.0737 \end{bmatrix}$$

โดย

$$\mu_{\text{GMV}} \approx 7.46\%$$

และ

$$\sigma_{\text{GMV}} \approx 7.11\%$$

ตารางที่ 7.1: ตัวอย่างจุดบน minimum-variance frontier

μ_0	w_1	w_2	w_3	σ_p
8%	0.6248	0.2503	0.1248	7.21%
10%	0.3149	0.3703	0.3149	9.12%
12%	0.0049	0.4902	0.5049	12.44%
14%	-0.3051	0.6102	0.6949	16.34%

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าเมื่อ target return สูงขึ้น optimizer ค่อย ๆ ลดน้ำหนักสินทรัพย์ที่มี expected return ต่ำและเพิ่มน้ำหนักสินทรัพย์ที่มี expected return สูง เมื่อ target เท่ากับ 14% ซึ่งเป็น expected return สูงสุดของสินทรัพย์ทั้งสาม พอร์ต long-only ในตัวอย่างนี้ต้องเป็น $\mathbf{w} = (0, 0, 1)^T$ จึงมี volatility 18% แต่ unconstrained optimizer สามารถใช้ short position ในสินทรัพย์ที่ 1 เพื่อจัด covariance structure ใหม่ และลด volatility ลงเหลือประมาณ 16.34% จึงไม่ควรนำสูตรไปใช้กับ long-only mandate โดยไม่แก้ constrained problem ใหม่

7.8 Two-Fund Theorem สำหรับสินทรัพย์เสี่ยง

จากสมการ (7.2) สามารถจัดรูปเป็น

$$\mathbf{w}(\mu) = \mathbf{g} + \mu \mathbf{h}$$

โดย

$$\mathbf{g} = \frac{C\Sigma^{-1}\mathbf{1} - B\Sigma^{-1}\mu}{\Delta}$$

และ

$$\mathbf{h} = \frac{A\Sigma^{-1}\mu - B\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\Delta}$$

ดังนั้น frontier portfolios อยู่บน affine line ใน weight space

ทฤษฎีบท 7.5

เลือกพอร์ตบน minimum-variance frontier สองพอร์ต $w^{(1)}$ และ $w^{(2)}$ ที่มี expected returns $\mu_1 \neq \mu_2$ แล้ว frontier portfolio ที่มี target return μ_0 สามารถเขียนเป็น

$$w(\mu_0) = \alpha w^{(1)} + (1 - \alpha) w^{(2)}$$

เมื่อ

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

คำว่า combination ในทฤษฎีบทนี้เป็น *affine combination* กล่าวคือ α ไม่จำเป็นต้องอยู่ในช่วง $[0, 1]$ หาก target return อยู่นอกช่วงระหว่าง μ_1 และ μ_2 จะได้ $\alpha < 0$ หรือ $\alpha > 1$ ซึ่งตีความเป็นการ extrapolate ด้วย long-short positions ไม่ใช่การผสมแบบ long-only ธรรมดา

พิสูจน์. เพราะ

$$w(\mu) = g + \mu h$$

จึงมี

$$\begin{aligned} \alpha w(\mu_1) + (1 - \alpha) w(\mu_2) &= g + [\alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2] h \\ &= g + \mu_0 h \\ &= w(\mu_0) \end{aligned}$$

□

ประเด็นที่ต้องระวัง

Two-fund theorem ในส่วนนี้กล่าวถึงการสร้าง frontier จาก risky frontier portfolios สองพอร์ต ไม่ใช่ mutual-fund separation ที่เกิดหลังเพิ่ม risk-free asset ซึ่งจะพัฒนาในบทที่ 8

7.9 Utility และการเลือกพอร์ตของนักลงทุน

Efficient frontier ระบุชุดพอร์ตที่ไม่ถูกครอบงำ แต่ยังไม่ระบุว่าผู้ลงทุนควรเลือกจุดใด จำเป็นต้องเพิ่ม preference หรือ objective

พิจารณา mean-variance utility

$$U(\mathbf{w}) = \mu^T \mathbf{w} - \frac{a}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad a > 0 \quad (7.7)$$

