คณิตศาสตร์การลงทุน และการบริหารพอร์ตการลงทุน

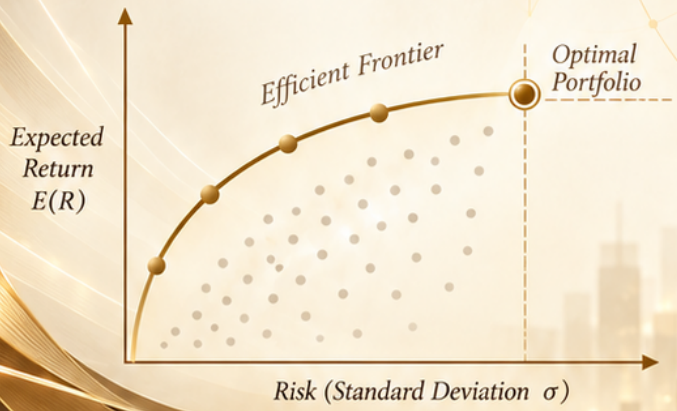
Mathematics of Investment and Portfolio Management

$$E(R_p) = w^T \mu$$

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

PORTFOLIO THEORY
ASSET ALLOCATION
RISK MANAGEMENT
QUANTITATIVE INVESTING





วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คณิตศาสตร์การลงทุน

และการบริหารพอร์ตการลงทุน

Mathematics of Investment and Portfolio Management

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2569

คณิตศาสตร์การลงทุนและการบริหารพอร์ตการลงทุน

Mathematics of Investment and Portfolio Management

ชื่อเรื่อง: คณิตศาสตร์การลงทุนและการบริหารพอร์ตการลงทุน
ผู้เขียน: รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ
สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ฉบับปรับปรุง: พ.ศ. 2569
สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

หมายเหตุสำหรับต้นฉบับทำงาน: ข้อความลิขสิทธิ์ เลข ISBN การพิมพ์ และเงื่อนไขการเผยแพร่ให้ปรับตามฉบับที่จะจัดพิมพ์จริง

คำอุทิศ

ขอน้อมอุทิศประโยชน์ทางวิชาการจากตำราเล่มนี้
แด่บิดามารดา ครูบาอาจารย์ ผู้มีพระคุณทุกท่าน
และผู้ใฝ่เรียนรู้ด้านคณิตศาสตร์ การเงิน และการลงทุน

คำนำ

ตำรา **คณิตศาสตร์การลงทุนและการบริหารพอร์ตการลงทุน** เรียบเรียงขึ้นจากการปรับโครงสร้างเอกสารประกอบการเรียนรายวิชา ส.247 ตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์ และจากเนื้อหาในตำราและงานวิจัยของผู้เขียนที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์การเงิน ทฤษฎีพอร์ต การวัดความเสี่ยง การประเมินผลการลงทุน และการทดสอบกลยุทธ์เชิงปริมาณ โดยมีเป้าหมายให้ผู้อ่านมองเห็นกระบวนการลงทุนเป็นระบบตั้งแต่ข้อมูล ผลตอบแทนและความเสี่ยง การประเมินมูลค่า การสร้างพอร์ต การหาค่าเหมาะที่สุด การจัดสรรสินทรัพย์ การบริหารความเสี่ยง ไปจนถึงการประเมินผลและการทดสอบกลยุทธ์กับข้อมูลจริง

ฉบับปรับปรุงนี้ยกระดับการนำเสนอจากเอกสารประกอบการสอนไปสู่ตำราที่เน้นเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ นิยาม ทฤษฎีบท การพิสูจน์ ตัวอย่างเชิงตัวเลข กรณีศึกษาตลาดทุนไทย และการประยุกต์ด้วยเครื่องมือคำนวณ โดยยังคงหลักการสำคัญของงานเดิมไว้ พร้อมจัดสัญลักษณ์และลำดับเนื้อหาใหม่ให้สอดคล้องกันทั้งเล่ม

โครงสร้างแบ่งเป็นห้าภาค ได้แก่ พื้นฐานคณิตศาสตร์การลงทุน การประเมินมูลค่าสินทรัพย์ ทฤษฎีพอร์ตและการกำหนดราคาสินทรัพย์ การสร้างและบริหารพอร์ตจริง และการประเมินผลกับการลงทุนเชิงปริมาณ พร้อมภาคผนวกทางคณิตศาสตร์ ความน่าจะเป็นและสถิติ ตารางสูตร และคำศัพท์ไทย–อังกฤษ

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ
สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
พ.ศ. 2569

สารบัญ

คำอุทิศ i

คำนำ iii

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ xxxvii

I พื้นฐานคณิตศาสตร์การลงทุน 1

1 ตลาดการเงิน สินทรัพย์ และกระบวนการลงทุน 3

1.1 บทนำ: จากเงินออมสู่การตัดสินใจลงทุน . . . 3

1.1.1 สินทรัพย์จริงและสินทรัพย์ทางการเงิน . . . 5

1.2 หน้าที่ทางเศรษฐกิจของตลาดการเงิน . . . 6

1.3 โครงสร้างตลาดการเงิน . . . 7

1.3.1 การเงินทางตรงและการเงินผ่านตัวกลาง . . . 7

1.3.2 ตลาดเงินและตลาดทุน . . . 8

1.3.3 ตลาดแรกและตลาดรอง . . . 8

1.3.4 ตลาดที่จัดตั้งอย่างเป็นทางการและตลาดนอกระบบ . . . 9

1.4 ประเภทของสินทรัพย์ทางการเงิน . . . 10

1.4.1 เงินสดและตราสารตลาดเงิน . . . 11

1.4.2 ตราสารทุน . . . 12

1.4.3 ตราสารหนี้ . . . 12

1.4.4 ตราสารอนุพันธ์ . . . 12

1.4.5 กองทุนรวม ETF และผลิตภัณฑ์ที่ให้สิทธิในพอร์ตสินทรัพย์ . . . 13

1.4.6 สินทรัพย์ดิจิทัลและสินทรัพย์ทางเลือก 14
1.5 ผู้มีส่วนร่วมในตลาดและโครงสร้างพื้นฐาน 14
1.5.1 บทบาทของ Hedger, Speculator และ Arbitrageur 15
1.6 ภาพรวมระบบตลาดการเงินไทย 16
1.7 ผลตอบแทน ความเสี่ยง และสภาพคล่อง: สามแกนของการลงทุน 17
1.7.1 การแลกเปลี่ยนระหว่างผลตอบแทนกับความเสี่ยง 18
1.7.2 สภาพคล่องและต้นทุนการซื้อขาย 18
1.8 ประเภทความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนควรรู้ก่อนสร้างพอร์ต 19
1.9 กระบวนการลงทุนและ Investment Policy Statement 20
1.9.1 องค์ประกอบหลักของ IPS 21
1.9.2 ความสามารถรับความเสี่ยงกับความเต็มใจรับความเสี่ยง 22
1.10 วงจรการบริหารพอร์ต: จากนโยบายสู่การประเมินผล 22
1.11 จากตลาดสู่การลงทุนเชิงปริมาณ 23
1.12 Investment Lab 1: สร้างแผนที่ตลาดและ IPS 24
1.13 แนวทางอ่านข้อมูลตลาดอย่างรับผิดชอบ 25
1.14 แผนที่เนื้อหาจากบทนี้สู่บทถัดไป 26
บทสรุปท้ายบท 27
คำศัพท์สำคัญ 27
แบบฝึกหัดท้ายบท 28
คำถามชวนคิด 29
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 1 29

2 คณิตศาสตร์ของผลตอบแทนการลงทุน 33
2.1 บทนำ: จากราคาไปสู่ผลตอบแทน 34
2.2 ผลตอบแทนหนึ่งงวดและองค์ประกอบของผลตอบแทน 35
2.2.1 ผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนธุรกรรม 36

2.3 Simple Return และ Log Return 38

2.3.1 Simple Return และ Wealth Relative 38

2.3.2 Log Return 38

2.4 ผลตอบแทนสะสม Holding-Period Return และการทำให้เป็นรายปี 40

2.4.1 Holding-Period Return 40

2.4.2 การทำให้เป็นรายปีแบบทบต้น 41

2.4.3 อัตราในนามและอัตราที่เป็นผล 42

2.5 อัตราผลตอบแทนในตลาดเงิน 42

2.5.1 Bank Discount Yield 43

2.5.2 Holding Period Yield 43

2.5.3 Money Market Yield 44

2.5.4 Effective Annual Yield 45

2.6 ค่าเฉลี่ยผลตอบแทนและผลของการทบต้น 46

2.6.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 46

2.6.2 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต 46

2.6.3 Volatility Drag 47

2.7 Money-Weighted Return, IRR และ Modified Dietz 48

2.7.1 Money-Weighted Return และ IRR 48

2.7.2 Modified Dietz Return 49

2.8 Time-Weighted Return 50

2.8.1 MWR กับ TWR ต่างกันอย่างไร 50

2.9 ผลตอบแทนจริง เงินเฟ้อ ค่าเงิน และผลตอบแทนสุทธิ 51

2.9.1 ผลตอบแทนจริงหลังเงินเฟ้อ 51

2.9.2 ผลตอบแทนของการลงทุนต่างประเทศและอัตราแลกเปลี่ยน 52

2.9.3 ค่าธรรมเนียม ภาษี และผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนได้รับจริง 53

2.10 ผลตอบแทนจากข้อมูลราคา: Corporate Actions และ Total Return 53

2.10.1 ราคาดิบ ราคาปรับ และเงินปันผล 53
2.10.2 Wealth Index และ Total-Return Index 54
2.11 การเตรียมข้อมูลราคาและสร้างเมทริกซ์ผลตอบแทน 54
2.11.1 การจัดแนววันซื้อขายและข้อมูลที่หายไป 55
2.11.2 เมทริกซ์ผลตอบแทน 55
2.12 การเลือกมาตรวัดผลตอบแทนให้เหมาะกับปัญหา 57
2.13 Investment Lab และ Workshop 58
บทสรุปท้ายบท 59
คำศัพท์สำคัญ 59
แบบฝึกหัดท้ายบท 60
คำถามชวนคิด 61
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 2 61

3 คณิตศาสตร์ของความเสี่ยงการลงทุน 63
3.1 บทนำ: ความเสี่ยงไม่ใช่ตัวเลขเดียว 64
3.2 ผลตอบแทนในฐานะตัวแปรสุ่ม 65
3.2.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง 67
3.2.2 การทำให้ความผันผวนเป็นรายปี 68
3.2.3 Coefficient of Variation และข้อจำกัด 69
3.2.4 Skewness และ Kurtosis 70
3.3 Covariance และ Correlation 70
3.3.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง 71
3.4 Downside Risk และ Lower Partial Moments 73
3.5 Beta และความเสี่ยงเชิงระบบ 75
3.6 Tracking Error 76
3.7 Maximum Drawdown และความเสี่ยงตามเส้นทาง 77

3.8 Value-at-Risk 78
3.8.1 Parametric Normal VaR 80
3.8.2 Historical Simulation 81
3.8.3 Holding Period และ Square-Root Scaling 82
3.9 Expected Shortfall หรือ Conditional Value-at-Risk 82
3.9.1 Normal Expected Shortfall 83
3.9.2 VaR กับ ES ตอบคำถามต่างกัน 84
3.9.3 คุณสมบัติของ Coherent Risk Measure 84
3.10 EWMA Volatility และความเสี่ยงที่เปลี่ยนตามเวลา 85
3.11 การตรวจสอบแบบจำลองความเสี่ยง 86
3.11.1 Violation Ratio 87
3.12 กรณีศึกษาจากงานวิจัย: VaR และ CVaR ของหุ้นธนาคารไทย 88
3.13 Data Risk, Estimation Risk และ Model Risk 90
3.13.1 Data Risk 90
3.13.2 Estimation Risk 90
3.13.3 Model Risk 90
3.14 การเลือกมาตรวัดความเสี่ยงให้เหมาะกับคำถาม 91
3.15 Investment Lab: Risk Measurement Pipeline 92
บทสรุปท้ายบท 93
คำศัพท์สำคัญ 94
แบบฝึกหัดท้ายบท 94
คำถามชวนคิด 95
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 3 96

II การประเมินมูลค่าสินทรัพย์ 97

4 การประเมินมูลค่าตราสารทุน 99

4.1 บทนำ: ราคาตลาดและมูลค่าที่ประเมินได้ . . . 99

4.2 กระแสเงินสดของผู้ถือหุ้นและตัวแปรพื้นฐาน . . . 101

4.2.1 EPS, DPS, Payout Ratio และ Retention Ratio . . . 102

4.2.2 ROE และ Sustainable Growth . . . 103

4.3 Corporate Actions และความต่อเนื่องของมูลค่า . . . 105

4.3.1 Stock Split . . . 105

4.4 แผนที่วิธีประเมินมูลค่าตราสารทุน . . . 106

4.5 Asset-Based Valuation . . . 107

4.5.1 Book Value per Share และ P/BV . . . 107

4.5.2 Net Asset Value . . . 108

4.6 Relative Valuation . . . 109

4.6.1 P/E และ Earnings Yield . . . 109

4.6.2 การเลือก Comparable Firms . . . 110

4.6.3 EV/EBITDA . . . 111

4.7 Dividend Discount Model . . . 112

4.7.1 Finite-Horizon DDM . . . 112

4.7.2 Infinite-Horizon DDM . . . 112

4.8 DDM กรณีสำคัญ . . . 113

4.8.1 Constant Dividend Perpetuity . . . 113

4.8.2 Gordon Growth Model . . . 114

4.9 Sensitivity ของ Gordon Model . . . 115

4.10 Multi-Stage Dividend Discount Model . . . 117

4.11 Fundamental P/E และ P/BV . . . 119

4.12 Free Cash Flow to Equity 120
4.12.1 Constant-Growth FCFE 121
4.12.2 DDM กับ FCFE ควรให้ผลสอดคล้องเมื่อใด 122
4.13 Residual Income Valuation 122
4.14 Required Return และ Valuation Consistency 124
4.15 Valuation under Uncertainty 125
4.15.1 Scenario Analysis 125
4.15.2 Margin of Safety 126
4.16 Valuation Reconciliation 127
4.17 งานวิจัยของผู้เขียน: จาก Financial Ratios สู่การคัดเลือกหุ้นหลายเกณฑ์ 128
4.18 Data Lineage และข้อผิดพลาดที่พบบ่อย 129
4.19 Investment Lab: Equity Valuation Engine 130
4.20 การเลือกวิธีประเมินให้เหมาะกับกิจการ 132
บทสรุปท้ายบท 132
คำศัพท์สำคัญ 133
แบบฝึกหัดท้ายบท 133
คำถามชวนคิด 134
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 4 135

5 คณิตศาสตร์ตราสารหนี้และความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย 137
5.1 บทนำ: ตราสารหนี้คือชุดกระแสเงินสดที่มีโครงสร้างเวลา 138
5.2 องค์ประกอบของตราสารหนี้และสัญลักษณ์ 139
5.3 ราคาตราสารหนี้จากมูลค่าปัจจุบัน 139
5.3.1 หลักมูลค่าปัจจุบันทั่วไป 139
5.3.2 ตราสารไม่มีคูปอง 140
5.3.3 ตราสารมีคูปอง 140

5.3.4 ความถี่การจ่ายคูปองและฐาน yield 141
5.4 Premium, Par และ Discount 142
5.5 Yield to Maturity 144
5.6 ราคาและ Yield: Monotonicity และ Convexity 145
5.7 Spot Rate, Discount Factor และ Bootstrap 146
5.7.1 Bootstrap 146
5.8 Forward Rate และ Term Structure 147
5.9 มูลค่าตามบัญชีและการตัดจ่าย Premium/Discount 148
5.10 ราคาตราสารระหว่างวันจ่ายคูปอง 149
5.11 Macaulay Duration 150
5.12 Modified Duration และ Price Sensitivity 152
5.13 Convexity 153
5.14 DV01 หรือ BPV 153
5.15 Key-Rate Duration และการเปลี่ยนรูปของ Yield Curve 154
5.16 Immunization 155
5.16.1 สองสินทรัพย์สำหรับภาระผูกพันหนึ่งก้อน 156
5.16.2 Convexity Condition 157
5.17 ความเสี่ยงของตราสารหนี้ที่ Duration ไม่ครอบคลุม 158
5.18 สะพานสู่งานวิจัย: Zero-Coupon Curve และ Stochastic Rates 159
5.19 Data Lineage และ Pricing Convention 159
5.20 Investment Lab: Fixed-Income Analytics 160
5.21 การเลือกมาตรวัดให้เหมาะกับปัญหา 162
บทสรุปท้ายบท 162
คำศัพท์สำคัญ 163
แบบฝึกหัดท้ายบท 164
คำถามชวนคิด 165

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 5 165

III ทฤษฎีพอร์ตและการกำหนดราคาสินทรัพย์ 167

6 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน 169

6.1 บทนำ: จากสินทรัพย์รายตัวสู่ระบบของพอร์ต 170

6.2 พอร์ตการลงทุนและน้ำหนักพอร์ต 171

6.3 ผลตอบแทนพอร์ตในหนึ่งช่วงเวลา 172

6.4 ผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ต 174

6.4.1 Scenario Representation 175

6.5 Covariance Matrix และความแปรปรวนของพอร์ต 176

6.5.1 เหตุใด Covariance Matrix ต้องเป็น Positive Semidefinite 177

6.6 พอร์ตสองสินทรัพย์และบทบาทของ Correlation 178

6.6.1 กรณี Correlation เท่ากับ 1 180

6.6.2 กรณี Correlation เท่ากับ 0 180

6.6.3 กรณี Correlation เท่ากับ -1 และพอร์ตความแปรปรวนศูนย์ 180

6.7 พอร์ตสามสินทรัพย์และพอร์ตหลายสินทรัพย์ 181

6.7.1 จำนวนพารามิเตอร์ของ Covariance Matrix 183

6.8 Diversification: กลไกทางคณิตศาสตร์ 183

6.8.1 Naive Diversification 183

6.8.2 Covariance-Aware Diversification 184

6.8.3 Equal-Weight/Common-Correlation Model 184

6.9 Marginal Risk และ Risk Contribution 185

6.10 International Diversification และ Currency Risk 187

6.11 การประมาณ Mean Vector และ Covariance Matrix จากข้อมูลจริง 188

6.11.1 Data Alignment 189

6.12 Estimation Risk และ Covariance Shrinkage 189
6.13 Correlation Stress Testing 190
6.14 Diversification Ratio 191
6.15 กรณีศึกษางานวิจัย: Correlation และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50 192
6.16 จาก Risk Aggregation สู่ Portfolio Optimization 192
6.17 Data Lineage และ Model Validation 194
6.18 Investment Lab: Portfolio Risk Engine 195
6.19 ข้อจำกัดของกรอบ Mean–Variance 196
บทสรุปท้ายบท 196
คำศัพท์สำคัญ 198
แบบฝึกหัดท้ายบท 198
คำถามชวนคิด 199
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 6 200

7 ทฤษฎีพอร์ตของ Markowitz 201

7.1 บทนำ: จากการวัดพอร์ตสู่การเลือกพอร์ต 201
7.2 Feasible Set, Opportunity Set และ Dominance 202
7.2.1 ข้อสมมติและขอบเขตของกรอบ Mean–Variance 204
7.3 Target-Return Minimum-Variance Problem 204
7.4 เหตุใด $\Delta \geq 0$ 206
7.5 Global Minimum Variance Portfolio 208
7.5.1 กรณีสองสินทรัพย์ 209
7.6 Minimum-Variance Frontier 210
7.7 ตัวอย่างเชิงตัวเลขสามสินทรัพย์ 212
7.8 Two-Fund Theorem สำหรับสินทรัพย์เสี่ยง 214
7.9 Utility และการเลือกพอร์ตของนักลงทุน 216

7.10 No Short-Selling และ Quadratic Programming . . . 217
7.10.1 KKT Conditions . . . 218
7.11 ข้อจำกัดเชิงปฏิบัติที่เปลี่ยน Efficient Frontier . . . 219
7.12 Estimation Error และความไม่เสถียรของ Optimal Weights . . . 220
7.13 Sensitivity ของ Optimal Weights . . . 221
7.14 แนวทางเพิ่ม Robustness . . . 223
7.15 In-Sample Frontier กับ Out-of-Sample Portfolio . . . 223
7.16 กรณีศึกษางานวิจัยของผู้เขียน . . . 224
7.17 สะพานสู่สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ CAPM . . . 225
7.18 Data Lineage และ Model Governance . . . 227
7.19 Investment Lab: Efficient Frontier และ Robustness . . . 227
7.20 ข้อจำกัดและการตีความอย่างรับผิดชอบ . . . 229
บทสรุปท้ายบท . . . 229
คำศัพท์สำคัญ . . . 230
แบบฝึกหัดท้ายบท . . . 231
คำถามชวนคิด . . . 232
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 7 . . . 233

8 ทฤษฎีตลาดทุนและแบบจำลองการกำหนดราคาสินทรัพย์ 235
8.1 บทนำ: จาก Portfolio Choice สู่ Asset Pricing . . . 236
8.2 ข้อสมมติของทฤษฎีตลาดทุนและ Efficient Market Hypothesis . . . 237
8.2.1 ข้อสมมติแบบคลาสสิกของ Capital Market Theory . . . 237
8.2.2 Efficient Market Hypothesis . . . 237
8.3 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ Capital Allocation Line . . . 238
8.4 Tangency Portfolio และ Maximum Sharpe Ratio . . . 240
8.5 Two-Fund Separation และการเลือก Complete Portfolio . . . 241

8.6 Market Portfolio และ Capital Market Line 242
8.7 จาก Tangency Condition สู่ CAPM 243
8.8 Systematic Risk และ Idiosyncratic Risk 244
8.9 Capital Market Line กับ Security Market Line 245
8.10 Market Model, Characteristic Line และการประมาณ Beta 246
8.11 Jensen's Alpha และความหมายของ Regression Intercept 247
8.12 CAPM Required Return และการประเมินมูลค่า 248
8.13 Arbitrage Pricing Theory และ Factor Pricing 249
8.13.1 แนวคิด No-Arbitrage ด้วย Factor-Neutral Portfolio 249
8.14 CAPM, Market Model, APT และ Empirical Factor Models 251
8.15 กรณีศึกษางานวิจัย: Beta และ Correlation ในหลักทรัพย์ SET50 252
8.16 Model Validation สำหรับ Asset Pricing 252
8.17 Investment Lab: CAPM และ Factor Model 254
8.18 ข้อจำกัดของ CAPM และ Factor Models 255
8.19 สะพานสู่ Portfolio Optimization 255
บทสรุปท้ายบท 256
คำศัพท์สำคัญ 257
แบบฝึกหัดท้ายบท 257
คำถามชวนคิด 259
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 8 259

IV การสร้างและบริหารพอร์ตจริง 261

9 การหาพอร์ตการลงทุนที่เหมาะสมที่สุด 263

9.1 บทนำ: จากทฤษฎีพอร์ตสู่การตัดสินใจเชิงคำนวณ 264
9.2 โครงสร้างของ Portfolio Optimization Problem 265

9.2.1 Convexity และเหตุใดจึงสำคัญ 266
9.3 Minimum-Variance Portfolio ภายใต้ข้อจำกัด 267
9.4 KKT Conditions และความหมายของ Active Constraints 267
9.5 Target-Return Portfolio และ Constrained Efficient Frontier 268
9.5.1 Feasibility ก่อน Optimization 270
9.6 Maximum-Sharpe Portfolio ภายใต้ข้อจำกัด 270
9.7 Maximum Diversification Portfolio 271
9.8 Risk Contribution และ Risk Parity 272
9.9 ข้อจำกัดที่พบในการบริหารพอร์ตจริง 274
9.9.1 Position Bounds 274
9.9.2 Group และ Sector Limits 274
9.9.3 Gross Exposure และ Leverage 274
9.9.4 Tracking Error Constraint 275
9.9.5 Turnover Constraint 275
9.10 Transaction Costs และการตัดสินใจจาก Holdings เดิม 276
9.11 Liquidity Constraints 277
9.12 Covariance Estimation, Shrinkage และ Conditioning 277
9.12.1 Condition Number 279
9.13 Estimation Risk และ Error Maximization 279
9.14 Black–Litterman: จาก Equilibrium สู่ Views 280
9.15 Robust Optimization 281
9.16 Solver Validation และ Numerical Diagnostics 282
9.16.1 Numerical Tolerance 283
9.17 ตัวอย่างเชิงคำนวณแบบครบวงจร 284
9.18 กรณีศึกษางานวิจัยและการเชื่อมสู่การใช้งาน 286
9.19 Out-of-Sample Portfolio Optimization 286

9.20 Investment Lab: จาก Spreadsheet สู่ Reproducible Optimizer 287
9.21 ข้อจำกัดและหลักการตีความอย่างรับผิดชอบ 289
บทสรุปท้ายบท 289
คำศัพท์สำคัญ 290
แบบฝึกหัดท้ายบท 291
คำถามชวนคิด 293
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 9 293

10 การจัดสรรสินทรัพย์และการปรับสมดุลพอร์ต 295
10.1 บทนำ: จาก Optimal Portfolio สู่ Policy Portfolio 295
10.2 Asset Allocation, Security Selection และ Market Timing 296
10.2.1 การตีความงาน Asset-Allocation Attribution 297
10.3 Integrated Asset Allocation 297
10.4 Strategic Asset Allocation 298
10.4.1 จาก IPS สู่ Strategic Policy 298
10.4.2 Policy Range 299
10.5 Tactical Asset Allocation 300
10.6 Dynamic และ Insured Asset Allocation 301
10.7 Model Portfolios และข้อจำกัดของ Risk Labels 301
10.8 Wealth Dynamics และน้ำหนักที่ Drift 302
10.9 Buy-and-Hold 303
10.10 Constant Mix 303
10.11 Constant-Proportion Portfolio Insurance 305
10.11.1 Gap Risk 306
10.12 เปรียบเทียบ Buy-and-Hold, Constant Mix และ CPPI 307
10.13 กฎการ Rebalancing 308

10.13.1 Calendar Rebalancing 308
10.13.2 Threshold Rebalancing 308
10.13.3 Hybrid Rebalancing 308
10.14 No-Trade Region และ Partial Rebalancing 309
10.15 Turnover และ Transaction Costs 309
10.16 Policy Deviation กับ Cost Trade-off 310
10.17 Core–Satellite Portfolio 311
10.18 จาก Target Weights สู่จำนวนเงินจริง 312
10.19 Liability-Aware Asset Allocation 313
10.20 Governance และ Policy Review 314
10.21 กรณีศึกษางานวิจัยและข้อควรระวัง 315
10.22 Investment Lab: Asset Allocation และ Rebalancing 315
10.23 การทดสอบแบบ Out-of-Sample 316
10.24 แผนที่จากบทนี้สู่บทที่ 11 317
บทสรุปท้ายบท 317
คำศัพท์สำคัญ 318
แบบฝึกหัดท้ายบท 319
คำถามชวนคิด 320
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 10 321

11 การบริหารความเสี่ยงของพอร์ต 323
11.1 บทนำ: จากการวัดความเสี่ยงสู่การควบคุมความเสี่ยง 323
11.2 Risk Appetite, Risk Capacity และ Risk Limits 325
11.3 Portfolio VaR 326
11.3.1 Delta-Normal VaR 326
11.4 Expected Shortfall 328

11.5 Historical Simulation 329
11.6 EWMA Covariance และ Conditional Risk 330
11.7 Marginal VaR และ Component VaR 332
11.8 Factor Risk Decomposition 333
11.9 Concentration Risk 334
11.10 Backtesting VaR 336
11.10.1 Exception Rate และ Violation Ratio 336
11.10.2 Kupiec Unconditional Coverage Test 337
11.10.3 Christoffersen Independence Test 337
11.11 Three-Zone และ Model Governance 338
11.12 Stress Testing 339
11.12.1 Historical Stress 339
11.12.2 Hypothetical Stress 340
11.12.3 Linear Stress Loss 340
11.12.4 Reverse Stress Testing 340
11.13 Correlation Stress และ Diversification Breakdown 341
11.14 Liquidity Risk 342
11.15 Drawdown Risk และ Path Dependence 342
11.16 การ Hedge ด้วย Index Futures 343
11.17 Minimum-Variance Hedge Ratio 344
11.18 Protective Put 345
11.19 Delta, Gamma และ Vega Limits 346
11.20 Basis Risk และ Hedge Effectiveness 347
11.21 Risk Dashboard และ Escalation 348
11.22 Model Risk และ Data Governance 349
11.23 Investment Lab: Portfolio Risk Engine 350

11.24 Rolling Validation และ Model Comparison 351
11.25 สะพานสู่การประเมินผลการบริหารพอร์ต 352
บทสรุปท้ายบท 352
คำศัพท์สำคัญ 353
แบบฝึกหัดท้ายบท 354
คำถามชวนคิด 355
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 11 355

V การประเมินผล ผลิตภัณฑ์ และการลงทุนเชิงปริมาณ 357

12 การวัดและประเมินผลการบริหารพอร์ต 359

12.1 กรอบการประเมินผลการบริหารพอร์ต 359
12.2 ผลตอบแทนพอร์ต TWR และ MWR 361
12.3 Benchmark, Active Return และ Tracking Error 362
12.4 Sharpe Ratio: ผลตอบแทนส่วนเกินต่อความเสี่ยงรวม 363
12.5 Treynor Ratio: ผลตอบแทนต่อความเสี่ยงเชิงระบบ 363
12.6 Jensen's Alpha และความไม่แน่นอนของ Alpha 364
12.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen 365
12.8 Appraisal Ratio และ Information Ratio 366
12.9 Sortino Ratio และ Downside Risk 367
12.10 M^2, Calmar และ RAROC 367
12.10.1 Modigliani–Modigliani Measure 367
12.10.2 Calmar Ratio 368
12.10.3 RAROC 368
12.11 แผนที่มาตรวัดกับชนิดความเสี่ยง 369
12.12 Performance Attribution 369