โดย a เป็น risk-aversion coefficient

ทฤษฎีบท 7.6

ภายใต้ budget constraint

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$$

คำตอบของ

$$\max_{\mathbf{w}} \left\{ \mu^T \mathbf{w} - \frac{a}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \right\}$$

คือ

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_{\text{GMV}} + \frac{1}{a} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_{\text{GMV}} \mathbf{1}) \quad (7.8)$$

พิสูจน์. FOC คือ

$$\mu - a \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = 0$$

จึงได้

$$\mathbf{w} = \frac{1}{a} \Sigma^{-1} (\mu - \lambda \mathbf{1})$$

จาก budget constraint

$$1 = \frac{1}{a}(B - \lambda A)$$

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{B - a}{A} = \mu_{\text{GMV}} - \frac{a}{A}$$

แทนกลับและจัดรูปจะได้สมการ (7.8)

□

นอกจากนี้

$$\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \frac{\Delta}{aA}$$

และ

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{A} + \frac{\Delta}{a^2 A}$$

ดังนั้นเมื่อ a เพิ่ม พอร์ตที่เลือกจะเข้าใกล้ GMV และเมื่อ $a \rightarrow \infty$ จะได้ $w_a \rightarrow w_{\text{GMV}}$ โดยตรง ในทางกลับกัน เมื่อ a ลดลง นักลงทุนให้น้ำหนักกับ expected return มากขึ้น ทำให้พอร์ตเคลื่อนออกจาก GMV ไปตาม efficient frontier และโดยทั่วไปมีความไวต่อ estimation error ของ μ มากขึ้น

สังเกตว่าเมื่อ $a > 0$ และ $\Delta > 0$ จะมี $\mu_a > \mu_{\text{GMV}}$ ดังนั้นคำตอบของ utility problem อยู่บน efficient branch ไม่ใช่แขนล่าง และสมการ variance ที่ถูกต้องคือ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2 A)$ ซึ่งสอดคล้องกับการแทน μ_a ลงในสมการ frontier โดยตรง

ข้อสังเกต

Utility parameter ไม่ควรถูกเลือกเพียงเพื่อให้ผลย้อนหลังดูดี ค่า a ควรสะท้อน mandate, risk budget หรือ preference ที่กำหนดก่อนประเมินผลลัพธ์

7.10 No Short-Selling และ Quadratic Programming

เมื่อไม่อนุญาต short-selling เพิ่มข้อจำกัด

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ปัญหากลายเป็น

Long-Only Mean-Variance Problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mu^T \mathbf{w} = \mu_0, \quad \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned}$$

ในกรณี long-only และ fully invested ค่า μ_0 ต้องอยู่ใน convex hull ของ expected returns ของสินทรัพย์ กล่าวง่าย ๆ คือสำหรับสินทรัพย์รายตัวและไม่มีข้อจำกัดอื่น ต้องมี $\min_i \mu_i \leq \mu_0 \leq \max_i \mu_i$ จึงจะมี feasible portfolio เงื่อนไขนี้ต่างจาก unconstrained case ที่ short-selling ทำให้ช่วง target return ขยายออกไปได้มาก

สูตร inverse แบบ unconstrained ไม่สามารถใช้ได้ตลอด frontier เพราะ active set เปลี่ยนเมื่อ target return เปลี่ยน

7.10.1 KKT Conditions

เขียน inequality เป็น

$$-w_i \leq 0$$

และให้ $\nu_i \geq 0$ เป็น multipliers

เงื่อนไข KKT คือ

$$\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} - \gamma \mu - \nu = 0$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$$

$$\mu^T \mathbf{w} = \mu_0$$

$$\mathbf{w} \geq 0$$

$$\nu \geq 0$$

$$\nu_i w_i = 0$$

บทนิยาม 7.3

สินทรัพย์ที่มี $w_i = 0$ อยู่บน boundary ของ feasible set ในภาษา active-set optimization ข้อจำกัด $w_i \geq 0$ ของสินทรัพย์นั้นเป็น *active constraint* ขณะที่สินทรัพย์มักถูกเรียกว่า *inactive asset* เพราะไม่ได้ถูกถือในพอร์ต หาก $w_i > 0$ complementary slackness บังคับให้ $\nu_i = 0$ จุดที่ active set เปลี่ยนทำให้ frontier แบบ constrained มีโครงสร้างเป็นชิ้น ๆ และเกิด corner portfolios จึงไม่ควรคาดหวังว่าน้ำหนักจะเปลี่ยนอย่างเรียบตลอดทุก target return

ประเด็นที่ต้องระวัง

หาก unconstrained solution มีน้ำหนักติดลบ การแทนน้ำหนักเหล่านั้นด้วยศูนย์แล้ว normalize ใหม่ไม่ใช่คำตอบ long-only optimizer โดยทั่วไป เพราะการเปลี่ยนน้ำหนักหนึ่งตัวเปลี่ยนทั้ง budget, target return และ covariance interactions

7.11 ข้อจำกัดเชิงปฏิบัติที่เปลี่ยน Efficient Frontier

การลงทุนจริงอาจมี constraints เช่น

$$\ell_i \leq w_i \leq u_i$$

sector limits

$$L_g \leq \sum_{i \in g} w_i \leq U_g$$

gross leverage limit

$$\sum_i |w_i| \leq G_{\max}$$

และ turnover constraint

$$\sum_i |w_i - w_i^{\text{old}}| \leq \tau$$

เมื่อเพิ่ม constraints feasible set จะหดตัว ดังนั้น frontier ที่เป็นไปได้ภายใต้ constraints ใหม่ไม่สามารถครอบงำ unconstrained frontier ในเชิง mathematical opportunity set ได้

ทฤษฎีบท 7.7

ถ้า feasible sets สองชุดมีความสัมพันธ์

$$\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$$

แล้ว minimum variance ที่ target return เดียวกันภายใต้ $\mathcal{W}_2$ ไม่น้อยกว่าภายใต้ $\mathcal{W}_1$

พิสูจน์. การ minimize ฟังก์ชันเดียวกันบนเซตที่เล็กกว่าไม่สามารถให้ค่าต่ำกว่าค่าต่ำสุดบนเซตที่ใหญ่กว่าซึ่งครอบคลุมเซตนั้น $\square$

อย่างไรก็ตาม constraints อาจช่วยให้ realized out-of-sample performance ดีขึ้น เพราะลด estimation-error amplification, concentration และ turnover แม้ in-sample frontier จะดูดีอยู่ นี่เป็นตัวอย่างสำคัญของความแตกต่างระหว่าง *optimization efficiency* กับ *investment robustness*: การยอมเสียประสิทธิภาพเชิงแบบจำลองเล็กน้อยอาจแลกกับพอร์ตที่ดำเนินการได้จริงและเสถียรมากกว่า

7.12 Estimation Error และความไม่เสถียรของ Optimal Weights

สูตรปิดรูปทำให้เห็นว่าค่าตอบขึ้นกับ

$$\Sigma^{-1}$$

อย่างมาก ถ้า covariance matrix มี eigenvalue เล็ก การกลับเมทริกซ์จะขยาย noise ในทิศดังกล่าว ให้ eigendecomposition

$$\Sigma = Q\Lambda Q^T$$

โดย

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

แล้ว

$$\Sigma^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^T$$

ถ้า λ_j เล็กมาก ค่า $1/\lambda_j$ จะมีค่ามาก ทำให้ perturbation เล็กในข้อมูลสร้างการเปลี่ยนแปลงของน้ำหนักได้มาก ปัญหานี้มักสรุปด้วย condition number

$$\kappa(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

เมื่อ $\kappa(\Sigma)$ สูงมาก การคำนวณ inverse แม้ทำได้ในเชิงตัวเลขก็อาจไม่เสถียร ในกรณีที่ sample covariance เป็น singular เช่น จำนวนสินทรัพย์มากเมื่อเทียบกับจำนวนข้อมูล การใช้ pseudoinverse เพียงอย่างเดียวไม่แก้ estimation risk โดยอัตโนมัติ จึงควรพิจารณา shrinkage, factor structure หรือ regularization ร่วมด้วย

ประเด็นที่ต้องระวัง

Efficient frontier ที่ดูดีมากใน sample อาจเป็นผลของ estimation noise โดยเฉพาะเมื่อ expected-return estimates แตกต่างกันเพียงเล็กน้อยแต่ optimizer ใช้ leverage หรือ short positions เพื่อแสวงหาความต่างนั้น