12.12.1 Allocation Effect 370
12.12.2 Selection Effect 370
12.12.3 Interaction Effect 370
12.13 Multi-Period Attribution และ Linking Problem 372
12.14 Rolling Performance และ Regime Stability 372
12.15 Out-of-Sample Validation และต้นทุนการลงทุน 373
12.16 Bootstrap Uncertainty และ Multiple Testing 374
12.17 กรณีศึกษาจากงานวิจัย: Robust Backtesting 374
12.18 Performance Dashboard และ Governance 375
12.19 Investment Labs 375
บทสรุปท้ายบท 376
คำศัพท์สำคัญ 377
แบบฝึกหัดท้ายบท 377
คำถามชวนคิด 379
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 12 379

13 กองทุนรวม ETF และการลงทุนแบบดัชนี 381

13.1 กองทุนรวมในฐานะ Portfolio Vehicle 382
13.2 โครงสร้างธรรมาภิบาลและการแยกหน้าที่ 383
13.3 กองทุนเปิด กองทุนปิด และ ETF 384
13.4 NAV ผลตอบแทน และกระแสเงินสด 386
13.5 ดัชนีคือ Rule-Based Portfolio 387
13.5.1 Price Index และ Total Return Index 388
13.6 Index Tracking เป็นปัญหา Optimization 388
13.7 Tracking Difference และ Tracking Error 389
13.8 ETF: Creation/Redemption และ Arbitrage Band 391

13.8.1 สภาพคล่องของ ETF มีหลายชั้น . . . 391
13.9 Leveraged และ Inverse ETF: Path Dependence . . . 392
13.10 ต้นทุน: จาก Gross Return สู่ Investor Return . . . 392
13.11 Active, Passive และ Smart Beta . . . 394
13.11.1 Smart Beta ในฐานะสะพานระหว่าง Passive และ Active . . . 394
13.12 Active Share และ Style Drift . . . 395
13.13 หลายกองทุนไม่ได้แปลว่ากระจายความเสี่ยง . . . 396
13.13.1 Effective Number of Funds . . . 396
13.14 Fund Due Diligence: จากผลตอบแทนสู่การตัดสินใจ . . . 396
13.14.1 Capacity . . . 397
13.15 DCA, Share Cost Averaging และ Lump Sum . . . 398
13.15.1 Dollar Cost Averaging . . . 398
13.15.2 Share Cost Averaging . . . 399
13.16 Market Timing และต้นทุนของการรอ . . . 399
13.17 Risk Map ของกองทุนและ ETF . . . 400
13.18 Fund Dashboard และ Investment Labs . . . 400
13.18.1 Investment Lab 1: NAV และ Total Return . . . 400
13.18.2 Investment Lab 2: Index Replication . . . 401
13.18.3 Investment Lab 3: ETF Premium/Discount . . . 401
13.18.4 Investment Lab 4: Fund Similarity . . . 401
13.18.5 Investment Lab 5: DCA vs Lump Sum . . . 401
13.19 ข้อจำกัดและหลักการตีความ . . . 401
13.20 บทสรุปท้ายบท . . . 402
13.21 แบบฝึกหัดท้ายบท . . . 403
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 13 . . . 405

14 การลงทุนเชิงปริมาณและการบริหารพอร์ตสมัยใหม่ 407

14.1 จากการเลือกหลักทรัพย์สู่การออกแบบระบบตัดสินใจ . . . 408

14.2 Point-in-Time Data และ Decision Clock . . . 409

14.3 Signal Engineering . . . 410

14.3.1 Winsorization และ Standardization . . . 410

14.3.2 Composite Signal . . . 410

14.3.3 Neutralization เป็น Orthogonal Projection . . . 411

14.3.4 Volatility Scaling และ Liquidity Gating . . . 411

14.4 Factor Signals . . . 412

14.5 Technical Signals ในฐานะ Filter Design . . . 413

14.6 Predictive Content: IC และ Rank IC . . . 415

14.7 จาก Signal สู่ Portfolio . . . 415

14.8 Portfolio of Alphas . . . 416

14.9 Transaction Costs, Market Impact และ Capacity . . . 417

14.10 Robust Backtesting . . . 419

14.10.1 Bias Checklist . . . 419

14.10.2 Walk-Forward Validation . . . 420

14.10.3 Multiple Testing . . . 421

14.11 Benchmark Symmetry . . . 421

14.12 Machine Learning: Prediction-to-Portfolio Gap . . . 422

14.12.1 โมเดลและบทบาท . . . 423

14.13 Reinforcement Learning และ Objective Alignment . . . 424

14.14 Model Governance และ Quant Research Gates . . . 424

14.14.1 Drift และ Kill Criteria . . . 425

14.15 Integrated Quant Research Architecture . . . 426

14.16 Investment Labs . . . 427

14.17 บทสรุปท้ายบท 428
14.18 แบบฝึกหัดท้ายบท 429
เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 14 430

VI ภาคผนวก 433

A เครื่องมือทางคณิตศาสตร์สำหรับการลงทุนและการบริหารพอร์ต 435

A.1 บทบาทของภาคผนวกนี้ 435
A.2 สัญกรณ์ผลรวมและผลคูณ 435
A.3 ลอการิทึมและผลตอบแทนแบบลอการิทึม 435
A.4 เวกเตอร์และเมทริกซ์ 436
A.5 Covariance Matrix และ Quadratic Form 436
A.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพอร์ต 437
A.7 ตัวคูณลากร็องจ์ 437
A.8 กรณีมีผลตอบแทนเป้าหมาย 438
A.9 Convexity และเหตุผลที่สำคัญต่อ Portfolio Optimization 438
A.10 Matrix Identities ที่ใช้บ่อย 439
A.11 สรุป 439

B ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับผลตอบแทนและความเสี่ยง 441

B.1 บทบาทของภาคผนวกนี้ 441
B.2 ตัวแปรสุ่มและค่าคาดหมาย 441
B.3 Variance และ Standard Deviation 441
B.4 Covariance และ Correlation 442
B.5 ความแปรปรวนของพอร์ต 442
B.6 Sample Mean, Sample Variance และ Sample Covariance 443

B.7 Normal Distribution 443
B.8 Lognormal Price Model 443
B.9 Skewness และ Kurtosis 444
B.10 Quantile 444
B.11 Value at Risk และ Expected Shortfall 444
B.12 Conditional Expectation 445
B.13 Law of Large Numbers และ Sampling Error 445
B.14 สรุป 445

C สูตรสำคัญสำหรับการลงทุนและการบริหารพอร์ต 447
C.1 แนวทางการใช้ 447
C.2 ผลตอบแทน 447
C.3 พอร์ตการลงทุน 448
C.4 Markowitz Portfolio 448
C.5 Tangency Portfolio 449
C.6 CAPM และ Beta 449
C.7 Performance Measures 449
C.8 Drawdown 450
C.9 Risk Measures 450
C.10 EWMA Volatility 451
C.11 Fixed Income Reference 451
C.12 Rebalancing และ Turnover 451
C.13 สูตรตรวจสอบหน่วย 452

D อภิธานศัพท์ สัญลักษณ์ และคำย่อ 453
D.1 บทนำ 453
D.2 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และการเงิน 453

D.3 คำย่อสำคัญ 454
D.4 ศัพท์ไทย–อังกฤษที่ใช้ตลอดเล่ม 455
D.5 หลักการใช้คำและสัญลักษณ์ 456
D.6 หมายเหตุสำหรับการอ่านร่วมกับบทหลัก 456

บรรณานุกรม **457**

ประวัติผู้แต่ง **465**

ดัชนี **467**

สารบัญรูป

1.1 แผนภาพแสดงความหมายของตลาดการเงิน โดยแยกทิศทางการเคลื่อนของเงินทุนออกจากทิศทางของสิทธิเรียกร้องและผลตอบแทน 4

1.2 มิติการจำแนกโครงสร้างตลาดการเงิน แต่ละแถวเป็นเกณฑ์คนละมิติและสามารถเกิดร่วมกันในธุรกรรมเดียวได้ 10

1.3 กรอบผลตอบแทน–ความเสี่ยง–สภาพคล่องสำหรับการตัดสินใจลงทุน โดยประเมินทั้งสามแกนภายใต้เป้าหมาย ข้อจำกัด ต้นทุน และระยะเวลาการลงทุน 17

1.4 วงจรการบริหารพอร์ตจากนโยบายสู่การดำเนินการ การติดตาม การประเมินผล และการทบทวนนโยบาย 23

1.5 แผนที่ความเชื่อมโยงจากฐานเชิงสถาบันในบทที่ 1 ไปสู่การวัดผล การประเมินมูลค่า และการบริหารพอร์ตในบทถัดไป 27

2.1 เส้นทางจากข้อมูลราคาและกระแสเงินสดสู่ชุดผลตอบแทนที่พร้อมใช้ในการวิเคราะห์ โดยแยกการทบต้น กระแสเงินสดภายนอก และการปรับฐานเศรษฐกิจออกจากกันอย่างชัดเจน 35

2.2 กระบวนการสร้างข้อมูลผลตอบแทนจากราคาดิบสู่เมทริกซ์ที่พร้อมใช้ โดยแทรกการตรวจเวลา corporate actions และ validation ก่อนเข้าสู่แบบจำลอง 56

3.1 แผนที่มาตรวัดความเสี่ยงตามคำถามที่ต้องการตอบ โดยแยก dispersion, dependence, downside, relative/path และ tail risk ออกจากกัน 65

3.2 ความสัมพันธ์เชิงแนวคิดระหว่าง Value-at-Risk และ Expected Shortfall ภายใต้ loss convention 79

3.3 วงจรจากข้อมูลสู่การตัดสินใจด้านความเสี่ยง โดยบังคับให้ risk estimate ผ่านการตรวจสอบก่อนนำไปใช้กำหนดสถานะหรือวงเงิน 87

4.1 กระบวนการประเมินมูลค่าจากข้อมูลและสมมติฐานสู่มูลค่าเปรียบเทียบราคา ก่อนแปลงเป็นการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน 101

4.2 ตระกูลหลักของการประเมินมูลค่าตราสารทุนและเงื่อนไขที่ทำให้แต่ละวิธีมีสาระทางเศรษฐกิจ . . . 106
4.3 กระบวนการ relative valuation ที่เริ่มจากความเทียบเคียงกันของกิจการก่อนคำนวณและตีความ multiples . . . 110
4.4 Scenario valuation เปลี่ยนหลายสมมติฐานอย่างสอดคล้องกันเพื่อแสดงช่วงมูลค่าและความเสี่ยงของการตัดสินใจ . . . 127

5.1 จากข้อกำหนดในสัญญาไปสู่ราคา ความไวต่ออัตราดอกเบี้ย และการบริหารพอร์ต . . . 138
5.2 แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารคูปองมาตรฐาน . . . 139
5.3 เส้นราคา–yield มีลักษณะลดลงและนูน ขณะที่ duration เป็นความชันเฉพาะที่ . . . 146
5.4 ตราสารหนี้มีความเสี่ยงหลายมิติซึ่งต้องใช้มาตรวัดมากกว่าหนึ่งประเภท . . . 158

6.1 โครงสร้างจากผลตอบแทนรายสินทรัพย์สู่ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต . . . 170
6.2 บทที่ 6 ทำหน้าที่เป็นสะพานจากการประมาณความเสี่ยงไปสู่ทฤษฎีพอร์ตและ optimization 193

7.1 โครงสร้างการเลือกพอร์ตในกรอบ mean–variance . . . 202
7.2 Minimum-variance frontier และ efficient branch . . . 211
7.3 การเพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงทำให้เส้นจัดสรรเงินทุน (Capital Allocation Line: CAL) สัมผัสเส้นขอบเขตประสิทธิภาพของสินทรัพย์เสี่ยง . . . 226

8.1 แผนที่ของบทจาก portfolio choice ไปสู่ equilibrium asset pricing . . . 236

9.1 วงจร Portfolio Optimization ตั้งแต่ข้อมูล การประมาณค่า การสร้างพอร์ต การนำไปใช้และการตรวจสอบนอกตัวอย่าง . . . 265

10.1 วงจรการจัดสรรสินทรัพย์จาก IPS และสมมติฐานตลาดสู่การดำเนินการ การติดตาม การปรับสมดุล และการทบทวนนโยบาย . . . 296

11.1 วงจรการบริหารความเสี่ยงของพอร์ตจากข้อมูลและสถานะจริงไปสู่การวัด การตรวจสอบการเทียบกับข้อจำกัด และการดำเนินการ . . . 324

11.2 Protective put สร้าง floor ของมูลค่าปลายงวดที่ K ก่อนหัก option premium และ financing cost 346

11.3 Risk dashboard ที่เชื่อมระดับความเสี่ยง ตัวขับความเสี่ยง stress สภาพคล่อง การตรวจสอบโมเดล และ action ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า 349

12.1 วงจรการวัด ประเมิน อธิบาย และตรวจสอบผลการบริหารพอร์ตก่อนนำไปใช้ตัดสินใจ . . 360

13.1 โครงสร้างสองตลาดของ ETF โดยแยกการซื้อขายหน่วยในตลาดรองออกจาก creation/redemption ในตลาดแรก 386

14.1 ระบบลงทุนเชิงปริมาณเชื่อมข้อมูล point-in-time ไปสู่ผลตอบแทนสุทธิและส่งผลการตรวจสอบกลับเข้าสู่วงจรวิจัย 408

14.2 Capacity เป็นจุดที่ผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนและข้อจำกัดลดลงถึงระดับ hurdle ที่กำหนด ไม่ใช่ค่าคงที่ที่แยกจาก AUM 419

สารบัญตาราง

1.1 กรอบวิเคราะห์สินทรัพย์จากสิทธิ กระแสเงินสด และบทบาทในพอร์ต 11

1.2 โครงสร้างพื้นฐานของตราสารอนุพันธ์ 13

1.3 ผู้มีส่วนร่วมสำคัญในระบบตลาดการเงิน 15

1.4 ประเภทความเสี่ยงสำคัญในการลงทุน 19

1.5 องค์ประกอบสำคัญของ Investment Policy Statement 21

2.1 เปรียบเทียบมาตรวัดผลตอบแทนตลาดเงิน 45

2.2 เปรียบเทียบ MWR และ TWR 50

2.3 แผนที่การเลือกมาตรวัดผลตอบแทน 57

3.1 เปรียบเทียบ VaR และ Expected Shortfall 84

3.2 ตัวอย่างค่าเฉลี่ยความเสี่ยงรายวันระดับ 99% จากกรณีศึกษาหุ้นธนาคารไทย ปี 2017–2021 89

3.3 แผนที่การเลือกมาตรวัดความเสี่ยง 92

4.1 เปรียบเทียบแนวทางประเมินมูลค่าตราสารทุน 107

4.2 Sensitivity ของ Gordon value เมื่อ $D_1 = 2$ บาท 116

4.3 คำถามสำหรับ Valuation Reconciliation 128

4.4 Checklist สำหรับ Valuation Data Lineage 129

4.5 แนวทางเลือกแบบจำลองประเมินมูลค่าตราสารทุน 132

5.1 สัญลักษณ์หลักที่ใช้ในบท 139

5.2 มิติความเสี่ยงสำคัญของตราสารหนี้ 158

5.3 Checklist สำหรับข้อมูลและ convention ของตราสารหนี้ 160

5.4 แผนที่การเลือกเครื่องมือวิเคราะห์ตราสารหนี้ 162

6.1 Checklist สำหรับ Portfolio Risk Model 194

7.1 ตัวอย่างจุดบน minimum-variance frontier 214
7.2 แนวทางลดความเปราะบางของ Mean–Variance Portfolio 223
7.3 Checklist สำหรับ Mean–Variance Portfolio Model 227
7.4 ข้อจำกัดสำคัญของ Mean–Variance Portfolio Selection 229

8.1 รูปแบบของ Efficient Market Hypothesis 238
8.2 เปรียบเทียบ Capital Market Line และ Security Market Line 245
8.3 เปรียบเทียบแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับผลตอบแทนและปัจจัยเสี่ยง 251
8.4 Asset-Pricing Model Validation Checklist 253

9.1 รายการตรวจสอบคำตอบของ Portfolio Optimizer 283
9.2 ความเสี่ยงของ Portfolio Optimization และแนวทางควบคุม 289

10.1 เปรียบเทียบกรอบ Asset Allocation 301
10.2 ตัวอย่าง normalized asset mix เพื่ออธิบายระดับความเสี่ยง 302
10.3 โครงสร้างเชิงพฤติกรรมของ Dynamic Allocation Rules 307
10.4 แยก Rebalancing ออกจาก Policy Review 314

11.1 ลำดับชั้นจากความสามารถรับความเสียหายสู่ข้อจำกัดที่ใช้ควบคุมพอร์ต 325

12.1 มาตรวัดผลการดำเนินงาน มิติความเสี่ยง และข้อควรระวังในการตีความ 369
12.2 ตัวอย่าง BHB attribution และการตรวจ reconciliation 371
12.3 โครงสร้าง Performance Dashboard ขั้นต่ำ 375

13.1 ผู้มีส่วนเกี่ยวข้องหลัก บทบาท และความเสี่ยงที่ควรตรวจ 384
13.2 เปรียบเทียบโครงสร้างกองทุนเปิด กองทุนปิด และ ETF 385
13.3 เปรียบเทียบ Market-Cap Index, Smart Beta และ Active Fund 394
13.4 แผนที่ความเสี่ยงของกองทุนและ ETF กับตัวชี้วัดที่ควรตรวจ 400

14.1 ตัวอย่าง factor signals และจุดที่ต้องตรวจสอบก่อนนำไปสร้างพอร์ต 413
14.2 ความลำเอียงสำคัญใน quantitative backtesting และวิธีควบคุม 420
14.3 บทบาทของโมเดล Machine Learning ในระบบลงทุนและความเสี่ยงที่ต้องควบคุม . . . 423

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ

สัญลักษณ์	ความหมาย
R_t	อัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ในงวดที่ t
R_p	อัตราผลตอบแทนของพอร์ต
R_f	อัตราผลตอบแทนปราศจากความเสี่ยง
μ_i	ค่าคาดหมายผลตอบแทนของสินทรัพย์ i
w	เวกเตอร์น้ำหนักพอร์ต
Σ	เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม
σ_p	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนพอร์ต
β_i	เบตาของสินทรัพย์ i
VaR	Value-at-Risk
ES/ CVaR	Expected Shortfall / Conditional Value-at-Risk
MDD	Maximum Drawdown
TWR	Time-Weighted Return
MWR	Money-Weighted Return
ETF	Exchange-Traded Fund
CAPM	Capital Asset Pricing Model
APT	Arbitrage Pricing Theory

Part I

พื้นฐานคณิตศาสตร์การลงทุน

บทที่ 1 ตลาดการเงิน สินทรัพย์ และกระบวนการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายบทบาทของตลาดการเงินในฐานะกลไกจัดสรรเงินทุน สร้างสภาพคล่อง ส่งผ่านข้อมูลราคา และกระจายความเสี่ยง
2. จำแนกโครงสร้างตลาดตามช่องทางระดมทุน อายุของตราสาร ขั้นตอนการออกหลักทรัพย์ และรูปแบบการซื้อขายได้อย่างถูกต้อง
3. วิเคราะห์สินทรัพย์ทางการเงินจากสิทธิทางกฎหมาย กระแสเงินสด แหล่งผลตอบแทน ความเสี่ยง สภาพคล่อง และบทบาทในพอร์ตได้
4. อธิบายบทบาทของผู้ออกตราสาร ผู้ลงทุน ตัวกลาง ตลาดซื้อขาย ระบบชำระราคา และหน่วยงานกำกับดูแล รวมทั้งผลต่อประสิทธิภาพของตลาด
5. ใช้กรอบผลตอบแทน–ความเสี่ยง–สภาพคล่องประกอบการคัดเลือกสินทรัพย์และออกแบบพอร์ตเบื้องต้นได้
6. จัดทำ *Investment Policy Statement* (IPS) ที่เชื่อมเป้าหมาย ข้อจำกัด การจัดสรรสินทรัพย์ benchmark และกฎการปรับสมดุลเข้าด้วยกันได้
7. ระบุแหล่งข้อมูล กำหนดนิยามตัวแปร ตรวจสอบคุณภาพข้อมูล และเตรียมข้อมูลก่อนนำไปวิเคราะห์เชิงปริมาณได้
8. เชื่อมโยงหลักการเชิงทฤษฎีกับการตัดสินใจลงทุนจริง โดยคำนึงถึงต้นทุนธุรกรรม ภาษี สภาพคล่อง ข้อกำกับ และความเสี่ยงของแบบจำลอง

1.1 บทนำ: จากเงินออมสู่การตัดสินใจลงทุน

ตลาดการเงินเป็นโครงสร้างพื้นฐานที่ทำให้เงินออมสามารถเปลี่ยนเป็นเงินทุนสำหรับการผลิต การลงทุน และการดำเนินนโยบายของภาครัฐ ขณะเดียวกันตลาดยังเปิดโอกาสให้ผู้มีส่วนร่วมแลกเปลี่ยนสิทธิในกระแสเงินสด โอนความเสี่ยง และปรับสถานะสภาพคล่องตามความต้องการ การศึกษาตลาดการเงินจึงมิใช่เพียงการจำแนกประเภทของตลาดหรือผลิตภัณฑ์ แต่เป็นการทำความเข้าใจว่า *สิทธิ กระแสเงินสด ราคา ข้อมูล และข้อจำกัดของตลาด* เชื่อมโยงกันอย่างไรจนกลายเป็นผลตอบแทนและความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนเผชิญจริง [35, 9]

ในมุมมองของการบริหารพอร์ต กระบวนการตัดสินใจที่มีประสิทธิภาพควรเริ่มจากคำถามว่า “เงินก้อนนี้มีไว้เพื่ออะไร ต้องใช้เมื่อใด และสามารถรับการขาดทุนได้เพียงใด” ก่อนที่จะถามว่า “ควรซื้อสินทรัพย์ใด” เพราะสินทรัพย์ชนิดเดียวกันอาจเหมาะกับผู้ลงทุนรายหนึ่งแต่ไม่เหมาะกับอีกรายหนึ่ง หากเป้าหมาย ระยะเวลา ภาระหนี้ ความต้องการสภาพคล่อง หรือข้อจำกัดทางภาษีแตกต่างกัน

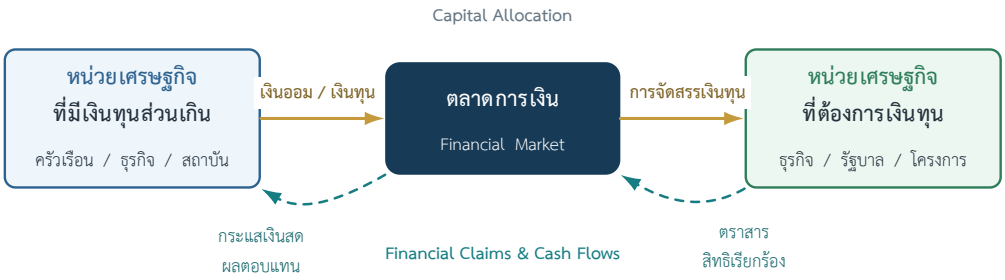
บทนิยาม 1.1

ตลาดการเงิน (financial market) หมายถึง ระบบหรือกลไกที่ทำให้ผู้มีเงินทุนส่วนเกิน ผู้ต้องการเงินทุน และผู้ที่ต้องการโอนหรือรับความเสี่ยงสามารถทำธุรกรรมผ่านสินทรัพย์หรือสัญญาทางการเงิน โดยราคา อัตราผลตอบแทน เงื่อนไขของสัญญา ข้อมูล และกฎของตลาดทำหน้าที่เป็นกลไกจัดสรรทรัพยากร

ในทางปฏิบัติ การวิเคราะห์ตลาดควรมองอย่างน้อยสี่ชั้นพร้อมกัน ได้แก่ **(1) สิทธิทางเศรษฐกิจและกฎหมาย** ว่าใครมีสิทธิในกระแสเงินสดก่อนหรือหลัง **(2) กลไกกำหนดราคา** ว่าราคาเกิดจากตลาดแบบใดและข้อมูลเข้าสู่ราคาอย่างไร **(3) ความสามารถในการซื้อขาย** ว่ามีสภาพคล่อง ต้นทุน และข้อจำกัดเพียงใด และ **(4) ความเหมาะสมต่อวัตถุประสงค์ของพอร์ต** ว่าสินทรัพย์นั้นช่วยสร้างรายได้ รักษาเงินต้น กระจายความเสี่ยง หรือป้องกันความเสี่ยงได้จริงหรือไม่

ข้อสังเกต

ราคา มูลค่า และความเหมาะสมเป็นคนละแนวคิด ราคาตลาด (*market price*) คือราคาที่ซื้อขายได้ ณ เวลาหนึ่ง มูลค่าที่ประเมิน (*estimated value*) ขึ้นกับสมมติฐานเกี่ยวกับกระแสเงินสดและอัตราคิดลด ส่วนความเหมาะสม (*suitability*) ขึ้นกับเป้าหมายและข้อจำกัดของผู้ลงทุน ดังนั้นสินทรัพย์ที่ “ราคาน่าสนใจ” อาจยังไม่เหมาะกับพอร์ตที่ต้องใช้เงินในระยะสั้นหรือรับ drawdown ได้ต่ำ



รูปที่ 1.1: แผนภาพแสดงความหมายของตลาดการเงิน โดยแยกทิศทางการเคลื่อนของเงินทุนออกจากทิศทางของสิทธิเรียกร้องและผลตอบแทน

แผนภาพในรูปที่ 1.1 ชี้ให้เห็นว่า “ตลาด” ไม่จำเป็นต้องหมายถึงสถานที่ซื้อขายทางกายภาพ แต่เป็นกลไกที่ทำให้เงินทุนเคลื่อนจากหน่วยเศรษฐกิจที่มีเงินออมไปยังหน่วยที่ต้องการเงินทุน ขณะที่สิทธิเรียกร้องและกระแสเงินสดเคลื่อนย้อนกลับมายังผู้ให้เงินทุน ในการใช้งานจริง กระบวนการดังกล่าวอาจเกิดผ่านตลาดโดยตรงหรือผ่านตัวกลางทางการเงิน ซึ่งมีต้นทุน ข้อมูล และความเสี่ยงแตกต่างกัน

1.1.1 สินทรัพย์จริงและสินทรัพย์ทางการเงิน

สินทรัพย์จริง (*real assets*) คือสินทรัพย์ที่มีบทบาทโดยตรงต่อกำลังการผลิตของระบบเศรษฐกิจ เช่น ที่ดิน อาคาร โรงงาน เครื่องจักร เทคโนโลยี และโครงสร้างพื้นฐาน ส่วนสินทรัพย์ทางการเงิน (*financial assets*) คือสิทธิเรียกร้องที่เกิดจากสัญญาหรือโครงสร้างทางกฎหมาย เช่น หุ้นสามัญ หุ้นกู้ พันธบัตร หน่วยลงทุน และสัญญาอนุพันธ์

ความแตกต่างนี้มีผลต่อการวิเคราะห์อย่างสำคัญ เพราะมูลค่าของสินทรัพย์ทางการเงินท้ายที่สุดเชื่อมโยงกับกระแสเงินสดที่เกิดจากสินทรัพย์จริงหรือความสามารถของผู้ออกในการสร้างรายได้และชำระภาระ ตัวอย่างเช่น โรงงานเป็นสินทรัพย์จริงที่ช่วยสร้างสินค้าและกำไร ขณะที่หุ้นของบริษัทเป็นสิทธิในกระแสเงินสดคงเหลือของกิจการ และหุ้นกู้เป็นสิทธิเรียกร้องตามสัญญาที่มีลำดับก่อนผู้ถือหุ้น

ดังนั้นก่อนประเมินมูลค่าสินทรัพย์ทางการเงิน ควรระบุให้ชัดเจนว่า **ผู้ลงทุนถือสิทธิอะไร กระแสเงินสดมาจากไหน ใครมีสิทธิก่อน และเหตุการณ์ใดทำให้กระแสเงินสดเปลี่ยน** กรอบนี้จะเป็นฐานสำคัญของบทการประเมินมูลค่าตราสารทุน ตราสารหนี้ และอนุพันธ์ในส่วนถัดไปของตำรา

ในเชิงงบดุล สินทรัพย์ทางการเงินของผู้ลงทุนมักสอดคล้องกับภาระหรือสิทธิส่วนทุนของผู้ออกตราสาร จึงควรวิเคราะห์ทั้งสองด้านพร้อมกัน เช่น ผู้ถือหุ้นกู้เห็น “coupon” เป็นรายรับ แต่บริษัทผู้ออกเห็นเป็นภาระชำระดอกเบี้ย ความสามารถในการสร้างกระแสเงินสดของกิจการจึงเป็นตัวเชื่อมระหว่างสินทรัพย์จริงกับมูลค่าของสิทธิทางการเงิน

คำถาม 4 ข้อก่อนวิเคราะห์สินทรัพย์

ก่อนคำนวณผลตอบแทนหรือมูลค่า ให้ตอบให้ได้ว่า **(1)** สิทธิของผู้ถือคืออะไร **(2)** กระแสเงินสดเกิดจากแหล่งใด **(3)** ความเสี่ยงใดทำให้กระแสเงินสดหรืออัตราคิดลดเปลี่ยน และ **(4)** หากต้องขายก่อนกำหนด จะขายที่ใดและมีต้นทุนเท่าใด กรอบนี้ช่วยป้องกันการมองผลิตภัณฑ์จากชื่อหรืออัตราผลตอบแทนที่โฆษณาเพียงอย่างเดียว

1.2 หน้าที่ทางเศรษฐกิจของตลาดการเงิน

ตลาดการเงินทำหน้าที่มากกว่าการเป็นสถานที่ซื้อขายหลักทรัพย์ หน้าที่แต่ละด้านส่งผลโดยตรงต่อประสิทธิภาพการระดมทุน ต้นทุนเงินทุน และคุณภาพของการตัดสินใจลงทุน ดังนี้

1. **การระดมและจัดสรรเงินทุน (capital formation and allocation)** เงินออมจากครัวเรือน กองทุน และสถาบันถูกส่งไปยังธุรกิจ ภาครัฐ และโครงการที่ต้องการเงินทุน หากกลไกการประเมินความเสี่ยงและราคาเหมาะสม เงินทุนมีแนวโน้มไหลไปยังโครงการที่ให้ผลตอบแทนต่อความเสี่ยงดีกว่า
2. **การสร้างสภาพคล่อง (liquidity creation)** ตลาดรองทำให้ผู้ลงทุนสามารถเปลี่ยนสินทรัพย์เป็นเงินสดโดยไม่ต้องรอให้ผู้ออกตราสารไถ่ถอน สภาพคล่องที่ดีช่วยลดผลตอบแทนชดเชยสภาพคล่องที่ผู้ลงทุนเรียกร้อง และอาจลดต้นทุนเงินทุนของผู้ออก
3. **การค้นพบราคา (price discovery)** คำสั่งซื้อขาย ข่าวสาร งบการเงิน อัตราดอกเบี้ย และความคาดหวังของผู้ลงทุนถูกสะท้อนผ่านราคา กระบวนการนี้ทำให้ราคากลายเป็นสัญญาณสำหรับการจัดสรรเงินทุน แม้ราคาอาจคลาดเคลื่อนจากมูลค่าพื้นฐานได้ในบางช่วง [19, 22]
4. **การโอนและแบ่งปันความเสี่ยง (risk transfer and risk sharing)** ผู้ประกอบการสามารถโอนความเสี่ยงบางส่วนผ่านประกันภัย ฟิวเจอร์ส ออปชัน หรือสวอป ขณะที่ผู้ลงทุนสามารถกระจายความเสี่ยงผ่านการถือสินทรัพย์หลายประเภท
5. **การสร้างข้อมูลและวินัยทางตลาด (information and market discipline)** ราคาตลาด credit spread อันดับเครดิต งบการเงิน และข้อมูลธุรกรรมช่วยให้ผู้ลงทุนประเมินคุณภาพของผู้ออกตราสารและติดตามการเปลี่ยนแปลงของความเสี่ยง
6. **การชำระราคาและการส่งมอบ (clearing and settlement)** โครงสร้างหลังการซื้อขายที่มีประสิทธิภาพช่วยลดความเสี่ยงคู่สัญญา ลดความผิดพลาดจากการส่งมอบ และเพิ่มความเชื่อมั่นต่อระบบตลาด
7. **การส่งผ่านนโยบายการเงินและเสถียรภาพระบบการเงิน** การเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยนโยบายส่งผ่านไปยังตลาดเงิน อัตราผลตอบแทนพันธบัตร ต้นทุนสินเชื่อ ราคาเงินทุน และอัตราแลกเปลี่ยน จึงมีผลต่อการลงทุนและกิจกรรมทางเศรษฐกิจจริง [5]

จากทฤษฎีสู่การใช้จริง

เมื่อตลาดมีสภาพคล่องสูงและกระบวนการค้นพบราคาทำงานดี ผู้ลงทุนสามารถใช้ราคาตลาดเป็นข้อมูลอ้างอิงได้มีประสิทธิภาพมากขึ้น แต่ไม่ได้หมายความว่าราคาจะ “ถูกต้อง” เสมอ การตัดสินใจจริงจึงต้องใช้ทั้งข้อมูลตลาด การประเมินมูลค่าพื้นฐาน การวัดความเสี่ยง และต้นทุนการซื้อขายร่วมกัน

หน้าที่เหล่านี้เชื่อมกันเป็นห่วงโซ่ทางเศรษฐกิจ ตัวอย่างเช่น **สภาพคล่องที่ดีขึ้น** อาจลด liquidity premium

ที่ผู้ลงทุนเรียกร้อง ทำให้ required return ลดลง ต้นทุนเงินทุนของผู้ออกลดลง และโครงการลงทุนบางโครงการมีความเป็นไปได้มากขึ้น ในทางกลับกัน เมื่อสภาพคล่องหายไปในภาวะวิกฤต required return และต้นทุนการระดมทุนอาจเพิ่มขึ้นพร้อมกัน จึงเห็นได้ว่ากลไกตลาดการเงินส่งผลย้อนกลับไปยังเศรษฐกิจจริง

1.3 โครงสร้างตลาดการเงิน

การจำแนกตลาดช่วยให้เข้าใจว่าเงินทุนเคลื่อนผ่านระบบอย่างไร ราคาเกิดขึ้นที่ใด และผู้ลงทุนต้องเผชิญกฎหรือต้นทุนประเภทใด การจำแนกหนึ่งไม่ควรแทนอีกการจำแนกหนึ่ง เพราะธุรกรรมเดียวอาจอยู่ในหลายมิติพร้อมกัน เช่น หุ้นกู้ระยะยาวที่ออกในตลาดแรกและภายหลังซื้อขายแบบ OTC ในตลาดรอง

1.3.1 การเงินทางตรงและการเงินผ่านตัวกลาง

การเงินทางตรง (direct finance) เกิดเมื่อหน่วยที่ต้องการเงินทุนออกตราสารให้ผู้ลงทุนถือสิทธิเรียกร้องโดยตรง เช่น หุ้น หุ้นกู้ หรือพันธบัตร จุดเด่นคือผู้ออกสามารถเข้าถึงเงินทุนจากตลาดโดยตรง แต่ต้องมีการเปิดเผยข้อมูลและรับภาระต้นทุนการออกตราสาร

การเงินผ่านตัวกลาง (intermediated finance) เกิดเมื่อสถาบันการเงินรวบรวมเงินจากผู้มีเงินออมและนำไปให้กู้หรือลงทุน เช่น ธนาคารรับเงินฝากแล้วปล่อยสินเชื่อ หรือกองทุนรวมรวบรวมเงินจากผู้ลงทุนแล้วสร้างพอร์ต ตัวกลางช่วยลดต้นทุนด้านข้อมูล การคัดกรอง และการติดตามผู้กู้ แต่ก่อให้เกิดความเสี่ยงของตัวกลางเอง เช่น credit risk, liquidity risk และ operational risk [35]

ในเชิงปฏิบัติ บริษัทที่กำลังเลือกแหล่งเงินทุนควรเปรียบเทียบ **ต้นทุนเงินทุนสุทธิ ความยืดหยุ่นของสัญญา ความเร็วในการระดมทุน ข้อกำหนดเปิดเผยข้อมูล และความเสี่ยง refinancing** ไม่ใช่เปรียบเทียบเพียงอัตราดอกเบี้ยที่เสนอ

ตัวอย่างเช่น เงินกู้ธนาคารอาจให้ความรวดเร็วและปรับ covenant ได้เป็นรายกรณี แต่ทำให้บริษัทพึ่งพาตัวกลางและเงื่อนไขสินเชื่อ ขณะที่การออกหุ้นกู้กระจายแหล่งเงินทุนไปยังผู้ลงทุนจำนวนมากได้ แต่อาจมีต้นทุนการออก การจัดอันดับเครดิต และภาระเปิดเผยข้อมูลเพิ่มขึ้น จึงไม่มีช่องทางใด “ดีกว่าเสมอ” โดยต้องประเมินให้สอดคล้องกับขนาดกิจการ อายุเงินทุน และความเสี่ยงของกระแสเงินสด

1.3.2 ตลาดเงินและตลาดทุน

บทนิยาม 1.2

ตลาดเงิน (money market) เป็นตลาดของตราสารและธุรกรรมระยะสั้นที่มีบทบาทสำคัญต่อการบริหารสภาพคล่องและการส่งผ่านนโยบายการเงิน โดยทั่วไปใช้เกณฑ์อายุไม่เกินหนึ่งปีเป็นแนวทางปฏิบัติ เช่น ตั๋วเงินคลัง ตราสารหนี้ระยะสั้น เงินกู้ระหว่างสถาบัน และธุรกรรมซื้อคืน

บทนิยาม 1.3

ตลาดทุน (capital market) เป็นระบบระดมทุนและซื้อขายสินทรัพย์ที่สนับสนุนเงินทุนระยะกลาง ระยะยาว หรือเงินทุนที่ไม่มีวันครบกำหนด เช่น หุ้นสามัญ พันธบัตร หุ้นกู้ และผลิตภัณฑ์ที่อ้างอิงสินทรัพย์ในตลาดทุน

เกณฑ์หนึ่งปีเป็นเพียง convention ที่ช่วยจำแนกตราสารหนี้ มิใช่เงื่อนไขที่ใช้อธิบายสินทรัพย์ทุกชนิด ในการจัดพอร์ตควรมองต่อไปถึง **duration, credit quality, liquidity และบทบาทของสินทรัพย์ต่อเป้าหมาย** เพราะตราสารอายุสั้นอาจมี credit risk สูง ขณะที่ตราสารอายุยาวของรัฐบาลอาจมี credit risk ต่ำแต่มี interest-rate risk สูง

ข้อเท็จจริงที่สำคัญคือ **อายุสั้นไม่ได้เท่ากับความเสี่ยงต่ำ** และ **อายุยาวไม่ได้เท่ากับความเสี่ยงสูงทุกด้าน** การจำแนก money/capital market บอกลักษณะของเงินทุนและอายุโดยประมาณ แต่การตัดสินใจลงทุนต้องแยกความเสี่ยงเครดิต ความไวต่ออัตราดอกเบี้ย ความสามารถในการขาย และความเสี่ยงจากการลงทุนต่อออกจากกัน

1.3.3 ตลาดแรกและตลาดรอง

ตลาดแรก (primary market) เป็นขั้นตอนที่หลักทรัพย์ถูกออกใหม่และเงินจากผู้ลงทุนไหลเข้าสู่ผู้ออก เช่น IPO การออกหุ้นเพิ่มทุน การเสนอขายหุ้นกู้ และการประมูลพันธบัตร ในขั้นนี้ประเด็นสำคัญคือการกำหนดราคาเสนอขาย การจัดจำหน่าย คุณภาพการเปิดเผยข้อมูล และความสามารถของผู้ออกในการเข้าถึงผู้ลงทุน

ตลาดรอง (secondary market) เป็นการซื้อขายหลักทรัพย์ที่ออกแล้วระหว่างผู้ลงทุน แม้เงินจากธุรกรรมจะไม่เข้าสู่ผู้ออกโดยตรง แต่ตลาดรองมีผลต่อผู้ออกผ่านสภาพคล่องและต้นทุนเงินทุน หากหลักทรัพย์ซื้อขายได้ง่ายและมี price discovery ที่ดี ผู้ลงทุนอาจยอมรับ expected return ที่ต่ำลงเมื่อเทียบกับสินทรัพย์ที่มีสภาพคล่องต่ำ ซึ่งท้ายที่สุดอาจช่วยลดต้นทุนระดมทุนในอนาคต

จึงไม่ควรมองตลาดรองว่าเป็นเพียงพื้นที่เก็งกำไร เพราะตลาดรองทำหน้าที่สร้าง **exit option** ให้ผู้ลงทุนและ

สร้างราคาอ้างอิงให้การออกหลักทรัพย์ครั้งถัดไป หากไม่มีตลาดรองที่เพียงพอ ผู้ลงทุนจะต้องถือสินทรัพย์นานขึ้น และอาจเรียกร้องผลตอบแทนชดเชยสภาพคล่องสูงขึ้นตั้งแต่ตลาดแรก

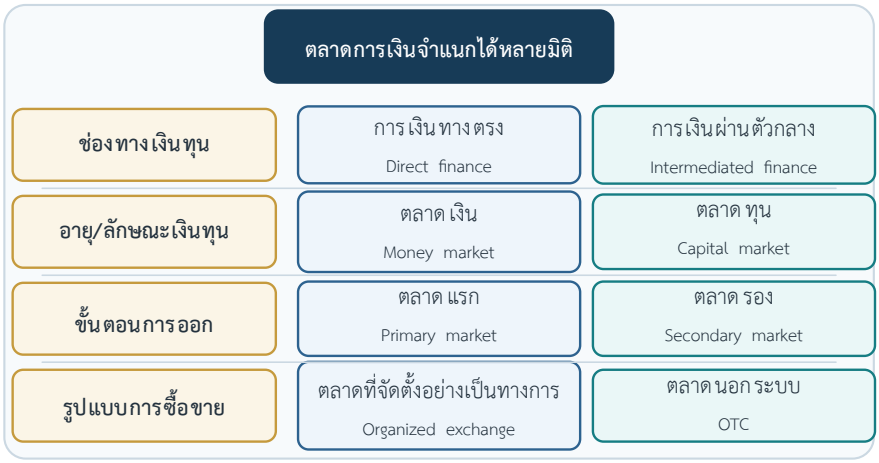
1.3.4 ตลาดที่จัดตั้งอย่างเป็นทางการและตลาดนอกระบบ

ตลาดที่จัดตั้งอย่างเป็นทางการ (organized exchange) มีกฎการซื้อขาย ระบบสมาชิก ระบบจับคู่คำสั่ง การกำกับดูแล และโครงสร้างพื้นฐานหลังการซื้อขายที่เป็นมาตรฐาน ตัวอย่างในประเทศไทย ได้แก่ SET, mai และ TFEX ภายใต้โครงสร้างของ SET Group [57]

ตลาดนอกระบบ (over-the-counter: OTC) เป็นตลาดที่คู่สัญญาหรือ dealer ทำธุรกรรมกันโดยตรงและสามารถปรับเงื่อนไขได้ยืดหยุ่นกว่า exchange ในตลาดตราสารหนี้ไทย ธุรกรรมตลาดรองส่วนใหญ่มีลักษณะ OTC และมีระบบรายงานธุรกรรมต่อ ThaiBMA [54]

ความแตกต่างนี้สำคัญต่อการบริหารความเสี่ยง เพราะธุรกรรม OTC อาจมีความยืดหยุ่นสูงแต่ต้องประเมิน counterparty risk, collateral, legal documentation และ exit liquidity มากขึ้น ขณะที่ exchange ลดความไม่แน่นอนบางส่วนด้วยมาตรฐานสัญญาและ clearing แต่ผู้ลงทุนต้องปฏิบัติตาม margin และข้อกำหนดของตลาด

ในมุม implementation การเลือกระหว่าง exchange กับ OTC จึงเป็นการแลกเปลี่ยนระหว่าง **มาตรฐานและสภาพคล่อง** กับ **ความยืดหยุ่นของเงื่อนไข** ตัวอย่างเช่น futures อาจซื้อขายและปิดสถานะได้สะดวก แต่ขนาดสัญญาและวันครบกำหนดอาจไม่ตรงกับ exposure จริง ขณะที่ forward ปรับ notional และ maturity ให้ตรงได้มากกว่า แต่เพิ่มภาระด้านเครดิตและเอกสารสัญญา



รูปที่ 1.2: มิติการจำแนกโครงสร้างตลาดการเงิน แต่ละแถวเป็นเกณฑ์คนละมิติและสามารถเกิดร่วมกันในธุรกรรมเดียวได้

รูปที่ 1.2 เป็นแผนที่เชิงสถาบันสำหรับอ่านธุรกรรม แต่การจำแนกเหล่านี้เป็นคนละมิติและอาจซ้อนกันได้ ตัวอย่างเช่น หุ้นกู้ระยะยาวเป็นสินทรัพย์ในตลาดทุน ออกครั้งแรกในตลาดแรก และหลังออกแล้วอาจซื้อขายในตลาดรองแบบ OTC ดังนั้นการวิเคราะห์ผลิตภัณฑ์จริงควรระบุให้ครบทั้งประเภทเงินทุน ขั้นตอนการออก และรูปแบบการซื้อขาย

1.4 ประเภทของสินทรัพย์ทางการเงิน

การจำแนกสินทรัพย์ให้มีประโยชน์ต่อการลงทุนจริงควรเริ่มจาก **สิทธิเรียกร้องและโครงสร้างกระแสเงินสด** ไม่ใช่จากชื่อผลิตภัณฑ์เพียงอย่างเดียว ตารางที่ 1.1 สรุปกรอบวิเคราะห์ที่ใช้ได้กับสินทรัพย์หลายประเภท

กรอบ 6 คำถามสำหรับคัดเลือกสินทรัพย์

เมื่อพบผลิตภัณฑ์ใหม่ ให้ถามตามลำดับว่า **สิทธิอะไร** → **กระแสเงินสดจากไหน** → **ผลตอบแทนมาจากอะไร** → **เสียหายได้จากอะไร** → **ขายออกได้อย่างไร** → **ช่วยพอร์ตในบทบาทใด** วิธีนี้ใช้ได้ทั้งกับหุ้น หุ้นกู้ ETF อนุพันธ์ และผลิตภัณฑ์ใหม่ที่ชื่อทางการตลาดแตกต่างกัน

ตารางที่ 1.1: กรอบวิเคราะห์สินทรัพย์จากสิทธิ กระแสเงินสด และบทบาทในพอร์ต

สินทรัพย์	สิทธิ/กระแสเงินสด	ความเสี่ยงเด่น	บทบาทเชิงพอร์ต
เงินสด/ตลาดเงิน	เงิน ต้น และ ดอกเบี้ย ระยะสั้น	เงินเฟ้อ เครดิต และ reinvestment	สภาพคล่อง เงินสำรอง และ พักเงิน
ตราสารหนี้	คูปอง และ เงิน ต้น ตาม สัญญา	ดอกเบี้ย เครดิต สภาพคล่อง	ราย ได้ กระจาย ความ เสี่ยง duration positioning
ตราสารทุน	สิทธิ คง เหลือ ใน กำไร และมูลค่ากิจการ	ธุรกิจ ตลาด valuation	การ เติบโต และ สร้าง ผล ตอบแทนระยะยาว
อนุพันธ์	payoff ตาม เงื่อนไข ของสัญญา	leverage, basis, counterparty, liquidity	hedge, tactical exposure, convexity
กองทุน/ETF	สิทธิในพอร์ตสินทรัพย์	underlying, tracking, liquidity, fee	diversification และ implementation
สินทรัพย์ทางเลือก	ขึ้น กับ โครงสร้าง สินทรัพย์/สัญญา	valuation, liquidity, operational	diversification, inflation exposure, alternative premia

1.4.1 เงินสดและตราสารตลาดเงิน

เงินสด เงินฝาก และตราสารตลาดเงินเป็นเครื่องมือพื้นฐานของการบริหารสภาพคล่อง การรักษาเงินสำหรับภาระใกล้ครบกำหนด และการพักเงินระหว่างรอจังหวะลงทุน ความผันผวนด้านราคามักต่ำกว่าสินทรัพย์ระยะยาว แต่ไม่ได้ปลอดความเสี่ยงโดยสมบูรณ์ เพราะยังมี inflation risk, credit risk, reinvestment risk และความเสี่ยงจากการเลือกสถาบันหรือคู่สัญญา

ในประเทศไทย ธนาคารแห่งประเทศไทยเผยแพร่ข้อมูลตลาดเงิน อัตราดอกเบี้ย และอัตราอ้างอิง เช่น THOR รวมทั้งข้อมูลตลาดการเงินที่ใช้เป็นฐานสำหรับการวิเคราะห์เชิงประจักษ์ [5, 6]

การใช้จริง: เงินสำรองฉุกเฉินและเงินที่จะใช้ในระยะสั้นไม่ควรถูกบังคับให้รับความเสี่ยงราคาสูงเพียงเพื่อเพิ่ม expected return เล็กน้อย การกำหนด liquidity bucket จึงเป็นส่วนหนึ่งของ asset allocation ไม่ใช่งานแยกจากการบริหารพอร์ต

1.4.2 ตราสารทุน

ตราสารทุน (*equity instruments*) แสดงสิทธิความเป็นเจ้าของในกิจการ ผู้ถือหุ้นสามัญมีสิทธิในกระแสเงินสดและสินทรัพย์คงเหลือหลังจากเจ้าหนี้และผู้มีสิทธิที่มีลำดับสูงกว่าได้รับชำระแล้ว ผลตอบแทนของหุ้นโดยทั่วไปมาจากเงินปันผลและการเปลี่ยนแปลงของราคา ซึ่งสะท้อนทั้งกำไรที่เกิดขึ้นจริงและความคาดหวังต่อกระแสเงินสดในอนาคต

ดังนั้น การวิเคราะห์หุ้นไม่ควรหยุดที่การคาดการณ์ราคา แต่ต้องเชื่อม **ความสามารถทำกำไร การเติบโต โครงสร้างเงินทุน คุณภาพกระแสเงินสด และ valuation** เข้ากับราคาที่ผู้ลงทุนจ่าย ในทางปฏิบัติหุ้นที่เป็นบริษัทดีอาจเป็นการลงทุนที่ไม่ดีหากราคาสูงเกินมูลค่าที่รองรับได้ และหุ้นที่ราคาต่ำก็ไม่จำเป็นต้อง “ถูก” หากคุณภาพกิจการกำลังเสื่อมลง

หุ้นบุริมสิทธิอาจมีลักษณะกึ่งกลางระหว่างตราสารทุนกับตราสารหนี้ในบางมิติ แต่สิทธิที่แท้จริงขึ้นอยู่กับข้อกำหนดของตราสาร จึงต้องอ่าน term sheet หรือเอกสารสิทธิ ไม่ควรอนุมานจากชื่อหลักทรัพย์เพียงอย่างเดียว

1.4.3 ตราสารหนี้

ตราสารหนี้ (*debt instruments*) เป็นสิทธิเรียกร้องตามสัญญาที่ผู้ออกมีหน้าที่ชำระกระแสเงินสดตามเงื่อนไข องค์ประกอบสำคัญ ได้แก่ มูลค่าที่ตราไว้ ราคาซื้อขาย อัตราคูปอง วันครบกำหนด ลำดับสิทธิ หลักประกัน covenant อันดับเครดิต และ embedded option

ในเชิงคณิตศาสตร์ ราคาตราสารหนี้เชื่อมโยงกับมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด แต่ในการลงทุนจริงต้องพิจารณาเพิ่มอย่างน้อยสามส่วน ได้แก่ **(1) risk-free term structure (2) credit spread** และ **(3) liquidity/option premium** เพราะ yield ที่สูงขึ้นอาจเป็นผลตอบแทนชดเชยความเสี่ยง ไม่ใช่ “โอกาสได้ดอกเบี้ยสูง” โดยไม่มีต้นทุน

1.4.4 ตราสารอนุพันธ์

ตราสารอนุพันธ์ (*derivatives*) เป็นสัญญาที่ payoff ขึ้นอยู่กับสินทรัพย์ ราคา ดัชนี อัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยน ความผันผวน หรือปัจจัยอ้างอิงอื่น ความสำคัญของอนุพันธ์อยู่ที่การแยกและถ่ายโอนองค์ประกอบความเสี่ยง เช่น การป้องกันความเสี่ยงค่าเงินโดยไม่ต้องขายสินทรัพย์ต่างประเทศ หรือการจำกัด downside ด้วย put option [24]

ตารางที่ 1.2: โครงสร้างพื้นฐานของตราสารอนุพันธ์

ประเภท	โครงสร้างสิทธิ/ภาระ	การใช้งานและข้อควรระวัง
Forward	ทั้งสองฝ่ายมีภาระซื้อขายตามเงื่อนไขในอนาคต	ล็อกราคา/FX ได้ตรงความต้องการ แต่ต้องประเมิน counterparty และ exit risk
Futures	สัญญามาตรฐานผ่านตลาด มี margin และ mark-to-market	hedge หรือสร้าง exposure ได้ มีประสิทธิภาพ แต่ต้องบริหาร basis และ margin liquidity
Option	ผู้ซื้อมีสิทธิแต่ไม่มีภาระใช้สิทธิ	จำกัด downside หรือสร้าง convex payoff แต่มี premium และความเสี่ยงจาก volatility/time decay
Swap	แลกเปลี่ยนกระแสเงินสดตามเงื่อนไข	ปรับโครงสร้างดอกเบี้ยหรือ FX ได้ยืดหยุ่น แต่ต้องพิจารณา collateral และ counterparty risk

หลักปฏิบัติ: ก่อนใช้อนุพันธ์ควรระบุความเสี่ยงต้นทางให้ชัดเจน เลือกสัญญาที่มี payoff สอดคล้องกับความเสี่ยง กำหนด hedge ratio และติดตาม basis risk ตลอดอายุของสถานะ การใช้อนุพันธ์โดยไม่กำหนด risk limit อาจเปลี่ยนเครื่องมือป้องกันความเสี่ยงให้กลายเป็นแหล่ง leverage โดยไม่ตั้งใจ

1.4.5 กองทุนรวม ETF และผลิตภัณฑ์ที่ให้สิทธิในพอร์ตสินทรัพย์

กองทุนรวม (*mutual fund*) ระดมเงินจากผู้ลงทุนหลายรายและนำไปลงทุนตามนโยบาย ผู้ลงทุนถือหน่วยลงทุนและมีสิทธิในมูลค่าสินทรัพย์สุทธิ (*net asset value: NAV*) ตามจำนวนหน่วย ส่วน ETF เป็นกองทุนที่หน่วยลงทุนซื้อขายในตลาดระหว่างวันและใช้กลไก creation–redemption เชื่อมราคาตลาดกับมูลค่าของสินทรัพย์อ้างอิง [56]

การวิเคราะห์ ETF ควรแยก **สภาพคล่องบนกระดาน** ออกจาก **สภาพคล่องของสินทรัพย์อ้างอิง** และพิจารณา bid–ask spread, tracking difference, tracking error, ค่าธรรมเนียม และโครงสร้าง index replication เพราะ ETF ที่มีปริมาณซื้อขายบนกระดานไม่มากอาจยังมีสภาพคล่องเชิงโครงสร้างดีหาก underlying liquid และ market maker ทำงานได้มีประสิทธิภาพ

ผลิตภัณฑ์ที่ให้สิทธิในสินทรัพย์ต่างประเทศ เช่น DR ช่วยให้ผู้ลงทุนเข้าถึงสินทรัพย์ต่างประเทศผ่านตลาดไทย

แต่ต้องเพิ่มการวิเคราะห์ FX exposure เวลาซื้อขายที่ไม่ตรงกัน corporate actions และความเสี่ยงเฉพาะของผู้ออกหรือโครงสร้างตราสาร

1.4.6 สินทรัพย์ดิจิทัลและสินทรัพย์ทางเลือก

สินทรัพย์ทางเลือกครอบคลุมสินทรัพย์ที่มีแหล่งผลตอบแทนและความเสี่ยงแตกต่างจากหุ้นและตราสารหนี้แบบดั้งเดิม เช่น อสังหาริมทรัพย์ โครงสร้างพื้นฐาน สินค้าโภคภัณฑ์ ทองคำ และกลยุทธ์ทางเลือก ประโยชน์เชิงพอร์ตขึ้นอยู่กับ correlation, liquidity, valuation และพฤติกรรมของสินทรัพย์ในภาวะวิกฤต ไม่ใช่เพียงป้ายกำกับว่าเป็น “alternative”

สินทรัพย์ดิจิทัลควรแยกวิเคราะห์ตามสิทธิทางกฎหมาย เทคโนโลยี custody กลไกซื้อขาย แหล่งสภาพคล่อง และกรอบกำกับดูแล ผู้ประกอบธุรกิจสินทรัพย์ดิจิทัลในประเทศไทยอยู่ภายใต้กรอบการอนุญาตและกำกับเฉพาะของ ก.ล.ต. [43] การลงทุนจึงต้องประเมินทั้ง market risk, custody/cyber risk, operational risk, legal risk และ liquidity fragmentation

1.5 ผู้มีส่วนร่วมในตลาดและโครงสร้างพื้นฐาน

ตลาดทำงานได้เพราะมีผู้มีส่วนร่วมหลายประเภทซึ่งมีแรงจูงใจและข้อจำกัดต่างกัน ความเข้าใจบทบาทเหล่านี้ช่วยให้ผู้ลงทุนตีความ order flow, liquidity และความเสี่ยงของธุรกรรมได้ดีขึ้น

ตารางที่ 1.3: ผู้มีส่วนร่วมสำคัญในระบบตลาดการเงิน

กลุ่ม	บทบาทหลัก	ประเด็นที่ผู้ลงทุนควรประเมิน
ผู้ออกหลักทรัพย์	ระดมทุนและกำหนดสิทธิเรียกร้อง	คุณภาพข้อมูล creditworthiness governance และ dilution
ผู้ลงทุนรายบุคคล	ออม ลงทุน และวางแผนเป้าหมาย	suitability, liquidity need, behavior และต้นทุน
นักลงทุนสถาบัน	บริหารเงินตาม mandate	benchmark, liquidity, risk budget, regulation
ธนาคาร/ตัวกลาง	รับฝาก ให้สินเชื่อ ทำตลาด และให้บริการ	credit, funding, operational และ conflicts of interest
Broker/ Dealer/ Market maker	ส่งคำสั่ง จัดหาสภาพคล่อง และกำหนด quote	spread, execution quality, inventory risk
ตลาดซื้อขาย	จับคู่คำสั่ง กำหนดกติกา และ surveillance	market design, tick size, trading halt, transparency
Clearing/Depository	ชำระราคา ส่งมอบ รับฝาก และทะเบียน	settlement, collateral, default waterfall, cyber risk
หน่วยงานกำกับ	คุ้มครองผู้ลงทุนและความเป็นธรรมของตลาด	regulatory change, disclosure, conduct standards