7.13 Sensitivity ของ Optimal Weights

ให้ θ แทน input parameter เช่น expected return, volatility หรือ correlation และให้

$$\mathbf{w}^*(\theta)$$

เป็น optimal weights

การตรวจ sensitivity สามารถใช้ finite difference

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \theta} \approx \frac{\mathbf{w}^*(\theta + h) - \mathbf{w}^*(\theta - h)}{2h}$$

สำหรับ unconstrained problem ที่คำตอบเปลี่ยนอย่างเรียบ finite difference ให้การประมาณ local sensitivity ที่มีความหมาย แต่ใน constrained optimization คำตอบอาจไม่ differentiable ณ จุดที่ active set เปลี่ยน ดังนั้นควรดูทั้งอนุพันธ์เชิงตัวเลขและการเปลี่ยนแปลงของ active constraints ควบคู่กัน

ในทางปฏิบัติไม่จำเป็นต้องรายงานอนุพันธ์ทุกตัว แต่ควรตรวจอย่างน้อย

1. expected-return perturbation
2. volatility perturbation
3. correlation stress
4. estimation-window shift
5. universe inclusion/exclusion
6. constraint tightening/relaxation

Weight Stability Diagnostics

ตัวชี้วัดง่ายที่ใช้เปรียบเทียบพอร์ตฐานกับพอร์ตหลัง perturbation ได้แก่

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_1$$

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_2$$

และ maximum absolute weight change

$$\max_i |w_i^{(1)} - w_i^{(0)}|$$

หาก input เปลี่ยนเล็กน้อยแต่น้ำหนักเปลี่ยนมาก ควรตีความคำตอบ optimizer ด้วยความระมัดระวัง

7.14 แนวทางเพิ่ม Robustness

แนวทางสำคัญประกอบด้วย

ตารางที่ 7.2: แนวทางลดความเปราะบางของ Mean–Variance Portfolio

แนวทาง	หลักการ	ข้อแลกเปลี่ยน
Covariance shrinkage	ดึง sample covariance เข้าหา structured target	เพิ่ม bias เพื่อแลกกับ estimation stability
Expected-return shrinkage	ลด dispersion ของ $\hat{\mu}$	ลด extreme active bets
Weight bounds	จำกัด w_i	frontier ใน sample แคบลง
Long-only	ตัด short positions	ลด leverage แต่เสีย flexibility
Turnover penalty	ลงโทษการเปลี่ยนน้ำหนัก	ลด trading cost แต่ตอบสนองช้าลง
Resampling	สร้าง หลาย samples/ parameter scenarios	ใช้ computation มากขึ้นและขึ้นกับ resampling design
Factor structure	ลดมิติของ covariance estimation	มี factor-model risk
Rolling validation	ประเมินผลข้ามเวลา	ลด sample สำหรับแต่ละ window

แนวคิด shrinkage ของ covariance เชื่อมกับบทที่ 6 และงานของ Ledoit และ Wolf [30] จุดสำคัญคือ robustness ไม่ได้หมายถึงการใช้วิธีที่ซับซ้อนที่สุด แต่หมายถึงการลดความไวของผลลัพธ์ต่อ noise และ assumptions โดยยังรักษาเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์และความสามารถในการตรวจสอบย้อนกลับ

7.15 In-Sample Frontier กับ Out-of-Sample Portfolio

การสร้าง frontier และการประเมินผลต้องแยกช่วงข้อมูลอย่างชัดเจน

$$\text{Estimation Window} \longrightarrow (\hat{\mu}_t, \hat{\Sigma}_t) \longrightarrow \mathbf{w}_t^* \longrightarrow \text{Future Holding Period}$$

ผลตอบแทน realized ของพอร์ตในช่วงถัดไปคือ

$$R_{p,t+1} = (\mathbf{w}_t^*)^T \mathbf{R}_{t+1}$$

ไม่ใช่

$$(\mathbf{w}_t^*)^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

การใช้ข้อมูลอนาคตในการประมาณ $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ หรือ $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ก่อนสร้างน้ำหนักเป็น look-ahead bias การรายงาน efficient frontier ที่ใช้ข้อมูลทั้ง sample จึงไม่ใช่หลักฐานของ out-of-sample investment performance