โครงสร้างพื้นฐานหลังการซื้อขายมีผลต่อความเสี่ยงอย่างมาก ตัวอย่างเช่น central counterparty (CCP) เข้ามาเป็นคู่สัญญากลางเพื่อลดความเสี่ยงที่คู่สัญญาต้นทางผิดนัด แต่ความเสี่ยงไม่ได้หายไปทั้งหมด เพราะถูกบริหารผ่าน margin, default fund, collateral และกฎการจัดการกรณีสมาชิกผิดนัด [57]

ข้อสังเกตเชิงตลาดคือชื่อของผู้มีส่วนร่วมไม่ได้กำหนดบทบาทตายตัว นักลงทุนสถาบันหนึ่งรายอาจเป็นผู้ลงทุนระยะยาวในธุรกรรมหนึ่ง เป็น hedger ในอีกธุรกรรม และเป็นผู้ให้สภาพคล่องในบางช่วงได้ การตีความ order flow จึงควรดู **แรงจูงใจ สถานะคงค้าง และข้อจำกัด** มากกว่าดูเพียงประเภทของผู้เล่น

1.5.1 บทบาทของ Hedger, Speculator และ Arbitrageur

Hedger ลดหรือควบคุมความเสี่ยงที่มีอยู่เดิม **Speculator** รับความเสี่ยงโดยตั้งใจเพื่อแสวงหาผลตอบแทน และ **Arbitrageur** พยายามใช้ประโยชน์จากราคาที่ไม่สอดคล้องกันของสินทรัพย์หรือสัญญาที่สัมพันธ์กัน บทบาททั้ง

สามสามารถเกิดในตลาดเดียวกันและช่วยกันสร้างสภาพคล่องกับ price discovery

อย่างไรก็ดี “arbitrage” ในแบบจำลองมักสมมติว่าซื้อขายได้ทันที ไม่มีต้นทุน และสามารถ short/borrow ได้ ในโลกจริงโอกาสที่ดูเหมือน arbitrage อาจหายไปเมื่อรวม bid–ask spread, brokerage fee, funding cost, margin, short-sale constraint, latency และ model risk [22, 23] ดังนั้นควรแยก **theoretical arbitrage** ออกจาก **implementable arbitrage**

1.6 ภาพรวมระบบตลาดการเงินไทย

ระบบตลาดการเงินไทยเชื่อมโยงตลาดเงิน ตลาดอัตราแลกเปลี่ยน ตลาดตราสารหนี้ ตลาดตราสารทุน ตลาดอนุพันธ์ และธุรกิจสินทรัพย์ดิจิทัลเข้าด้วยกัน ธนาคารแห่งประเทศไทยมีบทบาทสำคัญด้านนโยบายการเงิน ตลาดเงิน อัตราแลกเปลี่ยน ระบบการชำระเงิน และเสถียรภาพระบบการเงิน ขณะที่สำนักงาน ก.ล.ต. กำกับตลาดทุน ธุรกิจหลักทรัพย์ ธุรกิจสัญญาซื้อขายล่วงหน้า และธุรกิจสินทรัพย์ดิจิทัลตามกฎหมายที่เกี่ยวข้อง SET Group ให้บริการโครงสร้างพื้นฐานการซื้อขายและหลังการซื้อขายหลายส่วน ส่วน ThaiBMA เป็นองค์กรและแหล่งข้อมูลสำคัญของตลาดตราสารหนี้ [5, 57, 54, 47, 43]

แผนที่ข้อมูลสำหรับผู้ลงทุนไทย

สำหรับการใช้งานจริงควรเลือกแหล่งข้อมูลตามประเภทคำถาม: อัตราดอกเบี้ยและตลาดเงินใช้ข้อมูล ธปท.; ราคาหุ้น ดัชนี ETF และข้อมูลการซื้อขายใช้ SET; yield, bond reference price และข้อมูลตราสารหนี้ใช้ ThaiBMA; กฎเกณฑ์ ใบอนุญาต และข้อมูลกำกับใช้ ก.ล.ต. การใช้ข้อมูลจากหลายแหล่งต้องตรวจวันที่ เวลา หน่วย และนิยามให้สอดคล้องก่อนรวมชุดข้อมูล

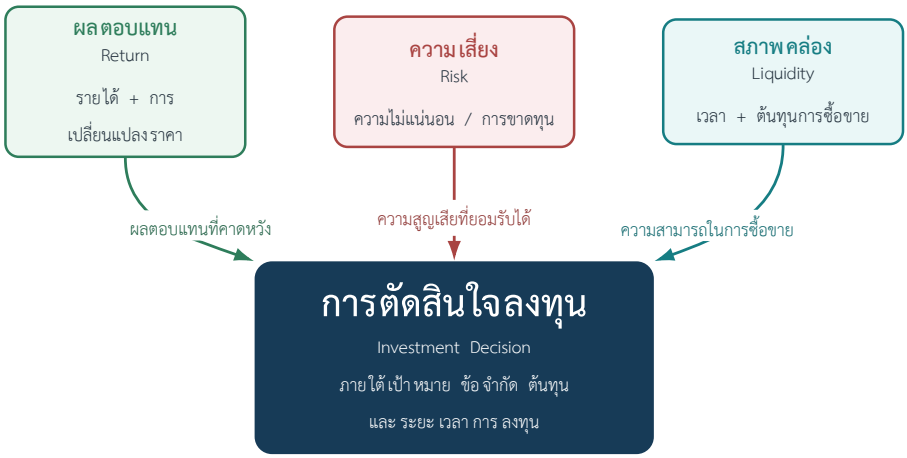
ข้อสังเกต

ตัวเลขจำนวนหลักทรัพย์ มูลค่าตลาด ปริมาณซื้อขาย อัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยน และอัตราผลตอบแทนพันธบัตรเปลี่ยนแปลงตามเวลา ตัวเลขที่ใช้ในงานวิเคราะห์จึงต้องมี **as-of date** แหล่งข้อมูล และวิธีดึงข้อมูลอย่างชัดเจน เพื่อให้ตรวจสอบและทำซ้ำได้

ในการใช้ข้อมูลไทยร่วมกันควรระวังว่า “วันที่เดียวกัน” อาจไม่ใช่เวลาสังเกตเดียวกัน เช่น yield อ้างอิงสิ้นวัน ราคาปิดหุ้น และอัตราแลกเปลี่ยนอาจมี timestamp หรือวิธีคำนวณต่างกัน หากนำมารวมโดยไม่ตรวจ metadata ความสัมพันธ์เชิงสถิติอาจสะท้อนความคลาดเคลื่อนของเวลาแทนความสัมพันธ์ทางเศรษฐกิจ

1.7 ผลตอบแทน ความเสี่ยง และสภาพคล่อง: สามแกนของการลงทุน

การคัดเลือกสินทรัพย์ไม่ควรตัดสินจากผลตอบแทนคาดหวังเพียงตัวเดียว แต่ควรพิจารณาอย่างน้อยสามแกน ได้แก่ **ผลตอบแทน (return) ความเสี่ยง (risk)** และ **สภาพคล่อง (liquidity)** เพราะสินทรัพย์ที่ให้ expected return สูงอาจมี tail risk หรือขายออกได้ยากในช่วงที่ผู้ลงทุนต้องการเงินมากที่สุด



รูปที่ 1.3: กรอบผลตอบแทน–ความเสี่ยง–สภาพคล่องสำหรับการตัดสินใจลงทุน โดยประเมินทั้งสามแกนภายใต้เป้าหมาย ข้อจำกัด ต้นทุน และระยะเวลาการลงทุน

รูปที่ 1.3 เน้นว่าไม่มีแกนใดควรถูกประเมินแยกจากกัน ผลตอบแทนที่สูงขึ้นอาจมาพร้อมความเสี่ยงหรือข้อจำกัดด้านสภาพคล่อง ขณะที่สินทรัพย์ที่มีความผันผวนต่ำอาจยังมีความเสี่ยงเครดิตหรือความเสี่ยงสภาพคล่องสูง การคัดเลือกสินทรัพย์จึงต้องพิจารณาทั้งสามแกนภายใต้เป้าหมายและข้อจำกัดของผู้ลงทุน

ตัวอย่างเชิงปฏิบัติ หากสินทรัพย์ A ให้ expected return สูงกว่า B เพียงเล็กน้อย แต่มี bid–ask spread กว้างกว่า ต้องใช้เวลาหลายวันในการขาย และมี drawdown สูงกว่า การเลือก A จาก expected return เพียงตัวเดียวอาจไม่เพิ่มประโยชน์ต่อผู้ลงทุนจริง โดยเฉพาะเมื่อพอร์ตมีภาระใช้เงินแน่นอน การเปรียบเทียบจึงควรใช้ **ผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนและความเสี่ยงที่สอดคล้องกับ horizon**

ให้ P_0 เป็นราคาเริ่มต้น P_1 เป็นราคาปลายงวด และ CF_1 เป็นกระแสเงินสดระหว่างงวด ผลตอบแทนพื้นฐานเขียนได้อย่างกระชับเป็น $R = (P_1 - P_0 + CF_1)/P_0$ หากรวมต้นทุนธุรกรรม C_{tr} ผลตอบแทนสุทธิคือ $R_{\text{net}} = (P_1 - P_0 + CF_1 - C_{\text{tr}})/P_0$ และความมั่งคั่งปลายงวดเป็น $W_1 = W_0(1 + R_{\text{net}})$

ภาพรวมผลตอบแทนหนึ่งงวด

$$R = \frac{P_1 - P_0 + CF_1}{P_0},$$
$$R_{\text{net}} = \frac{P_1 - P_0 + CF_1 - C_{\text{tr}}}{P_0},$$
$$W_1 = W_0(1 + R_{\text{net}})$$

เหตุผลที่ต้องใช้ผลตอบแทนสุทธิ

กลยุทธ์ที่มีผลตอบแทนก่อนต้นทุนสูงกว่าไม่ได้แปลว่าจะสร้างความมั่งคั่งได้มากกว่า หาก turnover สูง และเสีย spread, fee, market impact หรือภาษีมาก การประเมินกลยุทธ์เชิงปฏิบัติจึงต้องทำบน *net implementable return* ไม่ใช่ผลตอบแทนจากราคาปิดในแบบจำลองเพียงอย่างเดียว

บทที่ 2 จะพัฒนาคณิตศาสตร์ของผลตอบแทนอย่างเป็นระบบ ส่วนบทด้านความเสี่ยงจะพัฒนาความแปรปรวน covariance, downside risk, Value-at-Risk และ Expected Shortfall ก่อนนำทั้งสองด้านไปใช้ในการสร้างพอร์ต

1.7.1 การแลกเปลี่ยนระหว่างผลตอบแทนกับความเสี่ยง

หลัก risk–return trade-off ระบุว่าโดยทั่วไปผู้ลงทุนต้องการ expected return สูงขึ้นเพื่อชดเชยการรับความเสี่ยงที่เพิ่มขึ้น แต่ความสัมพันธ์นี้เป็น **ex ante compensation** ไม่ใช่คำรับประกันผลตอบแทน ex post สินทรัพย์ที่เสี่ยงกว่าสามารถให้ผลตอบแทนจริงต่ำกว่าในช่วงใดช่วงหนึ่งได้

ประเด็นสำคัญของการบริหารพอร์ตคือความเสี่ยงบางส่วนสามารถลดได้ด้วยการกระจายการลงทุน หากผลตอบแทนของสินทรัพย์ไม่เคลื่อนไหวพร้อมกันอย่างสมบูรณ์ แนวคิดนี้เป็นรากฐานของทฤษฎีพอร์ตสมัยใหม่ [33] ดังนั้นการประเมินสินทรัพย์ควรถามทั้ง “สินทรัพย์นี้เสี่ยงเพียงใด” และ “สินทรัพย์นี้เปลี่ยนความเสี่ยงของพอร์ตอย่างไร”

1.7.2 สภาพคล่องและต้นทุนการซื้อขาย

สภาพคล่องคือความสามารถในการซื้อหรือขายสินทรัพย์ในขนาดที่ต้องการอย่างรวดเร็ว โดยไม่ต้องยอมรับราคาที่เสียเปรียบมากเกินไป ตัวชี้วัดที่ใช้จริง ได้แก่ bid–ask spread, trading volume, turnover, market depth และ price impact [1, 23]

สภาพคล่องเป็นตัวแปรที่เปลี่ยนตามภาวะตลาด สินทรัพย์ที่ดู liquid ในภาวะปกติอาจมี spread กว้างขึ้นหรือ depth หายไปในช่วงวิกฤต ดังนั้น portfolio liquidity ควรถูกทดสอบภายใต้ stress scenario ไม่ใช่ประเมินจากค่าเฉลี่ยในอดีตเท่านั้น

1.8 ประเภทความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนควรรู้ก่อนสร้างพอร์ต

ความเสี่ยงในบทนี้หมายถึง **แหล่งที่ทำให้ผลลัพธ์จริงเบี่ยงเบนจากสิ่งที่คาดหวัง** ซึ่งแตกต่างจากมาตรวัดความเสี่ยงเชิงสถิติที่จะพัฒนาในบทถัดไป การแยก “แหล่งความเสี่ยง” ออกจาก “ตัวเลขวัดความเสี่ยง” ช่วยป้องกันการตีความผิด เช่น volatility ต่ำไม่ได้หมายความว่า credit risk หรือ liquidity risk ต่ำเสมอ

ตารางที่ 1.4: ประเภทความเสี่ยงสำคัญในการลงทุน

ความเสี่ยง	กลไก	แนวทางเชิงปฏิบัติ
Market risk	ราคาเปลี่ยนจากปัจจัยตลาด	diversification, hedge, position limit, stress test
Interest-rate risk	มูลค่าเปลี่ยนตาม yield curve	duration/convexity management, ladder, swap/futures
Credit risk	default probability หรือ spread เปลี่ยน	credit analysis, diversification, limit, collateral
Liquidity risk	ขายไม่ได้หรือ price impact สูง	liquidity bucket, size limit, stress haircut
FX risk	ค่าเงินฐานเปลี่ยน	natural hedge, forward/futures, hedge ratio
Inflation risk	กำลังซื้อของผลตอบแทนลดลง	real-return target, inflation-sensitive assets
Reinvestment risk	กระแสเงินสดลงทุนต่อได้ที่อัตราต่ำลง	cash-flow matching, duration design
Counterparty risk	คู่สัญญาไม่ปฏิบัติตามสัญญา	collateral, netting, counterparty limit, CCP

มีต่อหน้าถัดไป

ตารางที่ 1.4 ประเภทความเสี่ยงสำคัญในการลงทุน (ต่อ)

ความเสี่ยง	กลไก	แนวทางเชิงปฏิบัติ
Operational/Cyber risk	ระบบ บุคลากร หรือกระบวนการล้มเหลว	controls, segregation, backup, incident response
Model/Data risk	แบบจำลองหรือข้อมูลไม่สะท้อนความจริง	validation, out-of-sample test, data lineage
Regulatory risk	กฎเปลี่ยนและกระทบธุรกรรม	compliance review, scenario analysis
Behavioral risk	การตัดสินใจเบี่ยงเบนจากนโยบาย	pre-commitment, IPS, review process

ในทางปฏิบัติความเสี่ยงมักเชื่อมโยงกัน เช่น การปรับอันดับเครดิตอาจทำให้ราคาตราสารลดลงพร้อมกับสภาพคล่องแย่ลง หรือการเพิ่ม margin ในช่วงความผันผวนสูงอาจทำให้ผู้ลงทุนต้องขายสินทรัพย์เพื่อหาเงินสด จึงควรหลีกเลี่ยงการบริหารความเสี่ยงแบบแยกส่วนโดยไม่พิจารณา interaction และ feedback effect

ตัวอย่างของ **risk amplification** คืออัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นทำให้ราคาสินทรัพย์ลดลง → มูลค่าหลักประกันลดลง → เกิด margin call → ผู้ลงทุนขายสินทรัพย์เพื่อหาเงินสด → market depth ลดลงและ price impact สูงขึ้น ลำดับนี้แสดงว่าความเสี่ยงตลาด สภาพคล่อง และ funding risk สามารถเสริมกันได้ แม้แต่ละความเสี่ยงดูบริหารได้เมื่อพิจารณาแยกกัน

1.9 กระบวนการลงทุนและ Investment Policy Statement

การลงทุนอย่างเป็นระบบควรเริ่มจากเป้าหมายและข้อจำกัด ไม่ใช่จากการเลือกหลักทรัพย์รายตัว *Investment Policy Statement* ทำหน้าที่เปลี่ยนความต้องการของผู้ลงทุนให้เป็นกติกาที่สามารถนำไปสร้างและติดตามพอร์ตได้

บทนิยาม 1.4

Investment Policy Statement (IPS) คือ เอกสารที่กำหนดวัตถุประสงค์การลงทุน risk capacity, risk willingness, time horizon, liquidity requirement, tax, legal/specific constraints, strategic asset allocation, benchmark, rebalancing rule และกระบวนการติดตามทบทวน เพื่อให้การบริหารพอร์ตสอดคล้องกับเป้าหมายและตรวจสอบได้

IPS ที่ดีไม่ใช่เอกสารเชิงพิธีการ แต่เป็น **decision rule** ที่ช่วยลดการตัดสินใจตามอารมณ์เมื่อเกิดเหตุการณ์ตลาดรุนแรง ตัวอย่างเช่น หากกำหนดกรอบหุ้นไว้ร้อยละ 40–60 และใช้ threshold rebalancing เมื่อเบี่ยงเบนเกิน 5 จุดร้อยละ ผู้บริหารพอร์ตจะมีหลักปฏิบัติที่ชัดเจนกว่าการตัดสินใจจากความรู้สึกว่าตลาด “ขึ้นมากไป” หรือ “ลงมากไป”

การตัดสินใจใน IPS ควรมีลำดับชั้นชัดเจน โดย **ข้อจำกัดที่บังคับได้จริง** เช่น สภาพคล่อง กฎหมาย และภาระหนี้ ต้องมาก่อน **เป้าหมายผลตอบแทน** และ **มุมมองตลาดระยะสั้น** หาก tactical view ขัดกับข้อจำกัดของ IPS ควรยึด IPS เว้นแต่มีเหตุผลเพียงพอที่จะทบทวนนโยบายอย่างเป็นทางการ

1.9.1 องค์ประกอบหลักของ IPS

ตารางที่ 1.5: องค์ประกอบสำคัญของ Investment Policy Statement

องค์ประกอบ	คำถามหลัก	ผลต่อพอร์ต
Objective	เงินมีไว้เพื่ออะไร และต้องการ real/nominal return เท่าใด	กำหนด return target
Risk capacity	ขาดทุนได้มากเพียงใดโดยไม่กระทบเป้าหมาย	กำหนดเพดานความเสี่ยง
Risk willingness	ยอมรับความผันผวนและ drawdown ได้เพียงใด	ป้องกัน behavior mismatch
Time horizon	ต้องใช้เงินเมื่อใด	กำหนด maturity และ growth exposure
Liquidity	ต้องใช้เงินสดระหว่างทางเท่าใด	กำหนด liquidity reserve
Tax	ภาษีกระทบผลตอบแทนสุทธิอย่างไร	asset location/turnover
Legal/Specific	มีกฎหรือข้อห้ามใด	จำกัด investable universe
Asset allocation	น้ำ หนัก เป้า หมาย และ ช่วง อนุญาตเท่าใด	กำหนด risk budget ระดับสินทรัพย์
Benchmark	จะวัดผลงานเทียบอะไร	กำหนด active risk และ attribution
Rebalancing	ปรับเมื่อเวลาใดหรือเบี่ยงเบนเท่าใด	ควบคุม drift และต้นทุน
Review	อะไรทำให้ต้องทบทวน IPS	ปรับนโยบายเมื่อเป้าหมายเปลี่ยน

1.9.2 ความสามารถรับความเสี่ยงกับความเต็มใจรับความเสี่ยง

Risk capacity เป็นข้อจำกัดเชิงเศรษฐกิจ เช่น รายได้ ความมั่งคั่ง ภาระหนี้ ระยะเวลา และความต้องการสภาพคล่อง ส่วน **risk willingness** เป็นระดับที่ผู้ลงทุนยอมรับความผันผวนและการขาดทุนเชิงพฤติกรรม หากสองมิตินี้ไม่สอดคล้องกัน ควรยึดระดับความเสี่ยงที่ต่ำกว่าเป็นฐานจนกว่าจะมีการประเมินเพิ่มเติม

ตัวอย่างเช่น ผู้ลงทุนอายุยังน้อยอาจมี time horizon ยาวและมี capacity สูง แต่หากไม่สามารถทน drawdown ร้อยละ 20 ได้ พอร์ตที่เสี่ยงเกิน willingness อาจนำไปสู่การขายสินทรัพย์ในจังหวะที่เสียหายที่สุด ในทางกลับกัน ผู้ใกล้เกษียณอาจมี willingness สูงจากประสบการณ์ลงทุน แต่ capacity ต่ำเพราะต้องใช้เงินในไม่กี่ปี จึงไม่ควรใช้ willingness แทน capacity

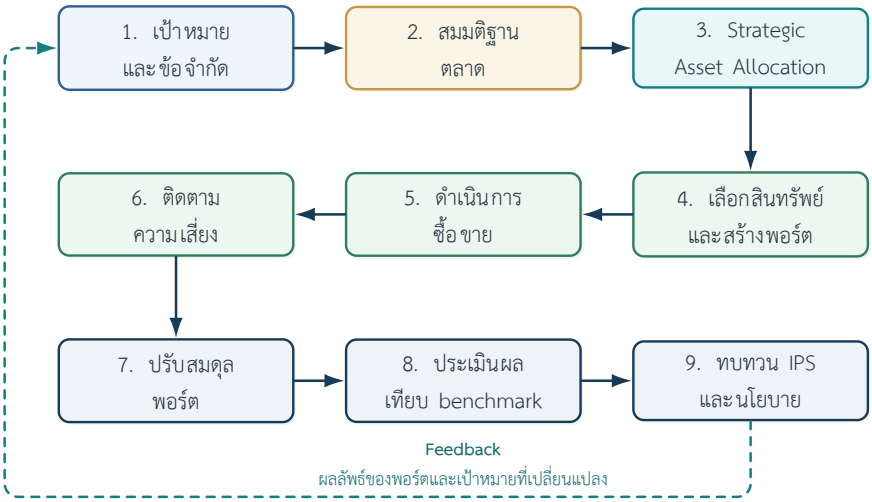
1.10 วงจรการบริหารพอร์ต: จากนโยบายสู่การประเมินผล

วงจรการบริหารพอร์ตเป็นกระบวนการต่อเนื่องที่เชื่อม policy, analysis, implementation และ monitoring เข้าด้วยกัน

1. **กำหนดเป้าหมายและข้อจำกัด** แปลงเป้าหมายเป็น return objective, risk limit และ liquidity requirement
2. **กำหนดสมมติฐานตลาด** ประเมินผลตอบแทนคาดหวัง ความเสี่ยง correlation และ scenario โดยระบุความไม่แน่นอนของประมาณการ
3. **กำหนด strategic asset allocation** เลือกน้ำหนักระยะยาวที่สอดคล้องกับ IPS
4. **เลือกสินทรัพย์และสร้างพอร์ต** พิจารณา valuation, diversification, constraints และ implementability
5. **ดำเนินการซื้อขาย** เลือก order type, venue และขนาดคำสั่งโดยคำนึงถึง spread, market impact และ timing risk
6. **ติดตามความเสี่ยง** ตรวจ exposure, drawdown, liquidity, concentration และการเบี่ยงเบนจาก mandate
7. **ปรับสมดุล** เปรียบเทียบประโยชน์จากการกลับสู่น้ำหนักเป้าหมายกับต้นทุนธุรกรรมและภาษี
8. **ประเมินผล** แยกผลจาก asset allocation, security selection, timing และต้นทุน พร้อมเทียบ benchmark
9. **ทบทวน IPS** เมื่อเป้าหมาย ฐานะผู้ลงทุน กฎเกณฑ์ หรือสมมติฐานระยะยาวเปลี่ยนอย่างมีนัยสำคัญ

ก่อนดำเนินการในแต่ละรอบควรแยก **monitoring threshold** ออกจาก **action threshold** เช่น น้ำหนักหุ้นเบี่ยงเบน 2 จุดร้อยละอาจเป็นระดับที่ต้องติดตาม แต่ไม่จำเป็นต้องซื้อขายทันทีหากต้นทุนสูง ขณะที่การเบี่ยง

เบนเกินกรอบ IPS เป็นระดับที่ต้องพิจารณาดำเนินการหรือขออนุมัติ การแยกสองระดับนี้ช่วยลด turnover ที่ไม่จำเป็นและทำให้ governance ชัดเจน



รูปที่ 1.4: วงจรการบริหารพอร์ตจากนโยบายสู่การดำเนินการ การติดตาม การประเมินผล และการทบทวนนโยบาย

รูปที่ 1.4 แสดงว่าการบริหารพอร์ตเป็นระบบป้อนกลับ (feedback system) ไม่ใช่กระบวนการเลือกสินทรัพย์ครั้งเดียว ผลการดำเนินงาน ความเสี่ยง ต้นทุน และการเปลี่ยนแปลงของเป้าหมายต้องถูกนำกลับไปใช้ทบทวน IPS และสมมติฐานในรอบถัดไป

หลักการควบคุมการตัดสินใจ

การบริหารพอร์ตที่ดีควรแยก **policy decision** ออกจาก **market view** ตัวอย่างเช่น การลดสัดส่วนหุ้นเพราะผู้ลงทุนต้องใช้เงินเร็วขึ้นเป็นการเปลี่ยนนโยบาย แต่การลดหุ้นเพราะคาดว่าตลาดจะลงเป็น tactical decision ทั้งสองกรณีควรใช้เกณฑ์อนุมัติและการประเมินผลต่างกัน

1.11 จากตลาดสู่การลงทุนเชิงปริมาณ

การลงทุนเชิงปริมาณเริ่มจากการแปลงคำถามการลงทุนให้เป็นตัวแปรและกระบวนการที่ตรวจสอบได้ ไม่ใช่เริ่มจากการเลือกแบบจำลองที่ซับซ้อน ลำดับที่เหมาะสมคือ คำถาม → ข้อมูล → ผลตอบแทน/ปัจจัย → แบบจำลอง → สัญญาณ → พอร์ต → การซื้อขาย → การประเมินผล

ในแต่ละขั้นมีความเสี่ยงของตนเอง เช่น survivorship bias ระหว่างเลือก universe, look-ahead bias ระหว่างสร้างปัจจัย, overfitting ระหว่างพัฒนาแบบจำลอง และ execution shortfall ระหว่างนำสัญญาณไปซื้อขาย ดังนั้นผล backtest ที่ดีไม่ควรถูกตีความว่าเป็นหลักฐานเพียงพอของความสามารถสร้างกำไรจริง

หลักฐานที่ใกล้การใช้งานจริงมากขึ้นต้องตอบเพิ่มว่า **สัญญาณเกิดเมื่อใด ซื้อขายได้เมื่อใด ต้นทุนเท่าใด รับขนาดเงินลงทุนได้เพียงใด และผลยังคงอยู่เมื่อเปลี่ยนช่วงเวลา/สมมติฐานหรือไม่** ช่องว่างระหว่าง prediction กับ portfolio implementation เป็นเหตุผลที่โมเดลที่พยากรณ์ได้ดีอาจไม่สร้างผลตอบแทนสุทธิที่ดีเสมอ

หลักการ reproducible investment research

แบบจำลองที่ซับซ้อนไม่สามารถชดเชยข้อมูลผิด นิยามตัวแปรไม่ชัด หรือการทดสอบที่มีอคติได้ งานเชิงปริมาณที่นำไปใช้จริงควรบันทึก **data lineage, as-of time, cleaning rule, feature definition, train/test split, transaction-cost assumption และ model version** เพื่อให้ผลวิเคราะห์ตรวจสอบและทำซ้ำได้

1.12 Investment Lab 1: สร้างแผนที่ตลาดและ IPS

Investment Lab: Market–Portfolio–Data Mini Project

ส่วนที่ A: Market Map

1. เลือกผลิตภัณฑ์อย่างน้อย 8 รายการจากตลาดการเงินไทย โดยให้ครอบคลุมเงินฝาก/ตลาดเงิน ตราสารหนี้ หุ้น ETF/DR และอนุพันธ์อย่างน้อยบางประเภท
2. สำหรับแต่ละผลิตภัณฑ์ ระบุ market segment, primary/secondary, exchange/OTC, issuer, venue, regulator/infrastructure, source of return, primary risk และ liquidity consideration
3. ระบุว่าผลิตภัณฑ์นั้นเหมาะใช้เพื่อ *liquidity, income, growth, diversification หรือ hedging* และอธิบายเหตุผล

ส่วนที่ B: IPS และพอร์ตตัวอย่าง

1. สร้างกรณีผู้ลงทุนสมมติหนึ่งราย พร้อมเป้าหมายเชิงจำนวนและช่วงเวลาที่ชัดเจน
2. แยก risk capacity กับ risk willingness และระบุข้อจำกัดสภาพคล่อง
3. กำหนด strategic asset allocation เป็นช่วงน้ำหนัก พร้อม benchmark
4. กำหนด rebalancing rule และเงื่อนไขที่ต้องทบทวน IPS ก่อนรอบปกติ

5. อธิบายว่าพอร์ตจะเปลี่ยนอย่างไรหากเกิด shock เช่น ดอกเบี้ยเพิ่ม 2%, หุ้นลด 20% หรือเงินบาทเปลี่ยน 10%