สำหรับ rolling experiment ควรบันทึก estimation date, rebalance date, holding period, transaction-cost assumption และ benchmark ทุกครั้ง หากมีการซื้อขายจริง realized portfolio return ควรหักต้นทุนจาก turnover ที่เกิดขึ้นด้วย มิฉะนั้นอาจเกิดกรณีที่ optimizer ดูเหนือกว่า benchmark ในเชิง gross return แต่ด้อยกว่าเมื่อพิจารณา net return

7.16 กรณีศึกษางานวิจัยของผู้เขียน

งานของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาการใช้ correlation, beta และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50 ในข้อมูลย้อนหลัง โดยแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์และข้อกำหนด long-short สามารถเปลี่ยน feasible investment strategies ได้ [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Correlation Structure กับ Feasible Strategy

บทเรียนสำหรับทฤษฎีพอร์ตไม่ใช่การนำค่าหลักทรัพย์จาก sample period เดิมมาใช้ในการปัจจุบัน แต่คือ กระบวนการ

return data → dependence estimation → feasible-set design
→ portfolio rule → out-of-sample evaluation

เมื่ออนุญาต short-selling feasible set เปลี่ยนอย่างมีสาระ และต้องเพิ่มข้อจำกัดด้าน borrowability, leverage, liquidity และ transaction cost ในการใช้งานจริง

งานของ Kesamoon และ Witayakiattilerd ใช้ fuzzy analytical hierarchy process เพื่อรวมข้อมูลเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพในการคัดเลือกหลักทรัพย์ [28]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Security Selection กับ Portfolio Weighting เป็นคนละขั้น

การคัดเลือก universe สามารถทำก่อน mean-variance optimization

fundamentals / qualitative information $\rightarrow$ screening or score

$\rightarrow$ candidate universe $\rightarrow (\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) \rightarrow$ portfolio weights

วิธี screening ไม่ได้แทน Markowitz optimizer และ Markowitz optimizer ไม่ได้ตอบคำถามว่าควรนำสินทรัพย์ใดเข้าสู่ universe ตั้งแต่ต้น

7.17 สะพานสู่สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ CAPM

frontier ในบทนี้สร้างจาก risky assets เท่านั้น บทที่ 8 จะเพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงที่ให้ผลตอบแทน R_f

เมื่อผสม risk-free asset กับ risky portfolio P ด้วยน้ำหนัก y โดยน้ำหนักในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ $1 - y$

$$\mu_C = R_f + y(\mu_P - R_f)$$

และ

$$\sigma_C = |y|\sigma_P$$

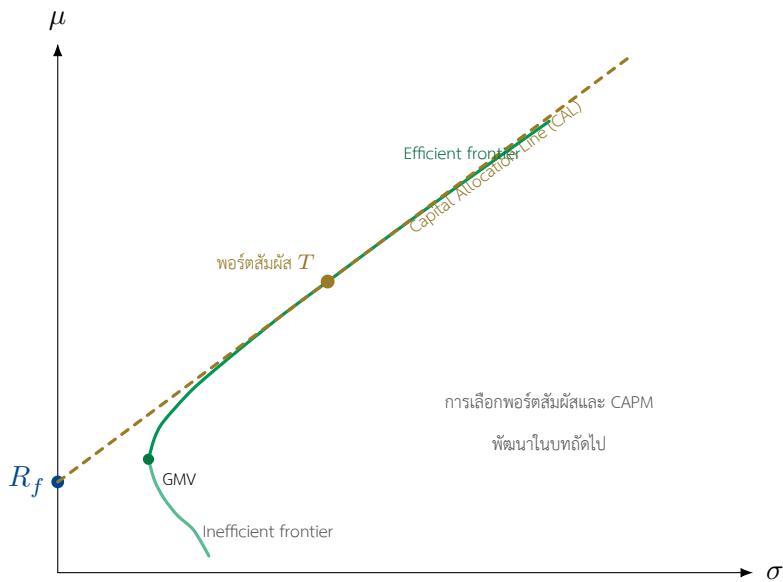
ดังนั้นพอร์ตผสมอยู่บนเส้นตรงในระนาบ σ - μ เมื่อพิจารณาด้าน $y \geq 0$ และหากอนุญาต $y > 1$ หมายถึงการกู้ที่อัตรา R_f เพื่อเพิ่ม leverage ส่วน $0 < y < 1$ หมายถึงถือทั้ง risk-free asset และ risky portfolio

ผลเส้นตรงนี้ตั้งอยู่บนสมมติฐานว่าการให้กู้และกู้ยืมทำได้ที่อัตรา risk-free เดียวกันและไม่มีข้อจำกัดเพิ่มเติม ซึ่งเป็น idealization ที่จะต้องระวังเมื่อนำไปใช้จริง

คำถามสำคัญจึงเปลี่ยนเป็นว่า risky portfolio ใดทำให้เส้นที่เริ่มจาก R_f มีความชันสูงที่สุด

$$\frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}$$

ซึ่งนำไปสู่ tangency portfolio, Capital Allocation Line, Capital Market Line และ CAPM



รูปที่ 7.3: การเพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงทำให้เส้นจัดสรรเงินทุน (Capital Allocation Line: CAL) สัมผัสเส้นขอบเขตประสิทธิภาพของสินทรัพย์เสี่ยง

7.18 Data Lineage และ Model Governance

ตารางที่ 7.3: Checklist สำหรับ Mean–Variance Portfolio Model

องค์ประกอบ	ต้องระบุ	ความเสี่ยงหากละเลย
Universe	inclusion/exclusion rule	survivorship และ selection bias
Expected returns	estimator, horizon, annualization	optimizer ไล่ตาม noise
Covariance	estimator, window, shrinkage	unstable inverse matrix
Constraints	long-only, bounds, leverage, sectors	theoretical weights ใช้งานจริงไม่ได้
Rebalancing	frequency, trigger	turnover สูงหรือ drift มากเกินไป
Transaction costs	commissions, spread, impact	paper frontier สูงเกินจริง
Validation	train/holdout/rolling	look-ahead และ overfitting
Benchmark	equal weight, market, policy	ไม่รู้ว่า complexity เพิ่มคุณค่าหรือไม่ portfolio
Stress tests	mean, vol, correlation, liquidity	ไม่เห็น fragility ของ solution
Versioning	data/model/parameter version	ทำซ้ำผลไม่ได้

7.19 Investment Lab: Efficient Frontier และ Robustness

Investment Lab: Excel: Closed-Form Efficient Frontier

สร้าง workbook อย่างน้อย 6 ซีต

1. **Prices** สำหรับ adjusted price data
2. **Returns** สำหรับ simple returns ที่จัดวันตรงกัน
3. **Inputs** สำหรับ $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ และ constraints
4. **ClosedForm** สำหรับ A, B, C, Δ , GMV และ target-return portfolios
5. **Frontier** สำหรับ target-return grid อย่างน้อย 30 จุด
6. **Checks** สำหรับ budget, target-return, variance และ weight diagnostics

วาดกราฟ $\sigma-\mu$ ทำเครื่องหมาย GMV และแยก efficient กับ inefficient branch จากนั้นเปรียบเทียบ unconstrained frontier กับ long-only frontier

Investment Lab: Python: Markowitz Solver Validation

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `frontier_constants(mu, cov)`
- `gmw_weights(cov)`
- `target_return_weights(mu, cov, target)`
- `frontier_variance(mu, cov, target)`
- `utility_optimal_weights(mu, cov, risk_aversion)`
- `long_only_minvar(mu, cov, target)`
- `weight_stability(base, perturbed)`
- `rolling_frontier_experiment(...)`

unit tests ควรตรวจ budget constraint, target-return constraint, GMV minimum property, closed-form versus numerical solver, two-fund identity และ KKT residuals โดยกำหนด numerical tolerance อย่างชัดเจน ไม่ควรตรวจ floating-point equality แบบตรงตัว