ส่วนที่ C: Data Dictionary และ Audit Trail

1. เลือกข้อมูลอย่างน้อย 8 ตัวแปรจากแหล่งทางการ เช่น BOT, SET, ThaiBMA หรือ SEC
2. ระบุ source URL, variable definition, frequency, unit, timezone/ as-of time, transformation และ missing-data rule
3. ระบุความเสี่ยงด้าน data quality อย่างน้อยหนึ่งประเด็นต่อข้อมูลหนึ่งตัวแปร
4. เก็บ raw data แยกจาก cleaned data และบันทึกขั้นตอนแปลงข้อมูลเพื่อให้ทำซ้ำได้

เกณฑ์ส่งมอบของ Investment Lab

งานที่ถือว่า “ใช้จริงได้” ควรมีอย่างน้อย 4 ผลลัพธ์ ได้แก่ **(1)** market map ที่ตรวจแหล่งข้อมูลได้ **(2)** IPS ที่มีตัวเลขและกฎตัดสินใจชัดเจน **(3)** data dictionary ที่ระบุเวลา หน่วย และนิยาม และ **(4)** audit trail ที่ผู้อื่นสามารถทำซ้ำผลลัพธ์ได้ การมีเพียงกราฟหรือผลตอบแทนโดยไม่มี lineage ยังไม่เพียงพอสำหรับงานเชิงวิชาชีพ

1.13 แนวทางอ่านข้อมูลตลาดอย่างรับผิดชอบ

ก่อนนำข้อมูลไปคำนวณควรตรวจสอบอย่างน้อยเจ็ดประเด็น

1. **นิยามตัวแปร** เช่น close, adjusted close, clean price, dirty price, yield หรือ total return
2. **วันที่และเวลาอ้างอิง** เช่น trade date, settlement date, end-of-day, intraday และ timezone
3. **หน่วยและสกุลเงิน** รวมถึงการแปลงหน่วยร้อยละ จุดฐาน และอัตราแลกเปลี่ยน
4. **Corporate actions** เช่น dividend, split, rights issue, spin-off และ delisting
5. **Missing/stale data** แยก “ไม่มีธุรกรรม” ออกจาก “ข้อมูลหาย” และระวัง stale quote
6. **Selection bias** ตรวจ survivorship, backfill และ universe definition ตามเวลา
7. **ต้นทุนและข้อจำกัดการซื้อขาย** เช่น spread, fee, market impact, short-sale constraint, lot size และ margin

ในงานเชิงประจักษ์ควรเก็บข้อมูลอย่างน้อยสามชั้น ได้แก่ **raw layer** ที่ไม่แก้ไข **processed layer** ที่ผ่าน cleaning/adjustment และ **analysis layer** ที่ใช้สร้างตัวแปรหรือผลตอบแทน การแยกชั้นช่วยตรวจย้อนกลับเมื่อผลลัพธ์ผิดปกติและลดความเสี่ยงจากการแก้ข้อมูลต้นฉบับโดยไม่ตั้งใจ

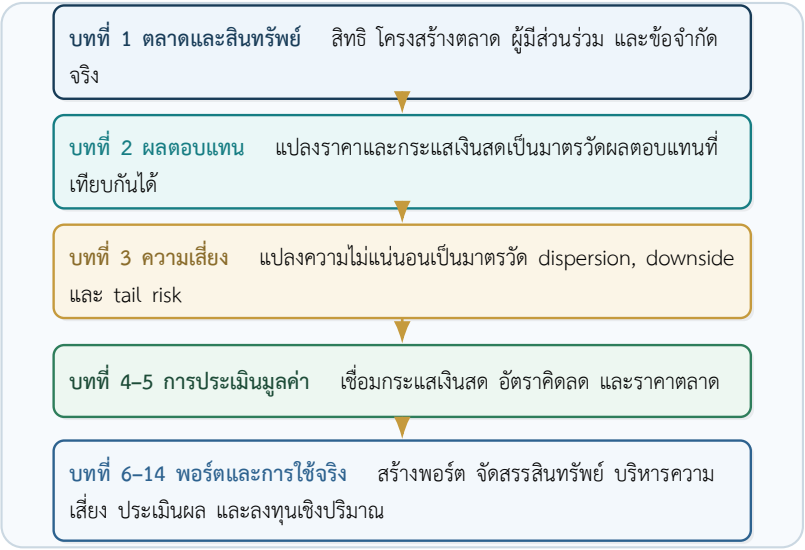
สำหรับข้อมูลที่มาจากหลายตลาด การจัดแนวเวลาเป็นประเด็นสำคัญ ตัวอย่างเช่นราคาปิดตลาดต่างประเทศอาจเกิดหลังราคาปิดในประเทศไทย หากนำข้อมูลวันเดียวกันมาใช้โดยไม่ตรวจเวลา อาจเกิด look-ahead bias แบบแฝง งานที่ใช้ข้อมูลข้ามประเทศจึงควรระบุ timestamp และ information set ที่ผู้ลงทุนสามารถทราบได้จริง ณ เวลาตัดสินใจ

ประเด็นที่ต้องระวัง

หลักตรวจสอบง่ายที่สุด คือถามว่า “ณ เวลาที่ต้องตัดสินใจ ข้อมูลทุกตัวในแถวนี้มีให้เห็นจริงแล้วหรือยัง” หากคำตอบไม่แน่ชัด ต้องเลื่อนข้อมูลด้วย lag ที่เหมาะสมหรือสร้าง point-in-time dataset ใหม่ มิฉะนั้นผลวิเคราะห์อาจมี look-ahead bias แม้สูตรและแบบจำลองถูกต้องทั้งหมด

1.14 แผนที่เนื้อหาจากบทนี้สู่บทถัดไป

บทนี้วางฐานเชิงสถาบันและเชิงการตัดสินใจ โดยเริ่มจากสิทธิของสินทรัพย์ โครงสร้างตลาด ผู้มีส่วนร่วม และข้อจำกัดจริง ก่อนเชื่อมเข้าสู่กรอบผลตอบแทน–ความเสี่ยง–สภาพคล่อง บทที่ 2 จะพัฒนาคณิตศาสตร์ของผลตอบแทนให้สามารถเปรียบเทียบสินทรัพย์และช่วงเวลาได้อย่างสอดคล้อง จากนั้นบทด้านความเสี่ยงจะเปลี่ยนความไม่แน่นอนให้เป็นมาตรวัดเชิงปริมาณ และบทต่อ ๆ ไปจะนำสองส่วนนี้เข้าสู่การประเมินมูลค่า ทฤษฎีพอร์ตการจัดสรรสินทรัพย์ การบริหารความเสี่ยง และการประเมินผล



รูปที่ 1.5: แผนที่ความเชื่อมโยงจากฐานเชิงสถาบันในบทที่ 1 ไปสู่การวัดผล การประเมินมูลค่า และการบริหารพอร์ตในบทถัดไป

บทสรุปท้ายบท

ตลาดการเงินเป็นกลไกที่เชื่อมเงินออม การระดมทุน การค้นพบราคา สภาพคล่อง และการกระจายความเสี่ยง การวิเคราะห์สินทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพควรเริ่มจากสิทธิทางกฎหมายและโครงสร้างกระแสเงินสด แล้วจึงพิจารณาแหล่งผลตอบแทน ความเสี่ยง สภาพคล่อง ต้นทุน และบทบาทในพอร์ต

โครงสร้างตลาด เช่น direct/intermediated finance, money/capital market, primary/secondary market และ exchange/OTC มีผลต่อการกำหนดราคา ความโปร่งใส ความสามารถในการซื้อขาย และความเสี่ยงของธุรกรรม ผู้ลงทุนจึงต้องเข้าใจทั้งตัวสินทรัพย์และกลไกตลาดที่รองรับสินทรัพย์นั้น

การบริหารพอร์ตที่นำไปใช้จริงต้องเชื่อม IPS, asset allocation, implementation, monitoring และ performance evaluation เข้าด้วยกัน พร้อมควบคุมต้นทุนและความเสี่ยงด้านข้อมูล งานเชิงปริมาณที่น่าเชื่อถือจำเป็นต้องมี data lineage, time alignment และกระบวนการทดสอบที่ป้องกันอคติ เพื่อให้ผลจากแบบจำลองสามารถเปลี่ยนเป็นการตัดสินใจที่ปฏิบัติได้จริง

คำศัพท์สำคัญ

- ตลาดการเงิน (financial market)
- สินทรัพย์จริง (real asset)
- สินทรัพย์ทางการเงิน (financial asset)
- ตลาดเงิน (money market)
- ตลาดทุน (capital market)
- ตลาดแรก (primary market)
- ตลาดรอง (secondary market)
- ตลาด ที่ จัด ตั้ง อย่าง เป็น ทางการ (organized exchange)
- ตลาดนอกระบบ (OTC)
- สภาพคล่อง (liquidity)
- การค้นพบราคา (price discovery)
- NAV
- ETF
- DR
- ตราสารอนุพันธ์ (derivative)
- Hedger
- Speculator
- Arbitrageur
- Investment Policy Statement
- Risk capacity
- Risk willingness
- Benchmark
- Rebalancing
- Market impact
- Data lineage
- Look-ahead bias
- Survivorship bias

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบาย ความ แตก ต่าง ระหว่าง สินทรัพย์ จริง และ สินทรัพย์ ทางการ เงิน พร้อม อธิบาย ว่า สิทธิ ใน สินทรัพย์ ทางการเงินเชื่อมโยงกับกระแสเงินสดจากสินทรัพย์จริงอย่างไร
2. อธิบายเหตุผลที่ตลาดรองมีผลต่อต้นทุนเงินทุนของผู้ออกหลักทรัพย์ แม้เงินจากการซื้อขายในตลาดรองไม่ไหลเข้าสู่ผู้ออกโดยตรง
3. จำแนกธุรกรรมต่อไปนี้ตาม money/capital market, primary/secondary market และ exchange/OTC พร้อมอธิบายว่าการจำแนกแต่ละมิติให้ข้อมูลอะไรแก่ผู้ลงทุน
4. เปรียบเทียบหุ้นสามัญ หุ้นกู้ และหน่วยลงทุนในมิติสิทธิ กระแสเงินสด ลำดับการเรียกร้อง ความเสี่ยง และบทบาทในพอร์ต
5. อธิบายว่าเหตุใด ETF ที่มีปริมาณซื้อขายบนกระดานต่ำจึงไม่จำเป็นต้องมีสภาพคล่องรวมต่ำเสมอ และควรตรวจข้อมูลใดเพิ่มเติม
6. สร้างตัวอย่างที่ Hedger, Speculator และ Arbitrageur ทำธุรกรรมในตลาดเดียวกัน แล้วอธิบายว่าต้นทุนหรือข้อจำกัดใดอาจทำให้กลยุทธ์เชิงทฤษฎีใช้จริงไม่ได้
7. ผู้ลงทุนซื้อสินทรัพย์ราคา 100 บาท ขายที่ 107 บาท ได้รับกระแสเงินสด 2 บาท และเสียต้นทุนธุรกรรมรวม 1.50 บาท จงคำนวณ gross return และ net return พร้อมอธิบายความแตกต่างเชิงการตัดสินใจ

8. อธิบายความแตกต่างระหว่าง risk capacity และ risk willingness พร้อมยกกรณีที่สองมิตินี้ให้คำแนะนำด้านความเสี่ยงไม่ตรงกัน
9. จัด ทำ IPS แบบ ย่อ สำหรับ ผู้ ลงทุน สมมติ โดย กำหนด เป้า หมาย ระยะ เวลา liquidity reserve asset-allocation range benchmark และ rebalancing rule ให้ครบถ้วน
10. เลือกข้อมูลตลาดอย่างน้อย 5 ตัวแปรและสร้าง data dictionary โดยระบุ source, definition, as-of time, unit, cleaning rule และ potential bias
11. อธิบายว่า survivorship bias และ look-ahead bias สามารถทำให้ backtest ดูดีกว่าความเป็นจริงได้อย่างไร พร้อมเสนอวิธีป้องกัน
12. สมมติพอร์ตมีสินทรัพย์ที่สภาพคล่องดีในภาวะปกติทั้งหมด จงอธิบายว่าเหตุใดพอร์ตยังอาจเผชิญ liquidity crisis ในภาวะ stress และควรออกแบบ stress test อย่างไร

คำถามชวนคิด

1. ตลาดที่มีสภาพคล่องสูงจำเป็นต้องเป็นตลาดที่มีประสิทธิภาพด้านข้อมูลเสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. หากผู้ลงทุนสามารถเข้าถึงสินทรัพย์หลายประเภทผ่าน ETF หรือ DR การทำความเข้าใจสินทรัพย์อ้างอิงและโครงสร้างผลิตภัณฑ์ยังจำเป็นหรือไม่
3. ในภาวะวิกฤต market risk, credit risk, liquidity risk และ funding risk สามารถเสริมกันจนเกิด feedback loop ได้อย่างไร
4. IPS ควรเปลี่ยนเมื่อ “ตลาดเปลี่ยน” หรือเมื่อ “เป้าหมายและข้อจำกัดของผู้ลงทุนเปลี่ยน” มากกว่ากัน และเพราะเหตุใด
5. ระหว่างแบบจำลองที่ซับซ้อนกับข้อมูลที่มีคุณภาพ สิ่งใดสร้างความได้เปรียบเชิงปฏิบัติได้ยั่งยืนกว่า และภายใต้เงื่อนไขใด
6. ถ้ากลยุทธ์หนึ่งให้ Sharpe ratio สูงใน backtest แต่มี turnover สูงมาก ผู้ลงทุนควรถามคำถามใดก่อนนำไปใช้เงินจริง

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 1

[1] Yakov Amihud. “Illiquidity and Stock Returns: Cross-Section and Time-Series Effects”. In: *Journal of Financial Markets* 5.1 (2002), pp. 31–56. DOI: 10.1016/S1386-4181(01)00024-6.

[5] Bank of Thailand. *Financial Markets and Thai Financial Market Structure*. See also Thai Financial Market Structure and Financial Market Statistics. 2026. URL: https://www.bot.or.th/en/our-roles/financial-markets.html (visited on 08/30/2026).

[6] Bank of Thailand. *Issuance of BOT Bonds/Bills and the BOT Bond Issuance Programme for 2026*. 2026. URL: https://www.bot.or.th/en/our-roles/monetary-policy/monetary-operations/OMOs/BOT-Bond.html (visited on 08/30/2026).

[9] Zvi Bodie, Alex Kane, and Alan J. Marcus. *Investments*. 12th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2021.

[19] Eugene F. Fama. "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". In: *The Journal of Finance* 25.2 (1970), pp. 383–417. DOI: 10.2307/2325486.

[22] Larry Harris. *Trading and Exchanges: Market Microstructure for Practitioners*. New York: Oxford University Press, 2003.

[23] Joel Hasbrouck. *Empirical Market Microstructure: The Institutions, Economics, and Econometrics of Securities Trading*. New York: Oxford University Press, 2007.

[24] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10th ed. New York: Pearson, 2018.

[33] Harry Markowitz. "Portfolio Selection". In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[35] Frederic S. Mishkin and Stanley G. Eakins. *Financial Markets and Institutions*. 9th ed. Boston: Pearson, 2018.

[43] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Digital Asset Business Operators: Rules and Regulations*. 2026. URL: https://www.sec.or.th/EN/Pages/LawandRegulations/DigitalAssetBusiness.aspx (visited on 08/30/2026).

[47] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Securities and Derivatives Businesses*. 2026. URL: https://www.sec.or.th/en/pages/marketdata/securitiesderivativesbusiness.aspx (visited on 08/30/2026).

[54] Thai Bond Market Association. *Bond Market Overview*. 2026. URL: https://www.thaibma.or.th/EN/Education/Bond_Tutor/MarketOverview.aspx (visited on 08/30/2026).

[56] The Stock Exchange of Thailand. *Market Products: ETF and Depositary Receipts Overview*. SET market-product information, including ETF, DR and related listed products. 2026. URL: https://www.set.or.th/en/market/product/etf/overview (visited on 08/30/2026).

[57] The Stock Exchange of Thailand. *SET Group and Shareholding Structure*. 2026. URL: https://www.set.or.th/en/about/setgroup/subsidiaries (visited on 08/30/2026).

บทที่ 2 คณิตศาสตร์ของผลตอบแทนการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายความหมายของผลตอบแทนและแยกผลตอบแทนจากการเปลี่ยนแปลงราคา กระแสเงินสด และต้นทุนได้
2. คำนวณและเชื่อมโยง *simple return*, *log return*, *holding-period return* และผลตอบแทนสะสมหลายงวดได้อย่างถูกต้อง
3. แปลงผลตอบแทนระหว่างช่วงเวลาและแยกความแตกต่างระหว่างอัตราในนาม อัตราที่เป็นผล และผลตอบแทนที่ทำให้เป็นรายปีได้
4. คำนวณและเปรียบเทียบ Bank Discount Yield (BDY), Holding Period Yield (HPY), Money Market Yield (MMY) และ Effective Annual Yield (EAY)
5. คำนวณ Money-Weighted Return (MWR/ IRR), Modified Dietz Return และ Time-Weighted Return (TWR) พร้อมเลือกใช้ตามวัตถุประสงค์ได้
6. เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และอธิบายผลของการทบต้นและ volatility drag ได้
7. ปรับผลตอบแทนด้วยเงินเฟ้อ อัตราแลกเปลี่ยน ค่าธรรมเนียม ภาษี และต้นทุนธุรกรรมได้อย่างถูกหลัก
8. เตรียมข้อมูลราคา ปรับ corporate actions และสร้างเมทริกซ์ผลตอบแทนสำหรับใช้ในการวิเคราะห์ความเสี่ยงและทฤษฎีพอร์ตได้
9. เลือกมาตรวัดผลตอบแทนให้สอดคล้องกับคำถามของเจ้าของเงิน ผู้จัดการพอร์ต และงานวิเคราะห์เชิงปริมาณ โดยไม่สับสนระหว่าง gross/net, nominal/real และ local/base-currency return
10. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของผลตอบแทนจากข้อมูลจริง โดยพิจารณาเวลาอ้างอิง corporate actions ต้นทุน และ data lineage ก่อนนำผลไปใช้ตัดสินใจ

2.1 บทนำ: จากราคาไปสู่ผลตอบแทน

บทที่ 1 วางกรอบว่าการตัดสินใจลงทุนต้องพิจารณาผลตอบแทน ความเสี่ยง และสภาพคล่องร่วมกัน บทนี้พัฒนาแกนผลตอบแทนให้เป็นภาษาคณิตศาสตร์ที่สามารถใช้เปรียบเทียบสินทรัพย์ ช่วงเวลา และกลยุทธ์การลงทุนได้อย่างสอดคล้อง

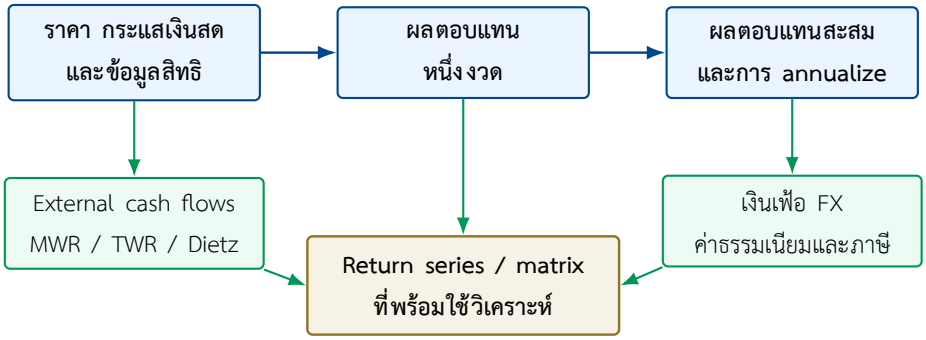
การเปลี่ยนแปลงของราคาเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอสำหรับวัดผลตอบแทน เพราะผู้ลงทุนอาจได้รับเงินปันผล คูปอง ดอกเบี้ย หรือกระแสเงินสดอื่นระหว่างถือครอง นอกจากนี้ ผลตอบแทนร้อยละเดียวกันอาจมีความหมายต่างกันเมื่อช่วงเวลา วิธีทบต้น กระแสเงินสดภายนอก ค่าเงิน เงินเฟ้อ และต้นทุนแตกต่างกัน

ดังนั้น ก่อนคำนวณผลตอบแทนควรตอบคำถามอย่างน้อยสี่ข้อ ได้แก่ **วัดผลตอบแทนของอะไร ในช่วงเวลาใด รวมกระแสเงินสดและต้นทุนใดบ้าง** และ **ต้องการใช้ผลตอบแทนนั้นตอบคำถามใด**

ในเชิงเศรษฐศาสตร์ ผลตอบแทนคือการเปลี่ยน “มูลค่าที่ถือครอง” ให้เป็นอัตราการเติบโตที่เปรียบเทียบข้ามสินทรัพย์ได้ แต่ในเชิงข้อมูล ผลตอบแทนเป็น **ตัวแปรที่สร้างขึ้น** จากราคา กระแสเงินสด เวลา และกติกาการปรับข้อมูล จึงไม่มีคำว่า “return” ที่เป็นสากลโดยไม่ระบุ convention ตัวอย่างเช่น price return กับ total return ตอบคำถามต่างกัน และ adjusted close จากผู้ให้ข้อมูลคนละรายอาจมีวิธีรวมเงินปันผลหรือ corporate actions ต่างกัน [59]

กรอบตรวจสอบก่อนคำนวณผลตอบแทน

ก่อนใช้สูตรใด ควรกำหนดให้ชัดเจน 5 เรื่อง ได้แก่ **(1) หน่วยลงทุน** วัดหลักทรัพย์ พอร์ต หรือบัญชี **(2) ช่วงเวลา** เช่น วัน เดือน หรือปี **(3) กระแสเงินสด** รวมเงินปันผล คูปอง และเงินฝากถอนหรือไม่ **(4) มุมมองผู้ใช้** เจ้าของเงินหรือผู้จัดการพอร์ต และ **(5) ฐานเศรษฐกิจ** gross/net, nominal/real และสกุลเงินใด การตอบห้าข้อนี้ก่อนคำนวณช่วยลดข้อผิดพลาดมากกว่าการเลือกสูตรที่ซับซ้อนขึ้น



รูปที่ 2.1: เส้นทางจากข้อมูลราคาและกระแสเงินสดสู่ชุดผลตอบแทนที่พร้อมใช้ในการวิเคราะห์ โดยแยกการทบต้น กระแสเงินสดภายนอก และการปรับฐานเศรษฐกิจออกจากกันอย่างชัดเจน

2.2 ผลตอบแทนหนึ่งงวดและองค์ประกอบของผลตอบแทน

ให้ P_{t-1} เป็นราคาสินทรัพย์ต้นงวด P_t เป็นราคาปลายงวด และ D_t เป็นกระแสเงินสดที่ผู้ลงทุนได้รับระหว่างงวด เช่น เงินปันผลหรือคูปอง โดยในขั้นแรกยังไม่หักภาษีและต้นทุนธุรกรรม

ตัวหาร P_{t-1} มีความหมายสำคัญ เพราะทำให้กำไรหรือขาดทุนถูกวัดเทียบกับเงินทุนที่ต้องใช้เพื่อถือสินทรัพย์ ณ ต้นงวด จึงสามารถเปรียบเทียบการลงทุนที่มีระดับราคาแตกต่างกันได้ สำหรับหุ้น D_t มักเป็นเงินปันผล สำหรับตราสารหนี้อาจเป็นคูปอง ส่วนสินทรัพย์ที่ไม่มีการจ่ายกระแสเงินสดระหว่างงวดจะมี $D_t = 0$

บทนิยาม 2.1

อัตราผลตอบแทนรวมหนึ่งงวด (total simple return) นิยามโดย

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}$$

หาก $D_t = 0$ จะได้ผลตอบแทนจากราคา

$$R_t^{(P)} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

ผลตอบแทนรวมสามารถแยกเป็น

$$R_t = \underbrace{\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}}_{\text{capital gain/loss yield}} + \underbrace{\frac{D_t}{P_{t-1}}}_{\text{income yield}}$$

การแยกองค์ประกอบดังกล่าวช่วยให้เห็นว่า สินทรัพย์ที่มีผลตอบแทนรวมเท่ากันอาจสร้างผลตอบแทนจากคนละแหล่ง เช่น หุ้นเติบโตอาจมีสัดส่วน capital gain สูง ขณะที่หุ้นปันผลหรือตราสารหนี้อาจมี income component สูงกว่า

ในทางปฏิบัติ การแยกแหล่งผลตอบแทนช่วยตอบคำถามที่ “total return” เพียงตัวเดียวตอบไม่ได้ เช่น ผลตอบแทนเกิดจากกระแสเงินสดที่ค่อนข้างสม่ำเสมอ หรือเกิดจากการเปลี่ยน valuation ของราคาเป็นหลัก ความแตกต่างนี้มีผลต่อการคาดการณ์กระแสเงินสด การวางแผนสภาพคล่อง และการประเมินความยั่งยืนของผลตอบแทน

ตัวอย่าง 2.1. นักลงทุนซื้อหุ้นที่ราคา 50 บาท ได้รับเงินปันผล 1.50 บาท และขายปลายงวดที่ 54 บาท จะได้

$$R = \frac{54 - 50 + 1.50}{50} = 0.11 = 11\%$$

โดย capital gain yield เท่ากับ 8% และ dividend yield เท่ากับ 3%

ข้อสังเกต

ตัวอย่างนี้ให้ total return เท่ากับ 11% แต่หากผู้ลงทุนต้องใช้กระแสเงินสดเพื่อดำรงชีพ ส่วน 3% จากเงินปันผลมีความหมายต่างจากกำไรจากราคาที่ยังไม่ได้ขาย ในทางกลับกัน หากเป้าหมายคือการเติบโตของความมั่งคั่งระยะยาว ทั้งสององค์ประกอบควรถูกรวมภายใต้ total-return convention เดียวกัน

2.2.1 ผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนธุรกรรม

ให้ TC_t แทนต้นทุนธุรกรรมทั้งหมดที่เป็นจำนวนเงินในงวด t เช่น ค่านายหน้า ค่าธรรมเนียม spread โดยประมาณ และ market impact ผลตอบแทนสุทธิอย่างง่ายเขียนได้เป็น

ในการใช้งานจริง TC_t ควรมองเป็นผลรวมของต้นทุนหลายส่วน เช่น $TC_t = C_{\text{commission}} + C_{\text{fee}} + C_{\text{spread}} + C_{\text{impact}} + C_{\text{other}}$ โดยสองส่วนแรกมักประมาณได้จากตารางค่าธรรมเนียม ขณะที่ spread และ market impact ขึ้นกับสภาพคล่อง ขนาดคำสั่ง และช่วงเวลาซื้อขาย จึงไม่ควรใช้ค่าคงที่เดียวกับทุกหลักทรัพย์โดยอัตโนมัติ

$$R_t^{\text{net}} = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t - TC_t}{P_{t-1}}$$

ถ้าต้นทุนถูกกำหนดเป็นสัดส่วนของเงินลงทุนต้นงวด $c_t = TC_t / P_{t-1}$ จะได้

$$R_t^{\text{net}} = R_t^{\text{gross}} - c_t$$

ในงาน backtesting การรายงานเฉพาะ gross return สามารถทำให้กลยุทธ์ที่มี turnover สูงดูน่าสนใจกว่าความเป็นจริง จึงควรระบุสมมติฐานด้าน transaction cost และ slippage ก่อนตีความผลลัพธ์ [69]

งานเชิงประจักษ์ของผู้เขียนเกี่ยวกับการ backtest กลยุทธ์บนหุ้น SET50 ย้ำว่าการเปรียบเทียบกลยุทธ์ควรทำภายใต้สมมติฐานการซื้อขายที่ระบุได้และทดสอบความทนทาน ไม่ใช่อาศัยผลตอบแทนจากสัญญาณก่อนต้นทุนเพียงอย่างเดียว [69]

จาก gross signal สู่ผลตอบแทนที่นำไปใช้ได้

สำหรับกลยุทธ์ที่ซื้อขายถี่ ให้ตรวจอย่างน้อย **turnover, bid–ask spread, fee, slippage, market impact และภาษี** แล้วทำ sensitivity analysis ของต้นทุน หากกลยุทธ์เสียความได้เปรียบเมื่อเพิ่มต้นทุนเพียงเล็กน้อย แสดงว่าผลลัพธ์อาจเปราะบางต่อการนำไปใช้จริง

ประเด็นที่ต้องระวัง

ผลตอบแทนก่อนต้นทุนและผลตอบแทนสุทธิต้องไม่ใช้สลับกันโดยไม่ระบุ รวมทั้ง benchmark และกลยุทธ์ควรถูกวัดภายใต้ convention ที่เทียบกันได้ เช่น ทั้งสองฝ่ายใช้ total return หรือ price return ในฐานเดียวกัน

2.3 Simple Return และ Log Return

2.3.1 Simple Return และ Wealth Relative

บทนิยาม 2.2

ถ้า R_t เป็น simple return ปริมาณ

$$G_t = 1 + R_t$$

เรียกว่า **gross return** หรือ **wealth relative** เพราะเงินหนึ่งหน่วยต้นงวดจะกลายเป็น G_t หน่วยปลายงวดเมื่อไม่มีกระแสเงินสดภายนอก

ถ้าเริ่มด้วยความมั่งคั่ง W_{t-1} จะได้

$$W_t = W_{t-1}(1 + R_t)$$

ดังนั้น simple return ทำงานกับความมั่งคั่งผ่านการคูณ wealth relatives ไม่ใช่การบวกอัตราผลตอบแทนข้ามเวลาโดยตรง

ข้อเท็จจริงนี้เป็นเหตุผลว่าทำไมผลตอบแทน $+20\%$ แล้ว -20% จึงไม่หักล้างกัน เงิน 100 เพิ่มเป็น 120 แล้วลดลง 20% ของ 120 เหลือ 96 การคิดผลตอบแทนหลายงวดจึงต้องติดตาม **ฐานความมั่งคั่งที่เปลี่ยนไปทุกงวด**