7.20 ข้อจำกัดและการตีความอย่างรับผิดชอบ

ตารางที่ 7.4: ข้อจำกัดสำคัญของ Mean-Variance Portfolio Selection

ประเด็น	ผลกระทบ	แนวทางลดปัญหา
Expected-return error	น้ำหนักไวและอาจสุดโต่ง	shrinkage, views, bounds, scenarios
Covariance instability	inverse matrix ขยาย noise	shrinkage, factor model, eigenvalue checks
Non-normal returns	variance ไม่เห็น tail/ asymmetry ทั้งหมด	downside risk, ES, stress tests
Transaction costs	theoretical optimum อาจ turnover สูง	turnover/cost constraints
Liquidity	น้ำหนักที่คำนวณได้อาจซื้อขายไม่ได้	liquidity caps, market-impact model
Shortability	short weights อาจดำเนินการไม่ได้	borrow constraints, long-only model
Regime change	frontier จากอดีตเคลื่อนที่	rolling/regime/stress estimation
Model risk	in-sample efficiency ไม่เท่ากับ real-ized success	benchmark และ out-of-sample validation

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาการวิเคราะห์จากการคำนวณ risk-return ของพอร์ตไปสู่การเลือกพอร์ตที่มีประสิทธิภาพภายใต้กรอบ mean-variance

สำหรับ target return μ_0 และ covariance matrix ที่ positive definite คำตอบ unconstrained คือ

$$w(\mu_0) = \Sigma^{-1} \left[\frac{C - B\mu_0}{\Delta} \mathbf{1} + \frac{A\mu_0 - B}{\Delta} \mu \right]$$

โดย

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu, \quad C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad \Delta = AC - B^2$$

GMV มีน้ำหนัก

$$\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{A}$$

พร้อม

$$\mu_{\text{GMV}} = \frac{B}{A}, \quad \sigma_{\text{GMV}}^2 = \frac{1}{A}$$

minimum-variance frontier มีสมการ

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta} \left(\mu - \frac{B}{A} \right)^2$$

และแขนที่อยู่เหนือ GMV คือ efficient frontier

two-fund theorem แสดงว่า frontier portfolio ใด ๆ สามารถสร้างจาก affine combination ของ frontier portfolios สองพอร์ตที่มี expected returns ต่างกัน

เมื่อเพิ่ม preference นักลงทุนสามารถเลือกพอร์ตด้วย mean-variance utility โดยสำหรับ risk-aversion coefficient $a > 0$ คำตอบมี $\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \Delta/(aA)$ และ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2 A)$ ส่วนเมื่อเพิ่ม no-short, weight bounds, leverage หรือ turnover constraints ปัญหาจะเปลี่ยนเป็น constrained quadratic program และอาจเกิด corner portfolios

ข้อสรุปเชิงปฏิบัติที่สำคัญคือ efficient frontier ขึ้นกับ estimated inputs อย่างมาก การใช้งานจึงต้องตรวจสอบ estimation risk, weight stability, constraints, transaction costs และ out-of-sample performance ไม่ใช่พิจารณาเฉพาะ in-sample frontier

บทถัดไปจะเพิ่ม risk-free asset และพัฒนาจาก Markowitz frontier ไปสู่ tangency portfolio, Capital Allocation Line, Capital Market Line และแบบจำลองการกำหนดราคาสินทรัพย์

คำศัพท์สำคัญ

- Feasible set
- Opportunity set
- Dominance
- Mean–variance efficiency
- Efficient portfolio
- Minimum-variance frontier
- Efficient frontier
- Global Minimum Variance Portfolio
- Lagrange multiplier
- Quadratic programming
- Positive definite matrix
- Frontier constants
- Two-fund theorem
- Mean–variance utility
- Risk aversion
- No short-selling
- KKT conditions
- Complementary slackness
- Active set
- Corner portfolio
- Weight stability
- Estimation error
- Shrinkage
- Resampling
- Out-of-sample validation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบาย ความแตกต่างระหว่าง feasible set, opportunity set, minimum-variance frontier และ efficient frontier
2. ให้พอร์ต P_1 มี $(\sigma, \mu) = (10\%, 8\%)$ และ P_2 มี $(9\%, 9\%)$ จงพิจารณา dominance
3. ตั้ง Lagrangian ของ target-return minimum-variance problem และหา first-order conditions
4. พิสูจน์สูตร closed-form ของ $w(\mu_0)$
5. พิสูจน์ว่า $\Delta = AC - B^2 \geq 0$ ด้วย Cauchy–Schwarz inequality
6. อธิบายความหมายทางเศรษฐศาสตร์ของกรณี $\Delta = 0$
7. พิสูจน์สูตร GMV และ $\sigma_{GMV}^2 = 1/A$
8. หา GMV ของพอร์ตสองสินทรัพย์จากการหาอนุพันธ์โดยตรง
9. พิสูจน์สมการ minimum-variance frontier