2.3.2 Log Return

เมื่อใช้ชุดราคาที่สะท้อน corporate actions และกระแสเงินสดตาม convention ที่เหมาะสม สามารถนิยาม log return ได้ดังนี้

บทนิยาม 2.3

ผลตอบแทนลอการิทึม (log return หรือ continuously compounded return) คือ

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

ถ้า $R_t = P_t/P_{t-1} - 1$ เป็น simple price return จะมี

$$r_t = \ln(1 + R_t) \qquad \text{และ} \qquad R_t = e^{r_t} - 1$$

log return มีสมบัติเด่นคือบวกข้ามเวลาได้ แต่ไม่ควรนำ log return ของสินทรัพย์หลายชนิดมาถ่วงน้ำหนักแล้วตีความว่าเป็น log return ของพอร์ตโดยอัตโนมัติ เพราะผลตอบแทนพอร์ตหนึ่งงวดถูกกำหนดจาก simple returns และน้ำหนักต้นงวด [13]

เมื่อ $|R_t|$ มีขนาดเล็ก ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ได้ว่า

$$r_t = ln(1 + R_t) = R_t - \frac{R_t^2}{2} + \frac{R_t^3}{3} - \cdots$$

จึงมี $r_t \approx R_t$ สำหรับผลตอบแทนเล็ก ๆ แต่ความแตกต่างเพิ่มขึ้นเมื่อผลตอบแทนมีขนาดใหญ่ โดยเฉพาะในช่วงตลาดผันผวน [13, 59]

ควรใช้ simple หรือ log return เมื่อใด

ใช้ **simple return** เมื่อต้องการคำนวณผลตอบแทนพอร์ต ความมั่งคั่งจริง หรือรายงานผลการลงทุน ส่วน **log return** สะดวกต่อการรวมผลตอบแทนตามเวลาและการสร้างแบบจำลองทางสถิติหลายประเภท แต่ก่อนสื่อสารผลเชิงเศรษฐกิจควรแปลงกลับเป็น simple return เมื่อจำเป็น

ทฤษฎีบท 2.1

ให้ $R_1, \ldots, R_T > -1$ และ $r_t = \ln(1 + R_t)$ จะได้

$$1 + R_{0:T} = \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t)$$

และ

$$r_{0:T} = \sum_{t=1}^{T} r_t = \ln(1 + R_{0:T})$$

พิสูจน์. จาก

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$$

ทำซ้ำตั้งแต่ $t = 1$ ถึง T จะได้

$$P_T = P_0 \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t)$$

จึงได้ความสัมพันธ์ของ simple return สะสม

สำหรับ log return ใช้สมบัติของลอการิทึม

$$\ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) = \ln\left(\prod_{t=1}^{T} \frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

□

ตัวอย่าง 2.2. หากผลตอบแทนสองงวดเท่ากับ $+20\%$ และ -20% ผลตอบแทนสะสมแบบ simple คือ

$$(1.20)(0.80) - 1 = -0.04 = -4\%$$

แม้ผลบวกของผลตอบแทนสองงวดจะเท่ากับศูนย์

ในรูป log return จะได้

$$\ln(1.20) + \ln(0.80) = \ln(0.96) \approx -0.04082$$

และเมื่อนำกลับเป็น simple return

$$e^{-0.04082} - 1 \approx -4\%$$

ข้อสังเกต

simple return มีขอบเขตล่าง $R \geq -1$ สำหรับสินทรัพย์ที่ราคาปลายงวดไม่ติดลบ ส่วน log return ต้องมี wealth relative เป็นบวกและจะเข้าใกล้ $-\infty$ เมื่อ wealth relative เข้าใกล้ศูนย์

2.4 ผลตอบแทนสะสม Holding-Period Return และการทำให้เป็นรายปี

2.4.1 Holding-Period Return

ให้ P_0 เป็นมูลค่าเริ่มต้น P_T เป็นมูลค่าปลายช่วง และ D เป็นกระแสเงินสดรวมที่ผู้ลงทุนได้รับระหว่างถือครอง

บทนิยาม 2.4

Holding-Period Return (HPR) ตลอดช่วงถือครองคือ

$$R_{\text{HPR}} = \frac{P_T - P_0 + D}{P_0}$$

ถ้าช่วงถือครองแบ่งเป็นหลายงวดโดยไม่มี external cash flow และผลตอบแทนแต่ละงวดสะท้อนกระแสเงินสดอย่างสอดคล้อง จะได้

$$1 + R_{\text{HPR}} = \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t)$$

HPR ตอบคำถามว่า "เงินหนึ่งก้อนเติบโตเท่าใดตลอดช่วงที่ถือ" จึงเหมาะกับการวัดประสบการณ์การถือสินทรัพย์ตั้งแต่ต้นจนจบ แต่ยังไม่ทำให้ช่วงเวลาที่ต่างกันเปรียบเทียบกันได้โดยตรง การเปรียบเทียบจึงมักต้องแปลงเป็นอัตราต่อปีภายใต้ convention เดียวกัน

2.4.2 การทำให้เป็นรายปีแบบทบต้น

ถ้า R_h เป็นผลตอบแทนตลอดช่วงยาว h ปี อัตราที่เป็นผลต่อปีซึ่งให้ wealth endpoint เดียวกันคือ

Annualized Effective Return

$$R_{\text{ann}} = (1 + R_h)^{1/h} - 1$$

ถ้าช่วงถือครองยาว d วันและกำหนดฐานปีเป็น Y วัน

$$R_{\text{ann}} = (1 + R_d)^{Y/d} - 1$$

การเลือก $Y = 365, 360$ หรือ day-count convention อื่นต้องสอดคล้องกับวัตถุประสงค์และมาตรฐานของตราสาร

ตัวอย่าง 2.3. หากผลตอบแทน 240 วันเท่ากับ 9% และใช้ 365 วันต่อปี จะได้

$$R_{\text{ann}} = (1.09)^{365/240} - 1 \approx 14.0\%$$

ผลลัพธ์นี้ต่างจากการคูณ $9\% \times 365/240$ เพราะ annualized effective return รักษาความเทียบเท่าของ

การทบต้น

ประเด็นที่ต้องระวัง

การ annualize เป็นการ “แปลงหน่วยเวลา” ไม่ใช่การพยากรณ์ว่าผลตอบแทนเดิมจะเกิดซ้ำตลอดปี โดยเฉพาะผลตอบแทนจากช่วงสั้นมาก การยกกำลังเพื่อ annualize สามารถสร้างตัวเลขสูงหรือต่ำมากและทำให้ผู้ใช้เข้าใจผิดได้ จึงควรรายงานช่วงข้อมูลจริงควบคู่กัน

2.4.3 อัตราในนามและอัตราที่เป็นผล

ถ้า $j^{(m)}$ เป็นอัตราในนามต่อปีที่คิดทบต้นปีละ m ครั้ง อัตราที่เป็นผลต่อปีคือ [62]

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1$$

ในทางกลับกัน

$$j^{(m)} = m\left[(1 + i_{\text{eff}})^{1/m} - 1\right]$$

สองอัตรานี้อาจมีตัวเลขต่างกันทั้งที่อธิบายกระแสเงินสดเดียวกัน เพราะ nominal rate ระบุอัตราต่อปีพร้อมความถี่การทบต้น ขณะที่ effective annual rate สรุปผลของการทบต้นทั้งหมดให้เหลือการเติบโตจริงหนึ่งปี การเปรียบเทียบผลิตภัณฑ์จึงควรแปลงให้อยู่บนฐาน effective เดียวกันก่อน

ตัวอย่าง 2.4. อัตราในนาม 6% ต่อปี คิดทบต้นรายเดือน ให้

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0.061678 = 6.1678\%$$

2.5 อัตราผลตอบแทนในตลาดเงิน

ตราสารตลาดเงินมีธรรมเนียมการเสนอราคาแตกต่างกัน การเปรียบเทียบผลตอบแทนจึงต้องตรวจทั้ง **ฐานเงินลงทุน ฐานวัน** และ **สมมติฐานการทบต้น**

ความแตกต่างระหว่าง BDY, HPY, MMY และ EAY ไม่ได้แปลว่าตราสารมีผลตอบแทนทางเศรษฐกิจหลายค่า แต่เกิดจาก **วิธี quote คนละแบบ** ทั้งตัวหาร จำนวนวันต่อปี และการทบต้น ดังนั้นตราสารเดียวกัน ณ ราคา

เดียวกันสามารถรายงาน yield หลายตัวเลขได้โดยไม่ขัดแย้งกัน

กำหนดให้ F เป็นมูลค่าที่ตราไว้ P เป็นราคาซื้อ C เป็นมูลค่าไถ่ถอน D เป็นดอกเบี้ยหรือกระแสเงินสดระหว่างถือครอง และ d เป็นจำนวนวันจนถึงวันไถ่ถอน

2.5.1 Bank Discount Yield

บทนิยาม 2.5

สำหรับตราสารส่วนลดที่ไถ่ถอนที่ F อัตราผลตอบแทนส่วนลดธนาคารนิยามเป็น

$$r_{\text{BDY}} = \frac{F - P}{F}\frac{360}{d}$$

BDY ใช้มูลค่าที่ตราไว้ F เป็นฐานและ annualize แบบเส้นตรงด้วย 360 วัน จึงเป็น quote convention มากกว่าผลตอบแทนที่เป็นผลจริงของเงินลงทุน

ตัวอย่าง 2.5. ตราสารมีมูลค่าที่ตราไว้ 10,000 บาท ราคาซื้อ 9,800 บาท และเหลืออายุ 120 วัน

$$r_{\text{BDY}} = \frac{10{,}000 - 9{,}800}{10{,}000}\frac{360}{120} = 0.06 = 6\%$$

2.5.2 Holding Period Yield

สำหรับตราสารที่ซื้อที่ราคา P ไถ่ถอนที่ C และได้รับกระแสเงินสดระหว่างถือครอง D

$$r_{\text{HPY}} = \frac{C - P + D}{P}$$

HPY เป็นผลตอบแทนตลอดช่วงถือครองและยังไม่ได้ annualize

ตัวอย่าง 2.6. ตราสารซื้อที่ 9,800 บาท ไถ่ถอนที่ 10,000 บาทในอีก 120 วัน และได้รับดอกเบี้ยระหว่างช่วง 98.63 บาท

$$r_{\text{HPY}} = \frac{10{,}000 - 9{,}800 + 98.63}{9{,}800} \approx 0.03047 = 3.047\%$$

2.5.3 Money Market Yield

บทนิยาม 2.6

การ annualize HPY แบบเส้นตรงด้วยฐาน 360 วันให้

$$r_{\text{MMY}} = r_{\text{HPY}} \frac{360}{d}$$

สำหรับตราสารส่วนลดที่ $C = F$ และ $D = 0$

$$r_{\text{MMY}} = \frac{F - P}{P} \frac{360}{d}$$

สำหรับตราสารส่วนลดเดียวกัน

$$r_{\text{MMY}} = r_{\text{BDY}} \frac{F}{P}$$

และเพราะ

$$P = F\left(1 - r_{\text{BDY}} \frac{d}{360}\right)$$

จึงได้

การแปลง BDY เป็น MMY

$$r_{\text{MMY}} = \frac{360 r_{\text{BDY}}}{360 - d r_{\text{BDY}}}$$

เมื่อ $P < F$ จะได้ $r_{\text{MMY}} > r_{\text{BDY}}$ สำหรับตราสารและช่วงเวลาเดียวกัน

2.5.4 Effective Annual Yield

บทนิยาม 2.7

ถ้า r_{HPY} เป็นผลตอบแทนในช่วง d วัน และใช้ 365 วันต่อปี

$$r_{\text{EAY}} = (1 + r_{\text{HPY}})^{365/d} - 1$$

ตัวอย่าง 2.7. ตราสารซื้อที่ 9,500 บาท ไถ่ถอนที่ 10,000 บาทในอีก 240 วัน และได้รับดอกเบี้ย 400 บาท

$$r_{\text{HPY}} = \frac{10{,}000 - 9{,}500 + 400}{9{,}500} = 0.0947368$$

ดังนั้น

$$r_{\text{EAY}} = (1.0947368)^{365/240} - 1 \approx 0.14758 = 14.758\%$$

ตารางที่ 2.1: เปรียบเทียบมาตรวัดผลตอบแทนตลาดเงิน

มาตรวัด	ฐานเงินลงทุน	การ annualize	ข้อสังเกต
BDY	มูลค่าที่ตราไว้ F	360 วัน แบบเส้นตรง	quote convention ของตราสารส่วนลด
HPY	ราคาซื้อ P	ไม่ annualize	ผลตอบแทนตลอดช่วงถือครอง
MMY	ราคาซื้อ P	360 วัน แบบเส้นตรง	เปลี่ยน HPY เป็น money-market basis
EAY	ราคาซื้อ P	โดยทั่วไป 365 วัน แบบทบต้น	ใช้ เปรียบ เทียบ อัตรา ที่ เป็น ผล ต่อ ปี เมื่อ convention สอดคล้อง

ขั้นตอนเปรียบเทียบตราสารตลาดเงินจริง

ให้เริ่มจาก **cash flow จริงและราคาที่จ่าย** แล้วคำนวณ HPY เป็นฐาน จากนั้นจึงแปลงเป็น MMY หรือ EAY ตามวัตถุประสงค์ วิธีนี้ช่วยป้องกันการเลือกตราสารเพียงเพราะตัวเลข quote สูงกว่า ทั้งที่เกิดจาก denominator หรือ day-count ที่ต่างกัน

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า yield, return, discount rate, money-market rate และ effective annual rate ไม่ใช่คำพ้องกัน การเปรียบเทียบตราสารต้องทำให้ฐานเงินลงทุน day-count และสมมติฐานการทบต้นสอดคล้องกันก่อน

2.6 ค่าเฉลี่ยผลตอบแทนและผลของการทบต้น

2.6.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

สำหรับ $R_1, \dots, R_T$

$$\bar{R}_A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเหมาะกับการสรุปผลตอบแทนเฉลี่ยหนึ่งงวดและเป็นตัวประมาณพื้นฐานของ expected one-period return ภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสม แต่ไม่ใช่อัตราคงที่ที่สร้างความมั่งคั่งปลายทางเท่ากับข้อมูลจริงหลายงวด

ดังนั้น arithmetic mean เหมาะกับคำถามเชิง “งวดถัดไปโดยเฉลี่ย” มากกว่าคำถามว่าเงินเติบโตจริงกี่เปอร์เซ็นต์ต่อปีตลอดหลายงวด หากนำค่าเฉลี่ยเลขคณิตไปใช้เป็น CAGR โดยตรงจะมองข้ามผลของการทบต้นและความผันผวน

2.6.2 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

บทนิยาม 2.8

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของผลตอบแทน T งวดคือ

$$\bar{R}_G = \left[\prod_{t=1}^{T}(1+R_t)\right]^{1/T} - 1$$

ซึ่งเป็นอัตราคงที่ต่อหนึ่งงวดที่ให้ wealth factor สะสมเท่ากับข้อมูลจริง

ทฤษฎีบท 2.2

ถ้า $R_t > -1$ ทุกงวด

$$\bar{R}_G \leq \bar{R}_A$$

และเกิดเท่ากันก็ต่อเมื่อ

$$R_1 = \cdots = R_T$$

พิสูจน์. ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต–เรขาคณิตกับจำนวนบวก $1 + R_1, \ldots, 1 + R_T$

$$\left[\prod_{t=1}^{T}(1 + R_t)\right]^{1/T} \leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(1 + R_t) = 1 + \bar{R}_A$$

หักหนึ่งทั้งสองข้างจะได้ผลลัพธ์ □

ตัวอย่าง 2.8. ผลตอบแทนสองปีเท่ากับ $+20\%$ และ -20% มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 0% แต่

$$\bar{R}_G = \sqrt{1.2(0.8)} - 1 = \sqrt{0.96} - 1 \approx -2.02\%$$

จึงเห็นว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่รักษา wealth endpoint

ข้อสังเกต

สำหรับผลตอบแทนที่ไม่รุนแรงมากและมีการกระจายค่อนข้างสม่ำเสมอ ความสัมพันธ์เชิงประมาณที่ใช้สร้าง intuition คือ “geometric growth ต่ำกว่า arithmetic mean เมื่อความผันผวนสูงขึ้น” แนวคิดนี้ไม่ใช่สูตร exact ทั่วไป แต่ช่วยอธิบายว่าการควบคุมความผันผวนมีผลต่อการเติบโตของความมั่งคั่งระยะยาว

2.6.3 Volatility Drag

การสูญเสียและการฟื้นตัวไม่สมมาตรในหน่วยร้อยละ ถ้าขาดทุน L โดย $0 < L < 1$ ผลตอบแทนที่ต้องได้ในงวดถัดไปเพื่อกลับสู่ทุนเดิมคือ

$$G = \frac{1}{1 - L} - 1 = \frac{L}{1 - L}$$

ตัวอย่างเช่น ขาดทุน 50% ต้องได้กำไร 100% จึงกลับสู่ทุนเดิม ประเด็นนี้เป็นสะพานไปสู่การวัดความผันผวนในบทที่ 3

ในทางปฏิบัติ volatility drag อธิบายได้ว่าทำไมกลยุทธ์สองกลยุทธ์ที่มี arithmetic mean ใกล้กันอาจสร้าง wealth endpoint ต่างกันมาก หากเส้นทางผลตอบแทนมีความผันผวนต่างกัน จึงควรดูทั้งค่าเฉลี่ย ความผันผวน และ cumulative wealth ร่วมกัน

2.7 Money-Weighted Return, IRR และ Modified Dietz

เมื่อมีการเติมหรือถอนเงินระหว่างช่วงลงทุน ประสบการณ์ผลตอบแทนของเจ้าของเงินขึ้นกับทั้งผลการลงทุนและจังหวะของ external cash flows

นี่เป็นจุดที่ต้องแยก “ผลตอบแทนของเงินของผู้ลงทุน” ออกจาก “ผลตอบแทนของกลยุทธ์หรือผู้จัดการพอร์ต” เพราะเงินจำนวนมากที่ถูกเติมก่อนช่วงตลาดลงสามารถทำให้ MWR ต่ำ แม้ผู้จัดการจะสร้าง TWR เท่ากับ benchmark ในทางกลับกัน การเติมเงินก่อนช่วงตลาดขึ้นอาจทำให้ MWR สูงกว่าผลงานเชิงทักษะของผู้จัดการ [4, 14]

2.7.1 Money-Weighted Return และ IRR

ให้ V_0 เป็นมูลค่าพอร์ตเริ่มต้น V_T เป็นมูลค่าพอร์ตปลายช่วงที่เวลา T ปี และให้ C_k เป็นเงินที่เติมเข้าสู่พอร์ตที่เวลา t_k โดยกำหนด $C_k < 0$ เมื่อเป็นการถอนเงิน

บทนิยาม 2.9

Money-Weighted Return (MWR) คืออัตรา $r > -1$ ที่ทำให้

$$V_T = V_0(1+r)^T + \sum_{k=1}^{m} C_k(1+r)^{T-t_k}$$

หรือเทียบเท่ากับ

$$-V_0 - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}} + \frac{V_T}{(1+r)^T} = 0$$

เมื่อช่วงเวลาวัดเป็นปี อัตรา r คือ IRR ของกระแสเงินสดดังกล่าว

สมการ IRR โดยทั่วไปไม่มีคำตอบแบบปิด จึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข เช่น bisection, secant หรือ Newton–

Raphson [62]

ในการคำนวณจริงควรกำหนด sign convention ของกระแสเงินสดให้ชัดเจน และตรวจ residual ของสมการหลังได้คำตอบจากโปรแกรม เช่น แทนค่า r กลับเข้า NPV equation แล้วต้องได้ค่าใกล้ศูนย์ ไม่ควรเชื่อผลจากฟังก์ชัน spreadsheet โดยไม่ตรวจสอบ

ประเด็นที่ต้องระวัง

IRR อาจไม่มีรากจริงที่ยอมรับได้ หรืออาจมีมากกว่าหนึ่งรากเมื่อกระแสเงินสดเปลี่ยนเครื่องหมายหลายครั้ง จึงไม่ควรรายงานผลจากฟังก์ชัน IRR โดยไม่ตรวจรูปของสมการและความสมเหตุสมผลของราก

2.7.2 Modified Dietz Return

เมื่อต้องการประมาณ money-weighted performance โดยไม่แก้สมการ IRR สามารถใช้ Modified Dietz Return

บทนิยาม 2.10

ให้ C_k เป็น external cash flow ที่เวลา t_k ภายในช่วง $[0, T]$ และ

$$w_k = \frac{T - t_k}{T}$$

Modified Dietz Return คือ

$$R_{\text{MD}} = \frac{V_T - V_0 - \sum_{k=1}^{m} C_k}{V_0 + \sum_{k=1}^{m} w_k C_k}$$

น้ำหนัก w_k สะท้อนสัดส่วนของช่วงเวลาที่กระแสเงินสดอยู่ภายใต้การบริหารของพอร์ต วิธีนี้เหมาะเมื่อไม่มี valuation ที่ละเอียดพอสำหรับ TWR ทุกจุดกระแสเงินสด แต่ต้องการมาตรวัดที่ดีกว่าการละเลย timing ของ flows

Modified Dietz จึงเป็นวิธีประมาณที่แลกความละเอียดกับความต้องการข้อมูล สมมติฐานโดยนัยคือผลตอบแทนเกิดค่อนข้างสม่ำเสมอภายในช่วงประเมิน หากตลาดเคลื่อนไหวรุนแรงใกล้จุดที่มี cash flow ขนาดใหญ่ ความคลาดเคลื่อนจากวิธีที่ใช้ valuation จริงทุกจุดอาจเพิ่มขึ้น [4]

2.8 Time-Weighted Return

TWR มีเป้าหมายวัดผลการบริหารสินทรัพย์โดยลดอิทธิพลของจำนวนและจังหวะเงินฝากถอนซึ่งผู้จัดการพอร์ตอาจควบคุมไม่ได้

หลักสำคัญคือแบ่งช่วงที่ไม่มี external cash flow แล้ว chain-link ผลตอบแทนของแต่ละช่วงเข้าด้วยกัน ดังนั้นคุณภาพของ TWR ขึ้นกับความสามารถในการประเมินมูลค่าพอร์ต ณ จุดที่มี flow หาก valuation ผิดหรือ timestamp ของ flow ไม่ตรงกับราคา ผล TWR ก็อาจมี bias ได้ [14]

บทนิยาม 2.11

แบ่งช่วงประเมินออกเป็น m subperiod ที่คั่นด้วย external cash flows ให้ V_{j-1}^{+} เป็นมูลค่าพอร์ตทันทีหลัง flow ณ จุดเริ่ม subperiod และ V_{j}^{-} เป็นมูลค่าพอร์ตทันที ก่อน flow ณ จุดสิ้น subperiod ผลตอบแทน subperiod คือ

$$R_j = \frac{V_j^{-}}{V_{j-1}^{+}} - 1$$

และ Time-Weighted Return ตลอดช่วงคือ

$$R_{\text{TWR}} = \prod_{j=1}^{m} (1 + R_j) - 1$$

2.8.1 MWR กับ TWR ต่างกันอย่างไร

ตารางที่ 2.2: เปรียบเทียบ MWR และ TWR

ประเด็น	MWR/IRR	TWR
คำถามหลัก	เจ้าของเงินได้รับผลตอบแทนจริงเท่าใด	ผู้ จัดการ พอร์ต สร้าง ผล ตอบแทน จาก สินทรัพย์เท่าใด
ผลของ external flow	มีผลโดยตรง	ลดผลผ่านการแบ่ง subperiod
ความไวต่อ timing	สูง	ต่ำกว่าเมื่อมี valuation ณ จุด flow
การใช้งาน	ประสบการณ์ ผู้ ลงทุน หรือ บัญชี ที่ เจ้าของเงินควบคุม flow	เปรียบเทียบผู้จัดการพอร์ตหรือกลยุทธ์ เมื่อ flow อยู่นอกการควบคุม

MWR และ TWR ไม่ใช่ตัวเลขที่แข่งขันกันว่าอันใดถูกกว่า เพราะตอบคำถามคนละแบบ การเลือกมาตรวัดต้องเริ่มจากวัตถุประสงค์ของการประเมิน

กฎเลือก MWR กับ TWR แบบใช้งานจริง

หากคำถามคือ “เจ้าของเงินได้ผลตอบแทนเท่าใดจากเงินที่ใส่จริง” ให้เริ่มจาก MWR หากคำถามคือ “ผู้จัดการหรือกลยุทธ์สร้างผลตอบแทนจากสินทรัพย์ได้เท่าใดโดยตัดผลของเงินฝากถอน” ให้ใช้ TWR และถ้าข้อมูล valuation ไม่ละเอียดพอ อาจใช้ Modified Dietz พร้อมระบุว่าเป็น approximation

2.9 ผลตอบแทนจริง เงินเฟ้อ ค่าเงิน และผลตอบแทนสุทธิ

2.9.1 ผลตอบแทนจริงหลังเงินเฟ้อ

ให้ R_N เป็น nominal return และ π เป็นอัตราเงินเฟ้อในช่วงเดียวกัน

Exact Real Return

$$1 + R_{\text{real}} = \frac{1 + R_N}{1 + \pi}$$

ดังนั้น

$$R_{\text{real}} = \frac{1 + R_N}{1 + \pi} - 1$$

เมื่อ $|R_N|$ และ $|\pi|$ มีขนาดเล็ก

$$R_{\text{real}} \approx R_N - \pi$$

สูตร exact แสดงว่าการปรับเงินเฟ้อเป็นความสัมพันธ์แบบคูณ ไม่ใช่การลบโดยหลักคณิตศาสตร์ การลบตรงเป็นเพียง first-order approximation จึงคลาดเคลื่อนมากขึ้นเมื่อ nominal return หรือ inflation สูง การวางเป้าหมายระยะยาว เช่น เงินเกษียณ ควรใช้ real return เพราะสิ่งที่ผู้ลงทุนต้องการท้ายที่สุดคือกำลังซื้อ ไม่ใช่จำนวนเงินเชิงนาม

ตัวอย่าง 2.9. ถ้า nominal return เท่ากับ 8% และเงินเฟ้อ 3.5%

$$R_{\text{real}} = \frac{1.08}{1.035} - 1 \approx 0.04348 = 4.348\%$$

ขณะที่การลบตรงให้ 4.5% ซึ่งเป็นเพียงค่าประมาณ

2.9.2 ผลตอบแทนของการลงทุนต่างประเทศและอัตราแลกเปลี่ยน

ให้ R_L เป็นผลตอบแทนสินทรัพย์ในสกุลเงินท้องถิ่น และให้ S_t เป็นจำนวนหน่วยสกุลเงินฐานต่อหนึ่งหน่วยสกุลเงินต่างประเทศ นิยาม

$$R_{FX} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

เมื่อ $R_{FX} > 0$ เงินตราต่างประเทศแข็งค่าต่อสกุลฐาน ผลตอบแทนในสกุลฐานคือ

การแยก R_L กับ R_{FX} ทำให้เห็นว่าการลงทุนต่างประเทศมีอย่างน้อยสองแหล่งผลตอบแทน คือผลของสินทรัพย์และผลของค่าเงิน ผู้ลงทุนที่ hedge ค่าเงินบางส่วนจะมี base-currency return ต่างจากสูตร unhedged ด้านล่าง และต้องรวมต้นทุน hedge กับ basis/roll effect ตามสัญญาที่ใช้

ผลตอบแทนในสกุลฐาน

$$1 + R_{\text{base}} = (1 + R_L)(1 + R_{FX})$$

หรือ

$$R_{\text{base}} = R_L + R_{FX} + R_L R_{FX}$$

ตัวอย่าง 2.10. สินทรัพย์ต่างประเทศให้ผลตอบแทนท้องถิ่น 8% และสกุลเงินต่างประเทศแข็งค่าต่อเงินบาท 4%

$$R_{\text{THB}} = (1.08)(1.04) - 1 = 0.1232 = 12.32\%$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

สูตรอัตราแลกเปลี่ยนขึ้นกับนิยามของ S_t หากเปลี่ยนจาก “บาทต่อหนึ่งหน่วยเงินต่างประเทศ” เป็นส่วนกลับ เครื่องหมายและสูตรที่ตีความการแข็งค่าจะเปลี่ยนตาม จึงต้องประกาศ FX convention ทุกครั้ง

2.9.3 ค่าธรรมเนียม ภาษี และผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนได้รับจริง

ผลตอบแทนที่เกี่ยวข้องกับการตัดสินใจของผู้ลงทุนควรระบุอย่างชัดเจนว่าเป็น gross, net of transaction costs, net of management fees หรือ after tax

ถ้า wealth factor ก่อนค่าธรรมเนียมเท่ากับ $1 + R_g$ และค่าธรรมเนียมคิดเป็นสัดส่วน f ของมูลค่าที่เกี่ยวข้อง การประมาณแบบคูณให้

$$1 + R_{\text{net}} \approx (1 + R_g)(1 - f)$$

การหัก $R_g - f$ เป็นค่าประมาณเชิงเส้นที่เหมาะเมื่ออัตรามีขนาดเล็กและฐานการคิดค่าธรรมเนียมสอดคล้องกัน

ภาษีมีรายละเอียดขึ้นกับประเภทสินทรัพย์ สถานะผู้ลงทุน และกฎหมายในช่วงเวลานั้น ตำราจึงเน้นหลักการคำนวณโดยไม่ถืออัตราภาษีเฉพาะเป็นค่าคงที่ถาวร

ในเชิงวิเคราะห์ ควรแยก **ต้นทุนที่เกิดจากการถือ** เช่น management fee ออกจาก **ต้นทุนที่เกิดจากการซื้อขาย** เช่น commission และ market impact เพราะสองส่วนตอบสนองต่อ turnover ต่างกัน ภาษียังอาจมี path dependence จากจังหวะ realizations จึงไม่ควรหัก “อัตราภาษีคงที่” จาก return ทุกงวดโดยไม่ตรวจโครงสร้างจริง

2.10 ผลตอบแทนจากข้อมูลราคา: Corporate Actions และ Total Return

การคำนวณผลตอบแทนจากฐานข้อมูลราคาต้องระวัง corporate actions เพราะราคาก่อนและหลัง stock split, reverse split, dividend, rights issue หรือการกระจายมูลค่าในรูปอื่นอาจไม่เปรียบเทียบกันโดยตรง

หลักคิดคือแยก **การเปลี่ยนมูลค่าทางเศรษฐกิจ** ออกจาก **การเปลี่ยนหน่วยบัญชีของหลักทรัพย์** เช่น stock split ทำให้จำนวนหุ้นและราคาต่อหุ้นเปลี่ยนเชิงกล แต่ไม่ได้สร้างผลตอบแทนให้ผู้ถือทันที หากไม่ปรับข้อมูล ราคาจะดูเหมือนร่วงแรงทั้งที่ความมั่งคั่งไม่เปลี่ยน ส่วนเงินปันผลเป็นกระแสเงินสดจริงและต้องถูกรวมใน total return หาก series ราคายังไม่ได้ปรับ

2.10.1 ราคาดิบ ราคาปรับ และเงินปันผล

ถ้าใช้ raw close และเงินปันผลยังไม่รวมในราคา ต้องคำนวณ total return

$$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

ถ้าผู้ให้ข้อมูลสร้าง adjusted price ที่สะท้อน corporate actions ตาม methodology ที่ชัดเจนแล้ว สามารถคำนวณ return จาก adjusted series ได้โดยไม่เติมเงินปันผลซ้ำ

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า “Adjusted Close” ไม่ได้มีวิธีคำนวณเหมือนกันทุกผู้ให้ข้อมูล ก่อนรวมข้อมูลจากหลายแหล่งต้องตรวจ metadata ว่าปรับ stock split, cash dividend, rights, spin-off และภาษีหัก ณ ที่จ่ายอย่างไร

2.10.2 Wealth Index และ Total-Return Index

กำหนด wealth index เริ่มต้นเป็น

$$W_0 = 100$$

แล้วอัปเดตด้วย

$$W_t = W_{t-1}(1 + R_t) = 100 \prod_{s=1}^{t}(1 + R_s)$$

wealth index ช่วยให้เห็นผลของการทบต้นและใช้เปรียบเทียบกลยุทธ์กับ benchmark ได้ เมื่อทั้งสองถูกสร้างจาก return convention เดียวกัน

การ plot wealth index ยังช่วยตรวจข้อมูลผิดปกติได้ หาก index กระโดดอย่างไม่สมเหตุสมผลในวันที่มี split หรือ dividend อาจบ่งชี้ว่าปรับ corporate action ซ้ำหรือไม่ได้ปรับเลย ในงาน backtest ควรสร้าง wealth index ทั้งกลยุทธ์และ benchmark จาก pipeline เดียวกันเพื่อรักษา benchmark symmetry

2.11 การเตรียมข้อมูลราคาและสร้างเมทริกซ์ผลตอบแทน

การวิเคราะห์เชิงปริมาณเริ่มก่อนการคำนวณสูตร ขั้นตอนการสร้าง return series ต้องตรวจสอบ calendar, corporate actions, currency, missing observations และความสอดคล้องของ timestamps

ข้อเท็จจริงสำคัญคือ “ข้อมูลราคาวันเดียวกัน” ไม่ได้แปลว่าเป็น information set เดียวกันเสมอ ตลาดในเอเชีย ยุโรป และสหรัฐปิดคนละเวลา ข้อมูล macro อาจประกาศหลังตลาดปิด และราคาบางประเภทเป็น indicative quote ไม่ใช่ executed price งานเชิงปริมาณจึงต้องแยก trade date, timestamp และเวลาที่ข้อมูลพร้อมให้ผู้

ลงทุนใช้งานจริง

2.11.1 การจัดแนววันซื้อขายและข้อมูลที่หายไป

สินทรัพย์ต่างตลาดอาจมีวันหยุดและเวลาปิดตลาดไม่ตรงกัน การนำราคา “วันที่เดียวกัน” มาคำนวณ covariance โดยไม่ตรวจเวลาอาจสร้าง nonsynchronous-trading bias

หลักปฏิบัติที่สำคัญ ได้แก่

1. กำหนด timezone และ timestamp convention พร้อมแยก event time ออกจากวันที่ในไฟล์
2. ระบุว่าราคาเป็น open, close, VWAP, settlement price, clean price หรือราคาอื่น
3. ตรวจวันหยุดตลาดและ missing observations พร้อมแยก missing จาก no-trade/stale quote
4. หลีกเลี่ยงการ forward-fill ราคาข้ามช่วงยาวโดยไม่ประเมินผลต่อ return และ volatility
5. ตรวจ corporate actions, delisting และการเปลี่ยน identifier ของหลักทรัพย์
6. ตรวจสกุลเงิน หน่วยราคา และตัวคูณสัญญาก่อนรวมหลายตลาด
7. ใช้ universe ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่มีอยู่จริง ณ เวลานั้นเมื่อทำ backtest เพื่อลด survivorship และ look-ahead bias

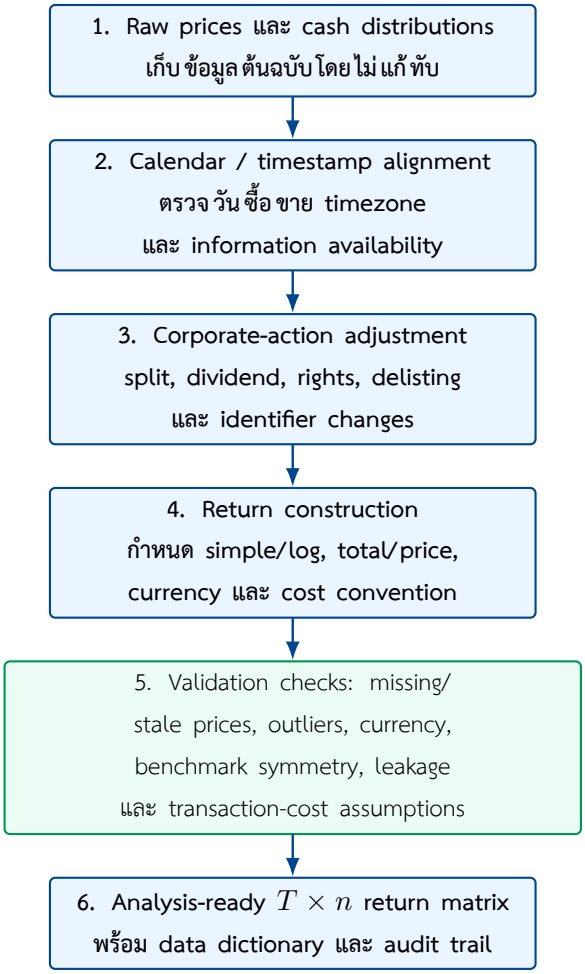
2.11.2 เมทริกซ์ผลตอบแทน

สำหรับสินทรัพย์ n รายการและข้อมูลผลตอบแทน T งวด กำหนด

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{2,1} & \cdots & R_{n,1} \\ R_{1,2} & R_{2,2} & \cdots & R_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1,T} & R_{2,T} & \cdots & R_{n,T} \end{bmatrix}$$

หนึ่งแถวแทนหนึ่งช่วงเวลาและหนึ่งคอลัมน์แทนหนึ่งสินทรัพย์ เมทริกซ์นี้เป็นข้อมูลตั้งต้นของการประมาณค่าเฉลี่ย covariance, correlation, factor exposure และ portfolio risk ในบทถัดไป

ก่อนส่งเมทริกซ์นี้เข้าสู่แบบจำลอง ควรตรวจอย่างน้อยว่าแต่ละคอลัมน์ใช้ return convention เดียวกัน จำนวนแถวหลัง alignment สอดคล้องกัน ไม่มีค่าผิดปกติจาก corporate actions และไม่มีข้อมูลอนาคตแทรกเข้ามา หากการจัดแนวข้อมูลผิด แม้สูตร covariance หรือ optimization ถูกต้อง ผลลัพธ์ก็ยังผิดเชิงเศรษฐกิจได้



รูปที่ 2.2: กระบวนการสร้างข้อมูลผลตอบแทนจากราคาดิบสู่เมทริกซ์ที่พร้อมใช้ โดยแทรกการตรวจเวลา corporate actions และ validation ก่อนเข้าสู่แบบจำลอง

หลัก Data Lineage ของผลตอบแทน

ทุก return series ควรสามารถย้อนกลับได้ว่าใช้แหล่งข้อมูลใด ช่วงเวลาใด ราคาแบบใด ปรับ corporate actions อย่างไร ใช้ simple หรือ log return รวมเงินปันผลหรือไม่ ใช้สกุลเงินใด และหักต้นทุนใดแล้วบ้าง นอกจากนี้ควรเก็บ raw data แยกจาก processed data และบันทึก code/version หรือ transformation rule เพื่อให้สร้างผลลัพธ์เดิมซ้ำได้

2.12 การเลือกมาตรวัดผลตอบแทนให้เหมาะกับปัญหา

การมีมาตรวัดหลายรูปแบบไม่ได้หมายความว่าสูตรหนึ่งดีกว่าอีกสูตรในทุกกรณี แต่แต่ละสูตรตอบคำถามต่างกัน

การเลือกผิดมาตรวัดอาจทำให้ข้อสรุปผิดแม้คำนวณถูก เช่น ใช้ MWR ตัดสินผู้จัดการที่ควบคุมเงินฝากถอนไม่ได้ ใช้ price return เทียบกับ total-return benchmark หรือใช้ nominal return วางเป้าหมายกำลังซื้อระยะยาว ตารางต่อไปจึงควรอ่านเป็น “decision map” มากกว่ารายการสูตร

ตารางที่ 2.3: แผนที่การเลือกมาตรวัดผลตอบแทน

คำถาม	มาตรวัดที่เหมาะ	เหตุผลหรือข้อควรระวัง
ผลตอบแทนสินทรัพย์หนึ่งงวด	Simple total return	รวม price change และ cash distribution
รวมผลตอบแทนหลายงวด	Cumulative simple return หรือ sum of log returns	simple ใช้ product ส่วน log ใช้ sum
อัตราทบต้นคงที่ต่อปี	Geometric/ annualized effective return	รักษา wealth endpoint
ค่าเฉลี่ยผลตอบแทนหนึ่งงวด	Arithmetic mean	ไม่เท่ากับ CAGR โดยทั่วไป
ตราสารตลาดเงิน	BDY, HPY, MMY, EAY ตาม convention	ต้อง ตรวจ ฐาน ราคา day-count และ compounding
ประสบการณ์เจ้าของเงิน	MWR/IRR	สะท้อนขนาดและ timing ของ external cash flows
ประเมินผู้จัดการพอร์ต	TWR	ลด อิทธิพล ของ flows ที่ อยู่ นอก การควบคุม
ข้อมูล valuation ไม่ ละเอียด ทุก flow	Modified Dietz	เป็น money-weighted approximation ที่ใช้ timing weights
การเปลี่ยนแปลงกำลังซื้อ	Real return	ปรับเงินเฟ้อด้วย exact multiplicative relation
การลงทุนต่างประเทศ	Base-currency return	รวม local asset return กับ FX return
งานเชิงปริมาณ	Simple หรือ log return ที่นิยามชัด	ต้อง จัด แนว เวลา corporate actions และ costs ก่อน

คำถาม 4 ข้อสำหรับเลือก return measure

ก่อนเลือกสูตร ให้ถามว่า **(1) วัดสินทรัพย์หรือเจ้าของเงิน (2) มี external cash flow หรือไม่ (3) ต้องเปรียบเทียบข้ามช่วงเวลา/สกุลเงิน/เงินเฟ้อหรือไม่** และ **(4) ต้องการ gross หรือ implementable net return** หากตอบสี่ข้อนี้ได้ การเลือกมาตรวัดส่วนใหญ่จะชัดเจนขึ้น

2.13 Investment Lab และ Workshop

Investment Lab: Return Engineering Lab

วัตถุประสงค์ สร้างชุดข้อมูลผลตอบแทนที่ตรวจสอบย้อนกลับได้และเปรียบเทียบมาตรวัดผลตอบแทนหลายแบบ

ส่วนที่ A: One-Period Return

1. เลือกหลักทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการ
2. ดึงราคาและข้อมูลเงินปันผลหรือ corporate actions
3. คำนวณ price return และ total return
4. เปรียบเทียบ simple return กับ log return

ส่วนที่ B: Compounding

1. สร้าง cumulative wealth index จากเงินเริ่มต้น 100
2. คำนวณ arithmetic mean และ geometric mean
3. ตรวจสอบว่า geometric mean รักษา wealth endpoint

ส่วนที่ C: Cash-Flow Performance

1. สร้างตัวอย่างพอร์ตที่มีเงินฝากหรือถอนอย่างน้อย 3 ครั้ง
2. คำนวณ MWR/IRR, Modified Dietz และ TWR
3. อธิบายเหตุผลที่ค่าทั้งสามต่างกัน

ส่วนที่ D: Data Quality

1. สร้าง return matrix และตรวจ timestamp alignment
2. ตรวจ missing dates, stale prices, outliers และ corporate actions
3. บันทึก data dictionary, return convention, currency และ transaction-cost assumption
4. สร้าง audit trail ที่ทำให้ผู้อื่นสามารถย้อนจาก return matrix กลับไปยัง raw data ได้

ผลส่งมอบขั้นต่ำ

1. ตารางเปรียบเทียบ simple, log, gross, net, nominal และ real return อย่างน้อยหนึ่งสินทรัพย์
2. กราฟ wealth index ของสินทรัพย์/กลยุทธ์และ benchmark ภายใต้ convention เดียวกัน
3. ตารางเปรียบเทียบ MWR, Modified Dietz และ TWR พร้อมคำอธิบายสาเหตุที่ต่างกัน
4. ไฟล์ data dictionary และบันทึกขั้นตอน cleaning/adjustment ที่ทำซ้ำได้

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์ของผลตอบแทนจากระดับหนึ่งงวดไปสู่หลายงวด เริ่มจาก total simple return และ log return แล้วเชื่อมไปยัง holding-period return การทำให้เป็นรายปี อัตราในนามและอัตราที่เป็นผล ตลอดจน convention ของตราสารตลาดเงิน ได้แก่ BDY, HPY, MMY และ EAY

เมื่อมี external cash flows ต้องแยกคำถามของผู้ลงทุนออกจากคำถามของผู้จัดการพอร์ต MWR/IRR สะท้อนประสบการณ์ของเจ้าของเงิน Modified Dietz เป็นวิธีประมาณที่คำนึงถึง timing ของ flows ส่วน TWR ลดอิทธิพลของ flows ผ่านการแบ่ง subperiod

ผลตอบแทนที่ใช้ในการตัดสินใจจริงยังต้องพิจารณาเงินเฟ้อ อัตราแลกเปลี่ยน ต้นทุน ค่าธรรมเนียม และภาษีตามบริบท ขณะที่การวิเคราะห์เชิงปริมาณต้องเริ่มจากข้อมูลราคาที่ปรับ corporate actions จัดแนวเวลา และระบุ return convention อย่างชัดเจนก่อนสร้างเมทริกซ์ผลตอบแทน

สาระสำคัญในเชิงปฏิบัติคือ “ผลตอบแทนไม่ใช่เพียงสูตร แต่เป็นผลลัพธ์ของ convention และข้อมูล” ตัวเลข return ที่น่าเชื่อถือจึงต้องตอบได้ว่าเริ่มจากราคาใด รวม cash flow อะไร ใช้เวลาและสกุลเงินใด หักต้นทุนอะไร และวัดจากมุมมองของใคร การรักษาวินัยนี้ทำให้บทความเสี่ยง การสร้างพอร์ต และการประเมินผลในบทถัดไปมีฐานข้อมูลที่ถูกต้องและตรวจสอบได้

คำศัพท์สำคัญ

- Simple return
- Total return
- Log return
- Wealth relative
- Holding-Period Return
- Annualized return
- Effective annual rate
- Nominal rate
- Bank Discount Yield
- Money Market Yield
- Effective Annual Yield
- Arithmetic mean

- Geometric mean
- Volatility drag
- Money-Weighted Return
- Internal Rate of Return
- Modified Dietz Return
- Time-Weighted Return
- Real return
- FX return
- Adjusted price
- Total-return index
- Data lineage

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. หุ้นมีราคาต้นงวด 80 บาท ราคาปลายงวด 84 บาท และจ่ายเงินปันผล 2 บาท จงหา price return, income yield และ total return
2. ถ้าผลตอบแทนสามงวดเท่ากับ 10%, -5% และ 8% จงหาผลตอบแทนสะสมและ log return สะสม
3. พิสูจน์ว่า simple return สะสมหลายงวดต้องใช้ผลคูณของ wealth relatives ไม่ใช่ผลบวกของ simple returns
4. เงินลงทุนให้ผลตอบแทน 12% ใน 18 เดือน จงหา annualized effective return
5. อัตราในนาม 7.2% ต่อปี คิดทบต้นรายเดือน มี effective annual rate เท่าใด
6. ตั๋วเงินคลังมูลค่าที่ตราไว้ 100,000 บาท ซื้อที่ 98,500 บาท เหลืออายุ 90 วัน จงหา BDY, HPY, MMY และ EAY
7. พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่าง BDY และ MMY สำหรับตราสารส่วนลด
8. ผลตอบแทนสี่ปีเท่ากับ 15%, -10%, 20% และ 5% จงหา arithmetic mean และ geometric mean
9. หากพอร์ตขาดทุน 30% ต้องได้ผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์จึงกลับสู่ทุนเดิม
10. พอร์ตเริ่มต้น 1,000,000 บาท มีการเติมเงิน 200,000 บาทเมื่อครบครึ่งปี และปลายปีมีมูลค่า 1,300,000 บาท จงตั้งสมการ MWR
11. สร้างตัวอย่าง external cash flows ที่ทำให้ MWR และ TWR แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ พร้อมอธิบายสาเหตุ
12. nominal return เท่ากับ 9% และเงินเฟ้อ 4% จงหา exact real return และค่าประมาณแบบลบตรง
13. หุ้นต่างประเทศให้ local return 6% ขณะที่เงินตราต่างประเทศอ่อนค่าต่อเงินบาท 8% จงหาผลตอบแทนในเงินบาท
14. อธิบายความผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ adjusted close แล้วเติมเงินปันผลซ้ำอีกครั้ง
15. สร้าง return matrix สำหรับหลักทรัพย์อย่างน้อย 4 รายการและระบุขั้นตอนตรวจสอบ missing dates

กับ corporate actions

16. กลยุทธ์ A ให้ gross return 12% และ turnover สูง ส่วนกลยุทธ์ B ให้ gross return 10.5% และ turnover ต่ำ จงกำหนดสมมติฐานต้นทุนอย่างน้อย 3 กรณีและวิเคราะห์ว่าจุดใดอันดับผลตอบแทนสุทธิเปลี่ยน
17. สร้างกรณีที่ MWR ต่ำกว่า TWR อย่างชัดเจนโดยให้มี external cash flow ขนาดใหญ่ก่อนช่วงขาดทุน แล้วอธิบายว่าเหตุใดความแตกต่างนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นความผิดของผู้จัดการพอร์ต
18. เลือกหุ้นต่างประเทศหนึ่งหลักทรัพย์และออกแบบขั้นตอนคำนวณผลตอบแทนเงินบาทที่ตรวจสอบได้ ตั้งแต่ local total return, FX convention, fee/hedging cost จนถึง net base-currency return

คำถามชวนคิด

1. เหตุใด log return จึงสะดวกในการรวมผลตอบแทนตามเวลา แต่ไม่ควรใช้แทน simple return ของพอร์ตโดยอัตโนมัติ
2. หากสองกองทุนมี arithmetic mean เท่ากัน กองทุนที่มี geometric mean ต่ำกว่าสื่อถึงอะไรเกี่ยวกับเส้นทางความมั่งคั่ง
3. MWR ที่ต่ำกว่า TWR จำเป็นต้องหมายความว่าผู้จัดการพอร์ตบริหารไม่ดีหรือไม่
4. การ annualize ผลตอบแทนระยะสั้นมากสามารถสร้างความเข้าใจผิดอย่างไร
5. เหตุใด data engineering ของผลตอบแทนจึงเป็นส่วนหนึ่งของแบบจำลองทางการเงิน ไม่ใช่เพียงขั้นตอนเตรียมข้อมูล
6. หากผลตอบแทนจาก backtest สูงมาก แต่ผลลัพธ์เปลี่ยนอย่างมีนัยสำคัญเมื่อใช้ adjusted-price source คนละราย เราควรสรุปอะไรเกี่ยวกับ model risk และ data risk ของกลยุทธ์นั้น

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 2

[4] Carl R. Bacon. *Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution*. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

[13] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, and A. Craig MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

[14] CFA Institute. *2020 Global Investment Performance Standards (GIPS) for Firms*. CFA Institute. Charlottesville, VA, 2020.

[59] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010.

[62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.

[69] Wichai Witayakiattilerd and Wararit Panichkitkosolkul. “Robust Backtesting of Bollinger Bands with Alternative Moving Averages: An Empirical Study on SET50 Stocks”. In: *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science* 12 (2026), pp. 96–118. DOI: 10.58715/bangmodjmcs.2026.12.6.

บทที่ 3 คณิตศาสตร์ของความเสี่ยงการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายความเสี่ยงของผลตอบแทนในฐานะตัวแปรสุ่ม และคำนวณค่าคาดหมาย ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้
2. คำนวณและตีความ covariance, correlation และ covariance matrix พร้อมเข้าใจข้อจำกัดของ correlation
3. แยกความเสี่ยงรวม ความเสี่ยงด้านลบ ความเสี่ยงเชิงระบบ ความเสี่ยงเทียบ benchmark ความเสี่ยงตามเส้นทาง และ tail risk ออกจากกันได้
4. คำนวณ downside deviation, beta, tracking error และ maximum drawdown ได้อย่างถูกต้องตามนิยาม
5. นิยามและคำนวณ Value-at-Risk (VaR) และ Expected Shortfall (ES/CVaR) ด้วยวิธีพาราเมตริกและ Historical Simulation ได้
6. อธิบาย EWMA volatility และเหตุผลที่แบบจำลองความเสี่ยงต้องได้รับการตรวจสอบด้วยข้อมูลจริง
7. เลือกมาตรวัดความเสี่ยงให้สอดคล้องกับคำถามการลงทุน แทนการใช้ตัวเลขเพียงตัวเดียวแทนความเสี่ยงทั้งหมด
8. สร้าง risk summary จากข้อมูลผลตอบแทนโดยระบุ data lineage, convention, horizon และสมมติฐานอย่างชัดเจน
9. แยกความแตกต่างระหว่าง **แหล่งความเสี่ยง มาตรวัดความเสี่ยง** และ **เกณฑ์ตัดสินใจ/เพดานความเสี่ยง** เพื่อไม่ใช้ตัวเลขเดียวแทนความเสี่ยงทุกมิติ
10. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของ risk estimate จากข้อมูลจริง โดยพิจารณา sample window, parameter uncertainty, regime change และผล backtesting ก่อนนำไปใช้กำหนดสถานะหรือวงเงิน

3.1 บทนำ: ความเสี่ยงไม่ใช่ตัวเลขเดียว

บทที่ 2 เปลี่ยนราคาและกระแสเงินสดให้เป็นอนุกรมผลตอบแทน บทนี้พัฒนาคำถามต่อไปว่า **ผลตอบแทนดังกล่าวไม่แน่นอนเพียงใด และความไม่แน่นอนแบบใดมีความสำคัญต่อการตัดสินใจลงทุน** กรอบพื้นฐานของ expected return, variance, covariance และ correlation เชื่อมต่อจากเอกสาร ส.247 และตำราคณิตศาสตร์การเงินของผู้เขียน ขณะที่ tail-risk framework เชื่อมกับวรรณกรรมมาตรฐานด้าน quantitative risk management [61, 62, 34]

คำว่า “ความเสี่ยง” ในการลงทุนมีหลายมิติ ความผันผวนเป็นเพียงมิติหนึ่ง ผู้ลงทุนอาจสนใจความน่าจะเป็นที่ผลตอบแทนต่ำกว่าเป้าหมาย ความไวต่อการเคลื่อนไหวของตลาด การเบี่ยงเบนจาก benchmark การลดลงจากจุดสูงสุดเดิม หรือความเสียหายรุนแรงบริเวณหางซ้ายของการแจกแจง

ดังนั้น การวัดความเสี่ยงที่ดีต้องเริ่มจากคำถามก่อนเลือกสูตร ไม่ใช่เลือกสูตรแล้วพยายามให้ตัวเลขเดียวอธิบายความเสี่ยงทุกชนิด

สามชั้นที่ต้องแยกก่อนวัดความเสี่ยง

การวิเคราะห์ที่ใช้จริงควรแยก **(1) แหล่งความเสี่ยง** เช่น ตลาด ดอกเบี้ย เครดิต หรือสภาพคล่อง **(2) มาตรวัดความเสี่ยง** เช่น SD, beta, MDD, VaR และ ES และ **(3) กฎตัดสินใจ** เช่น position limit, risk budget หรือ trigger สำหรับการลดสถานะ ทั้งสามชั้นเชื่อมกันแต่ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน ตัวอย่างเช่น VaR เป็นมาตรวัด tail threshold ไม่ใช่เพดานการขาดทุน และไม่ใช่สาเหตุของความเสี่ยง

อีกประเด็นที่สำคัญคือการแยก **ex ante risk** ออกจาก **ex post realized loss** ค่า volatility หรือ VaR ที่ประมาณก่อนลงทุนเป็นการสรุป distribution ภายใต้ข้อมูลและแบบจำลอง ณ เวลานั้น ส่วนผลขาดทุนที่เกิดจริงเป็นเพียงหนึ่ง realization จาก distribution ดังกล่าว การที่วันหนึ่งไม่ขาดทุนจึงไม่ได้พิสูจน์ว่าแบบจำลองถูก และการเกิดขาดทุนเกิน VaR เพียงครั้งเดียวก็ไม่ได้พิสูจน์ว่าแบบจำลองผิดโดยอัตโนมัติ ต้องพิจารณาความถี่และรูปแบบของ exceptions ตลอดช่วงทดสอบ

ข้อสังเกต

ขอบเขตของบทนี้ เน้นมาตรวัดความเสี่ยงในระดับสินทรัพย์หรืออนุกรมผลตอบแทน เพื่อสร้างภาษากลางสำหรับบทถัดไป การรวมความเสี่ยงของพอร์ตหลายสินทรัพย์ด้วยเมทริกซ์ covariance จะพัฒนาในบทที่ 6 ส่วน portfolio VaR, risk limits, stress testing และ formal backtesting จะพัฒนาในบทที่ 11



รูปที่ 3.1: แผนที่มาตรวัดความเสี่ยงตามคำถามที่ต้องการตอบ โดยแยก dispersion, dependence, downside, relative/path และ tail risk ออกจากกัน

3.2 ผลตอบแทนในฐานะตัวแปรสุ่ม

ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มแทนอัตราผลตอบแทนหนึ่งงวด หาก R เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่รับค่า $r_1, \dots, r_m$ ด้วยความน่าจะเป็น $p_1, \dots, p_m$ โดย

$$p_j \geq 0 \qquad \text{และ} \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

บทนิยาม 3.1

ค่าคาดหมายของผลตอบแทนคือ

$$\mu = \mathbb{E}(R) = \sum_{j=1}^{m} p_j r_j$$

ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคือ

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(R) = \mathbb{E}[(R-\mu)^2] = \sum_{j=1}^{m} p_j (r_j - \mu)^2$$

และ

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(R)}$$

ถ้า R เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มี density $f_R(r)$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} r f_R(r)\ \mathrm{d}r$$

และ

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (r-\mu)^2 f_R(r)\ \mathrm{d}r$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีหน่วยเดียวกับผลตอบแทน จึงตีความได้สะดวกกว่าความแปรปรวน แต่ทั้งสองมาตรวัดให้ความสำคัญกับความเบี่ยงเบนด้านบวกและด้านลบแบบสมมาตร

ข้อสังเกต

ค่าคาดหมายไม่ใช่ผลตอบแทนที่คาดว่าจะเกิดทุกงวด ค่า μ เป็นค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็นของ distribution ไม่ใช่คำพยากรณ์แบบจุดของผลตอบแทนงวดถัดไป ในทำนองเดียวกัน $\sigma = 10\%$ ไม่ได้หมายความว่าจะขาดทุนไม่เกิน 10% แต่บอกขนาดการกระจายภายใต้ distribution ที่ใช้ การแปลง volatility เป็น probability of loss หรือ tail loss ต้องอาศัยข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับรูปการแจกแจง

ข้อจำกัดเชิงแนวคิดของ variance คือผลตอบแทนที่สูงกว่าค่าเฉลี่ยมากถูกนับเป็น “ความเสี่ยง” เช่นเดียวกับผลตอบแทนต่ำกว่าค่าเฉลี่ยมาก แม้ผู้ลงทุนส่วนใหญ่ไม่ถือ upside surprise เป็นความเสียหาย ปัญหานี้เป็นเหตุผลหนึ่งที่ต้องมี downside measures และ tail measures ในหัวข้อถัดไป

ตัวอย่าง 3.1. สมมติผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีสี่สถานการณ์