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta} \left(\mu - \frac{B}{A} \right)^2$$

10. อธิบายเหตุผลที่แกนล่างของ minimum-variance frontier ไม่มีประสิทธิภาพ
11. ใช้ข้อมูลตัวอย่างสามสินทรัพย์ในบทความพอร์ตที่ target returns 8%, 10%, 12%, 14%
12. ตรวจสอบว่าพอร์ต target 14% ในตัวอย่างต้องมี short position หรือไม่

13. พิสูจน์ two-fund theorem สำหรับ risky frontier portfolios
14. แก้ mean-variance utility problem และพิสูจน์สูตร w_a
15. แสดงว่า $\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \Delta/(aA)$ และ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2A)$ พร้อมพิสูจน์ว่าเมื่อ $a \rightarrow \infty$ จะมี $w_a \rightarrow w_{\text{GMV}}$
16. เขียน KKT conditions สำหรับ long-only target-return problem
17. อธิบาย complementary slackness ในความหมายของสินทรัพย์ที่มีน้ำหนักศูนย์
18. แสดงด้วยตัวอย่างว่าการตัด negative weights เป็นศูนย์แล้ว normalize ไม่จำเป็นต้องเป็น long-only optimum
19. พิสูจน์ว่าเมื่อ feasible set ถูกทำให้เล็กลง minimum variance ที่ target เดิมไม่สามารถลดลง
20. อธิบายด้วย eigendecomposition ว่าเหตุใด covariance matrix ที่ ill-conditioned ทำให้น้ำหนัก optimizer ไม่เสถียร
21. ออกแบบ sensitivity experiment โดย perturb expected return ของสินทรัพย์หนึ่งตัว ± 50 bp
22. เปรียบเทียบ sample covariance กับ shrinkage covariance ในแง่ frontier และ weight stability
23. ออกแบบ rolling out-of-sample experiment ที่ไม่มี look-ahead bias
24. อธิบายความแตกต่างระหว่าง in-sample efficient portfolio กับ realized best portfolio
25. อธิบายว่าเหตุใดการเพิ่ม risk-free asset ในพอร์ตไปทำให้ปัญหา efficient portfolio เปลี่ยนจากเส้นโค้งไปสู่การหาเส้นสัมผัส

คำถามชวนคิด

1. พอร์ตที่อยู่บน efficient frontier จำเป็นต้องเป็นพอร์ตที่ดีสำหรับนักลงทุนทุกคนหรือไม่
2. เหตุใด expected-return estimation error จึงสร้างน้ำหนักสุดโต่งได้ง่าย
3. constraints ที่ทำให้ in-sample frontier แย่ลงอาจทำให้ผลจริงดีขึ้นได้อย่างไร
4. หาก covariance matrix มีความแม่นยำสูงแต่ expected returns แทบพยากรณ์ไม่ได้ ควรออกแบบพอร์ตอย่างไร
5. การใช้ historical efficient frontier เพื่อสื่อสารกับนักลงทุนควรมีค่าเตือนหรือ uncertainty information แบบใด
6. Markowitz theory ควรถูกมองเป็น “คำตอบสุดท้าย” หรือเป็น mathematical benchmark สำหรับการพัฒนากระบวนการบริหารพอร์ตที่ซับซ้อนขึ้น

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 7

- [28] C. Kesamoon and W. Witayakiattilerd. “Hierarchy Analysis Process under Fuzzy Environment: A Positive Way of Selecting Stocks into Portfolio under Ambiguity in Stock Information”. In: *Science & Technology Asia* 25.4 (2020), pp. 1–11. DOI: [10.14456/scitechasia.2019.24](https://doi.org/10.14456/scitechasia.2019.24).
- [30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.
- [33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: [10.2307/2975974](https://doi.org/10.2307/2975974).
- [68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