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (-12\%, -2\%, 8\%, 18\%)$$

และ

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.10, 0.20, 0.40, 0.30)$$

จะได้

$$\mu = 0.10(-0.12) + 0.20(-0.02) + 0.40(0.08) + 0.30(0.18) = 0.07$$

และ

$$\sigma^2 = 0.0089$$

ดังนั้น

$$\sigma \approx 0.09434 = 9.434\%$$

ผลตอบแทนคาดหมายเท่ากับ 7% ต่อหนึ่งงวด ขณะที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประมาณ 9.43%

3.2.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง

เมื่อมีข้อมูลผลตอบแทน $R_1, \dots, R_T$ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างคือ

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

ความแปรปรวนตัวอย่างแบบใช้ตัวหาร $T-1$ คือ

Sample Mean และ Sample Variance

$$s^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2$$

และ

$$s = \sqrt{s^2}$$

ตัวหาร $T-1$ ให้ sample variance แบบ unbiased ภายใต้กรอบการสุ่มตัวอย่างมาตรฐาน หากข้อมูลที่มีถูกนิยามให้เป็นประชากรทั้งหมดที่สนใจ อาจใช้ตัวหาร T ได้ แต่ต้องระบุ convention ให้ชัดเจน

ในเชิงปฏิบัติ การเลือก $T-1$ แก้เพียง bias เชิงพีชคณิตของ estimator ภายใต้สมมติฐานมาตรฐาน แต่ไม่ได้ทำให้ค่าประมาณ “แม่น” โดยอัตโนมัติ หากตัวอย่างสั้น มี outlier หรือครอบคลุมเพียง regime เดียว ค่า $\bar{R}$ และ s ยังมี sampling uncertainty สูง จึงควรรายงาน sample period และตรวจ sensitivity ต่อ rolling window ควบคู่กับค่าประมาณจุดเดียว

หลักตรวจสอบค่าความเสี่ยงจากข้อมูลตัวอย่าง

คำนวณอย่างน้อยสามแบบควบคู่กัน: **full-sample estimate** เพื่อเห็นภาพรวม **rolling estimate** เพื่อเห็นการเปลี่ยนตามเวลา และ **stress/subsample estimate** เพื่อดูว่าค่าความเสี่ยงเปลี่ยนมากเพียงใดเมื่อเข้าสู่ช่วงวิกฤต หากข้อสรุปเปลี่ยนแรงเมื่อขยับหน้าต่างข้อมูลเพียงเล็กน้อย ควรถือว่า estimation risk มีนัยสำคัญ

ข้อสังเกต

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของผลตอบแทนหนึ่งงวด และค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของอัตราการเติบโตหลายงวดตอบคำถามต่างกัน บทที่ 2 แยกสองแนวคิดนี้ไว้แล้ว ในบทนี้ μ หรือ $\bar{R}$ ทำหน้าที่เป็นตำแหน่งศูนย์กลางของการแจกแจงผลตอบแทนสำหรับการวัดความเสี่ยง

3.2.2 การทำให้ความผันผวนเป็นรายปี

ถ้าผลตอบแทนแต่ละงวดมีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันและไม่สัมพันธ์กันตามเวลาโดยประมาณ ความแปรปรวนของผลรวม N งวดคือ

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{t=1}^{N} R_t\right) = N\sigma^2$$

จึงได้กฎ square-root-of-time

Volatility Scaling

$$\sigma_{\text{ann}} \approx \sqrt{N}\,\sigma_{\text{period}}$$

สำหรับข้อมูลรายวันมักใช้ $N \approx 252$ วันซื้อขายต่อปี

$$\sigma_{\text{ann}} \approx \sqrt{252}\,\sigma_{\text{day}}$$

สูตรนี้มีที่มาจากการบวก variance ของผลตอบแทนหลายงวดเมื่อ covariance ข้ามเวลาประมาณศูนย์ หากมี serial correlation จะเกิด cross-covariance terms เพิ่มขึ้นและกฎ $\sqrt{N}$ ไม่ตรงอีกต่อไป ดังนั้นการ annualize จึงเป็น **model-based conversion** ไม่ใช่เพียงการเปลี่ยนหน่วยเหมือนเซนติเมตรเป็นเมตร

ประเด็นที่ต้องระวัง

กฎ $\sqrt{N}$ เกิดจากสมมติฐานเกี่ยวกับ dependence และความคงที่ของ variance ไม่ใช่กฎทางบัญชี หากผลตอบแทนมี autocorrelation, volatility clustering, structural break หรือ regime change การ scaling แบบนี้อาจทำให้ประมาณความเสี่ยงผิด

3.2.3 Coefficient of Variation และข้อจำกัด

สัมประสิทธิ์ความแปรผันนิยามเป็น

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

CV อาจใช้เปรียบเทียบความผันผวนต่อหนึ่งหน่วยผลตอบแทนคาดหมายเมื่อ $\mu > 0$ และอยู่ห่างจากศูนย์พอสมควร แต่เมื่อ $\mu \leq 0$ หรือใกล้ศูนย์ ตัวเลขนี้อาจไม่เสถียรหรือไม่มีความหมายเชิงอันดับที่น่าเชื่อถือ

ตัวอย่างเช่น หากสินทรัพย์ A มี $\mu = 0.2\%$ และ $\sigma = 2\%$ จะได้ CV $= 10$ แต่หากประมาณค่าเฉลี่ยเปลี่ยนเพียงเล็กน้อยเป็น 0.1% ค่า CV จะกระโดดเป็น 20 ทั้งที่ volatility ไม่เปลี่ยน จึงไม่ควรใช้ CV จัดอันดับหลักทรัพย์เมื่อ expected return มีค่าเล็กหรือไม่เสถียร

3.2.4 Skewness และ Kurtosis

Variance ไม่บอกว่าการแจกแจงมีความเบ้หรือหางหนาเพียงใด ในข้อมูลการเงิน skewness ด้านลบและ excess kurtosis ที่สูงสามารถทำให้ความเสี่ยงด้านขาดทุนรุนแรงมากกว่าที่แบบจำลองปกติสื่อ การวิเคราะห์ความเสี่ยงจึงไม่ควรหยุดเพียง mean และ standard deviation

ในเชิงตีความ **negative skewness** หมายถึงหางด้านผลตอบแทนต่ำมีแนวโน้มยาวหรือรุนแรงกว่าด้านบวก ขณะที่ **high excess kurtosis** บ่งชี้ว่าการแจกแจงมีมวลบริเวณหางมากกว่าการแจกแจงปกติในบางลักษณะ อย่างไรก็ตามค่าประมาณ moment ลำดับสูงไวต่อ outlier มาก จึงควรใช้ร่วมกับ histogram, empirical quantiles และ tail measures มากกว่าตีความจากตัวเลขเพียงค่าเดียว

3.3 Covariance และ Correlation

ความ ผันผวน ของ สินทรัพย์ ราย ตัว ไม่ ได้ บอก ว่า สินทรัพย์ สอง ตัว เคลื่อนไหว ร่วม กัน อย่างไร การ พิจารณา dependence จึงเป็นพื้นฐานของการกระจายการลงทุน [33]

บทนิยาม 3.2

สำหรับผลตอบแทน R_i และ R_j ที่มีค่าเฉลี่ย μ_i และ μ_j

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \mathbb{E}[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$$

ถ้า $\sigma_i, \sigma_j > 0$ correlation คือ

$$\rho_{ij} = \mathrm{Corr}(R_i, R_j) = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Covariance มีหน่วยเป็นผลตอบแทนกำลังสอง ส่วน correlation ไม่มีหน่วยและอยู่ในช่วง $[-1, 1]$

Correlation จึงเหมาะกับการเปรียบเทียบความสัมพันธ์เชิงเส้นของคู่สินทรัพย์ที่มี scale ต่างกัน แต่การไม่มีหน่วยก็ทำให้ข้อมูลเรื่อง “ขนาดความเสี่ยง” หายไป คู่สินทรัพย์สองคู่สามารถมี correlation เท่ากัน แต่คู่ที่มี volatility สูงกว่าย่อมสร้าง covariance และผลต่อความเสี่ยงพอร์ตมากกว่า

ทฤษฎีบท 3.1

ถ้า R_i และ R_j มี variance บวกและจำกัด แล้ว

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

พิสูจน์. ให้

$$X = R_i - \mu_i \qquad \text{และ} \qquad Y = R_j - \mu_j$$

จาก Cauchy–Schwarz inequality ใน L^2

$$|\mathbb{E}(XY)|^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = \sigma_i^2 \sigma_j^2$$

จึงได้

$$|\operatorname{Cov}(R_i, R_j)| \leq \sigma_i \sigma_j$$

เมื่อหารด้วย $\sigma_i \sigma_j > 0$ จะได้

$$|\rho_{ij}| \leq 1$$

□

3.3.1 การประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง

sample covariance นิยามเป็น

$$s_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

และ sample correlation คือ

$$\widehat{\rho}_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}$$

สำหรับสินทรัพย์ n รายการสามารถรวบรวม covariance เป็นเมทริกซ์

$$\widehat{\Sigma} = (s_{ij})_{n \times n}$$

เมทริกซ์ covariance ควรสมมาตรและ positive semidefinite ในเชิงทฤษฎี แต่การประมาณจากข้อมูลจริงอาจมีปัญหา numerical instability เมื่อจำนวนสินทรัพย์มากเมื่อเทียบกับจำนวน observations

ในทางปฏิบัติ correlation ยังมี **regime dependence** ด้วย ความสัมพันธ์ที่ต่ำในภาวะปกติอาจเพิ่มขึ้นพร้อมกันในช่วง market stress ทำให้ประโยชน์จาก diversification ลดลงในเวลาที่ต้องการมากที่สุด ดังนั้นการใช้ correlation matrix เพื่อสร้างพอร์ตควรมีทั้ง rolling estimates และ stressed correlations ไม่ควรอาศัยค่าเฉลี่ยระยะยาวเพียงชุดเดียว

ตัวอย่าง 3.2. ให้ผลตอบแทนสองสินทรัพย์ในสี่สถานการณ์เป็น

$$R_A = (-10\%, 2\%, 8\%, 16\%)$$

และ

$$R_B = (12\%, 5\%, 2\%, -6\%)$$

ด้วยความน่าจะเป็น

$$(0.10, 0.20, 0.40, 0.30)$$

จะได้

$$\mu_A = 7.4\% \qquad \text{และ} \qquad \mu_B = 1.2\%$$

รวมทั้ง

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = -0.004128$$

และ

$$\rho_{AB} \approx -0.9800$$

ค่าดังกล่าวบ่งชี้ความสัมพันธ์เชิงเส้นสวนทางกันสูงในชุดสถานการณ์สมมติ แต่การใช้ข้อมูลจริงต้องตรวจความเสถียรของ correlation ตามเวลา

ประเด็นที่ต้องระวัง

Correlation ใกล้ศูนย์หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นเด่นชัด ไม่ได้หมายถึงเป็นอิสระต่อกัน นอกจากนี้ correlation ขึ้นกับช่วงเวลา ความถี่ข้อมูล และภาวะตลาด และอาจเปลี่ยนอย่างมากในช่วงวิกฤต

3.4 Downside Risk และ Lower Partial Moments

Variance ลงโทษผลตอบแทนที่สูงกว่าค่าเฉลี่ยและต่ำกว่าค่าเฉลี่ยแบบสมมาตร แต่ในหลายปัญหา ผู้ลงทุนสนใจเฉพาะการต่ำกว่าเป้าหมาย จึงใช้ lower partial moments

บทนิยาม 3.3

ให้ τ เป็น target return หรือ minimum acceptable return และกำหนด

$$(x)_+ = \max(x, 0)$$

Lower Partial Moment ลำดับ $q > 0$ คือ

$$\text{LPM}_q(\tau) = \mathbb{E}[(\tau - R)_+^q]$$

สำหรับ $q = 2$

$$\text{LPM}_2(\tau) = \mathbb{E}[(\tau - R)_+^2]$$

และ Downside Deviation คือ

$$\mathrm{DD}(\tau) = \sqrt{\mathrm{LPM}_2(\tau)}$$

สำหรับข้อมูลตัวอย่างภายใต้ convention ที่หารด้วยจำนวน observations ทั้งหมด

$$\widehat{\mathrm{DD}}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\tau - R_t)_+^2}$$

บาง ซอฟต์แวร์ หาร ด้วย จำนวน observations ที่ ต่ำ กว่า เป้า หมาย เท่านั้น จึง ต้อง ระบุ denominator convention ก่อนเปรียบเทียบ

นอกจาก denominator แล้ว ค่า τ เป็นส่วนหนึ่งของคำถามการลงทุน ไม่ใช่พารามิเตอร์ที่เลือกตามความสะดวก หากเป้าหมายคือรักษาเงินต้นอาจใช้ $\tau = 0$ หากเป็นกองทุนที่มี required return หรือ benchmark อาจกำหนด target ต่างออกไป สินทรัพย์เดียวกันจึงสามารถมี downside risk ต่างกันภายใต้เป้าหมายของผู้ลงทุนต่างราย

ตัวอย่าง 3.3. ให้ผลตอบแทนห้างวดเป็น

$$(-8\%, -2\%, 1\%, 4\%, 7\%)$$

และกำหนด $\tau = 0$ จะได้

$$\mathrm{LPM}_2(0) = \frac{0.08^2 + 0.02^2}{5} = 0.00136$$

ดังนั้น

$$\mathrm{DD}(0) = \sqrt{0.00136} \approx 3.688\%$$

ขณะที่ shortfall probability เท่ากับ

$$\frac{2}{5} = 40\%$$

สองมาตรวัดนี้ตอบคำถามต่างกัน เพราะ shortfall probability บอกความถี่ ส่วน downside deviation สะท้อนขนาดของการต่ำกว่าเป้าหมายด้วย

3.5 Beta และความเสี่ยงเชิงระบบ

ความไวของสินทรัพย์ต่อปัจจัยตลาดสามารถอธิบายผ่าน market model

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

โดย R_M คือผลตอบแทนตลาด และ ε_i คือส่วนที่แบบจำลองตลาดอธิบายไม่ได้

บทนิยาม 3.4

ถ้า $\text{Var}(R_M) > 0$ เบตาของสินทรัพย์ i เทียบตลาดคือ

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}$$

ถ้า

$$\text{Cov}(R_M, \varepsilon_i) = 0$$

จะได้

$$\text{Var}(R_i) = \beta_i^2 \, \text{Var}(R_M) + \text{Var}(\varepsilon_i)$$

พจน์แรกคือ systematic component ภายใต้ market model ส่วนพจน์หลังคือ idiosyncratic component

ตัวอย่าง 3.4. ถ้า

$$\text{Cov}(R_i, R_M) = 0.00024$$

และ

$$\text{Var}(R_M) = 0.00016$$

จะได้

$$\beta_i = \frac{0.00024}{0.00016} = 1.5$$

ค่า $\beta = 1.5$ หมายถึง regression slope ต่อผลตอบแทนตลาดเท่ากับ 1.5 ไม่ได้หมายความว่าความเสี่ยงรวมของสินทรัพย์สูงกว่าตลาด 50% เพราะ total variance ยังขึ้นกับ idiosyncratic risk

Beta ในบทนี้เป็นมาตรวัด dependence กับตลาด ส่วนการเชื่อม beta กับ expected return จะพัฒนาในบท asset pricing

ข้อสังเกต

Beta ไม่ใช่ค่าคงที่ของหลักทรัพย์ ค่าที่ประมาณขึ้นกับ market proxy, sample period, data frequency และ corporate events ตัวอย่างเช่น beta รายวัน 1 ปีอาจต่างจาก beta รายสัปดาห์ 5 ปีอย่างมีสาระ การรายงาน beta โดยไม่บอก benchmark และ estimation window จึงตรวจสอบซ้ำไม่ได้

3.6 Tracking Error

เมื่อพอร์ตมี benchmark ความเสี่ยงที่สำคัญอาจเป็นความผันผวนของผลตอบแทนส่วนเกินเทียบ benchmark ให้

$$A_t = R_{p,t} - R_{b,t}$$

เรียกว่า active return

บทนิยาม 3.5

Tracking Error แบบ ex post คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ active return

$$\text{TE} = \text{SD}(A_t) = \text{SD}(R_{p,t} - R_{b,t})$$

สำหรับข้อมูลตัวอย่าง

$$\widehat{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(A_t - \bar{A})^2}$$

ถ้า active return รายวันอยู่ภายใต้สมมติฐานเดียวกับ volatility scaling

$$\mathrm{TE}_{\mathrm{ann}} \approx \sqrt{252}\ \mathrm{TE}_{\mathrm{day}}$$

ข้อสังเกต

Tracking Error ต่ำไม่ได้หมายความว่าพอร์ตมีความเสี่ยงรวมต่ำ พอร์ตอาจเคลื่อนไหวใกล้ benchmark ที่มีความผันผวนสูงได้ Tracking Error จึงเป็น relative risk ไม่ใช่ total risk

ในงานบริหารพอร์ตควรแยก **ex post tracking error** ซึ่งคำนวณจาก active returns ที่เกิดขึ้นแล้ว ออกจาก **ex ante tracking error** ซึ่งเป็นค่าคาดการณ์จากแบบจำลอง covariance และ active weights ค่าทั้งสองอาจต่างกันเมื่อ covariance เปลี่ยนหรือพอร์ตถูกปรับระหว่างทาง การควบคุม mandate จึงควรระบุชัดว่ากำลังใช้ TE แบบใด

3.7 Maximum Drawdown และความเสี่ยงตามเส้นทาง

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ใช้ลำดับเวลาของผลตอบแทน แต่ผู้ลงทุนเผชิญความมั่งคั่งเป็นเส้นทาง ให้ W_t เป็น wealth index และ

$$H_t = \max_{0 \le s \le t} W_s$$

เป็น running peak

บทนิยาม 3.6

Drawdown ในรูปสัดส่วนความเสียหายที่เป็นจำนวนบวกคือ

$$D_t = 1 - \frac{W_t}{H_t}$$

โดย

$$0 \leq D_t \leq 1$$

Maximum Drawdown คือ

$$\text{MDD} = \max_t D_t$$

ตัวอย่าง 3.5. ถ้า wealth index เป็น

$$100,\ 108,\ 105,\ 112,\ 98,\ 101,\ 115$$

จุดสูงสุดก่อนการลดลงคือ 112 และ trough คือ 98 จึงได้

$$\text{MDD} = 1 - \frac{98}{112} = 0.125 = 12.5\%$$

แม้พอร์ตจะจบที่ 115 สูงกว่าจุดสูงสุดเดิม แต่ระหว่างทางผู้ลงทุนเคยเผชิญ drawdown 12.5%

MDD ขึ้นกับเส้นทางและช่วงตัวอย่างอย่างมาก จึงไม่ควรใช้เปรียบเทียบโดยไม่ระบุ sample period

Drawdown ยังมีความไม่สมมาตรเชิงคณิตศาสตร์ หากมูลค่าลดลงสัดส่วน D จากจุดสูงสุด ผลตอบแทนที่ต้องได้จาก trough เพื่อกลับสู่จุดเดิมคือ

$$G = \frac{D}{1 - D}$$

ดังนั้น drawdown 20% ต้องฟื้น 25% แต่ drawdown 50% ต้องฟื้น 100% ความสัมพันธ์นี้อธิบายว่าทำไมการควบคุม drawdown มีความหมายต่อความอยู่รอดของพอร์ต แม้ MDD จะไม่ใช่มาตรวัดความน่าจะเป็น

3.8 Value-at-Risk

เพื่อให้ sign convention ชัดเจน กำหนดตัวแปร loss

$$L = -R$$

สำหรับผลตอบแทนในรูปอัตรา หรือ

$$L_V = -V_0 R$$

สำหรับความเสียหายในหน่วยเงินเมื่อ V_0 เป็นมูลค่าฐาน

บทนิยาม 3.7

สำหรับระดับความเชื่อมั่น $\alpha \in (0,1)$ กำหนด Value-at-Risk เป็น quantile ของ loss

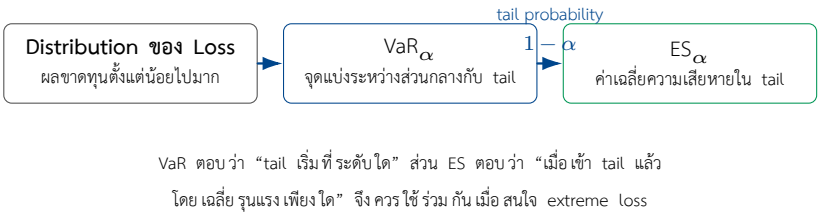
$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : \Pr(L \le \ell) \ge \alpha\}$$

ดังนั้น VaR ที่ระดับ 99% เป็น threshold ที่มี probability mass อย่างน้อย 99% อยู่ไม่เกินค่านั้นภายใต้แบบจำลองที่ใช้

สำหรับ 1-day VaR ที่ 99% หาก distribution และ calibration คงที่ในระยะยาว เราคาดจำนวนวันที่ loss เกิน VaR โดยเฉลี่ยประมาณ 1% ของวัน ไม่ใช่ว่า “จะไม่ขาดทุนเกิน VaR” การตีความนี้เชื่อม VaR เข้ากับ backtesting โดยตรง เพราะแบบจำลองที่รายงาน 99% แต่มี exceptions บ่อยเกินไปกำลัง understate tail risk ในเชิง coverage

ประเด็นที่ต้องระวัง

VaR ไม่ใช่ “การขาดทุนสูงสุดที่เป็นไปได้” เพราะการขาดทุนที่มากกว่า VaR ยังเกิดขึ้นได้ใน tail probability ประมาณ $1-\alpha$ ภายใต้ distribution ที่สมมติ



รูปที่ 3.2: ความสัมพันธ์เชิงแนวคิดระหว่าง Value-at-Risk และ Expected Shortfall ภายใต้ loss convention

3.8.1 Parametric Normal VaR

ถ้า

$$R \sim N(\mu, \sigma^2)$$

และ

$$L = -R$$

จะได้

$$L \sim N(-\mu, \sigma^2)$$

ดังนั้น

Normal VaR

$$\text{VaR}_\alpha(L) = -\mu + z_\alpha \sigma$$

โดย $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$

ถ้าต้องการ VaR ในหน่วยเงินและใช้ linear return approximation

$$\text{VaR}_{\alpha,V} = V_0 \left(-\mu + z_\alpha \sigma\right)$$

ตัวอย่าง 3.6. สมมติผลตอบแทนรายวันมี

$$\mu = 0.04\% \qquad \text{และ} \qquad \sigma = 1.20\%$$

ที่ระดับ 99% ใช้

$$z_{0.99} \approx 2.3263$$

จึงได้ VaR ในอัตราผลตอบแทน

$$\text{VaR}_{0.99} = -0.0004 + 2.3263(0.012) \approx 0.02752$$

หรือประมาณ 2.752%

ถ้ามูลค่าสถานะเท่ากับ 10 ล้านบาท

$$\text{VaR}_{0.99,V} \approx 275{,}200$$

ภายใต้สมมติฐานของแบบจำลอง

3.8.2 Historical Simulation

ให้ realized losses เป็น

$$L_1, \dots, L_T$$

Historical Simulation ประมาณ VaR ด้วย empirical quantile

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha^{\text{HS}} = \widehat{Q}_\alpha(L_1, \dots, L_T)$$

วิธีนี้ไม่กำหนด parametric distribution เช่น Normal โดยตรง แต่ยังสมมติว่าประวัติที่เลือกเป็นตัวแทนของความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องในอนาคต

การเลือก lookback window จึงเป็น trade-off สำคัญ: หน้าต่างยาวให้ observations ใน tail มากขึ้นแต่ผสมข้อมูล regime เก่าที่อาจไม่เกี่ยวข้อง ขณะที่หน้าต่างสั้นตอบสนองต่อภาวะล่าสุดได้เร็วแต่ quantile มี sampling noise สูง โดยเฉพาะที่ระดับ 99% ซึ่งใช้ข้อมูลเพียงส่วนน้อยบริเวณหาง

ประเด็นที่ต้องระวัง

Historical Simulation ไม่ได้แปลว่า “ไม่มีแบบจำลอง” เพราะการเลือก lookback window, sampling frequency, quantile interpolation, weighting scheme และ data cleaning ล้วนเป็น model choices

3.8.3 Holding Period และ Square-Root Scaling

VaR ที่รายงานควรระบุอย่างน้อย

1. ตัวแปรที่วัดและหน่วย
2. confidence level
3. holding period
4. แบบจำลองหรือ estimation method

ภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสม อาจประมาณ

$$\mathrm{VaR}_{\alpha,h} \approx \sqrt{h}\ \mathrm{VaR}_{\alpha,1}$$

แต่การ scaling นี้อาจไม่น่าเชื่อถือเมื่อ volatility เปลี่ยนตามเวลา ผลตอบแทนมี serial dependence หรือ distribution เปลี่ยนตาม horizon

3.9 Expected Shortfall หรือ Conditional Value-at-Risk

VaR บอกตำแหน่ง threshold แต่ไม่ได้บอกว่าหลังจากทะลุ threshold แล้ว การขาดทุนรุนแรงเพียงใด

บทนิยาม 3.8

สำหรับ loss L กำหนด Expected Shortfall ที่ระดับ α ด้วย quantile integral

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(L)\ \mathrm{d}u$$

ถ้า distribution ต่อเนื่องในบริเวณ quantile ที่เกี่ยวข้อง

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

นิยามแบบ quantile integral ใช้ได้สม่ำเสมอกับ distribution ที่ไม่ต่อเนื่องและ empirical distributions มากกว่าการอาศัย conditional expectation เพียงรูปเดียว [41]

สำหรับ distribution ต่อเนื่องภายใต้ loss convention โดยทั่วไป $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$ เพราะ ES เฉลี่ยเฉพาะค่าที่อยู่ตั้งแต่ threshold ไปทางหางขวาของ loss หากผลคำนวณให้ ES ต่ำกว่า VaR อย่างมีนัยสำคัญ ควรตรวจ sign

convention, quantile definition และ implementation ก่อนตีความทางเศรษฐกิจ [34, 72]

3.9.1 Normal Expected Shortfall

ถ้า

$$R \sim N(\mu, \sigma^2)$$

และ $L = -R$

Normal Expected Shortfall

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = -\mu + \sigma \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha}$$

โดย ϕ คือ standard normal density

ตัวอย่าง 3.7. ใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง Normal VaR ที่

$$\mu = 0.0004 \qquad \sigma = 0.012 \qquad \alpha = 0.99$$

และ

$$\phi(2.3263) \approx 0.02665$$

จะได้

$$\mathrm{ES}_{0.99} \approx -0.0004 + 0.012 \frac{0.02665}{0.01} \approx 0.03158$$

หรือประมาณ 3.158%

สำหรับมูลค่า 10 ล้านบาท เท่ากับประมาณ 315,800 บาท

3.9.2 VaR กับ ES ตอบคำถามต่างกัน

ตารางที่ 3.1: เปรียบเทียบ VaR และ Expected Shortfall

ประเด็น	VaR	Expected Shortfall
คำถามหลัก	threshold ของ loss อยู่ที่ใด	เมื่อเข้าสู่ tail แล้ว loss โดยเฉลี่ยรุนแรงเพียงใด
ใช้ข้อมูลหลัง threshold	ไม่สรุปความรุนแรงโดยตรง	ใช้ tail severity โดยตรง
การตีความ	quantile	tail average / quantile integral
optimization	อาจมีปัญหาด้าน non-convexity ในบางกรณี	มีโครงสร้างเหมาะกับ convex optimization มากกว่าในหลายบริบท

3.9.3 คุณสมบัติของ Coherent Risk Measure

มาตรวัดความเสี่ยง $\rho(X)$ บนตัวแปร loss เรียกว่า coherent หากมีสมบัติหลัก [3]

1. **Monotonicity** ถ้า $X \leq Y$ เกือบแน่นอน แล้ว $\rho(X) \leq \rho(Y)$
2. **Translation invariance** สำหรับค่าคงที่ c

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

3. **Positive homogeneity** สำหรับ $\lambda \geq 0$

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

4. **Subadditivity**

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Expected Shortfall ภายใต้นิยามมาตรฐานเป็น coherent risk measure ส่วน VaR ไม่เป็น subadditive สำหรับ distribution บางประเภท จึงอาจให้ผลที่ไม่สอดคล้องกับหลัก diversification ในบางกรณี

ความหมายเชิงปฏิบัติของ subadditivity คือ “การรวมสองพอร์ตไม่ควรถูกประเมินว่าเสี่ยงมากกว่าผลรวมของความเสี่ยงที่แยกกันโดยไม่มีเหตุผล” คุณสมบัตินี้สอดคล้องกับ intuition ของ diversification และเป็นเหตุผลสำคัญที่ ES ถูกใช้ในงานบริหาร tail risk และ optimization หลายประเภท แม้การใช้งานจริงยังต้องระวัง

estimation error ของ tail distribution

3.10 EWMA Volatility และความเสี่ยงที่เปลี่ยนตามเวลา

ข้อมูลผลตอบแทนทางการเงินมักมี volatility clustering คือช่วงที่ความผันผวนสูงมีแนวโน้มตามด้วยช่วงที่ความผันผวนสูง และช่วงสงบมีแนวโน้มตามด้วยช่วงสงบ แบบจำลอง EWMA ให้น้ำหนักข้อมูลล่าสุดมากกว่าข้อมูลเก่า

บทนิยาม 3.9

กำหนด EWMA conditional variance โดย

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)(R_{t-1} - \mu)^2$$

โดย

$$0 < \lambda < 1$$

เมื่อขยาย recursion

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} (R_{t-j} - \mu)^2$$

ภายใต้ infinite-history idealization

น้ำหนักของ squared innovation ที่ lag j คือ

$$(1-\lambda)\lambda^{j-1}$$

จึงลดลงแบบเรขาคณิตตามความเก่าของข้อมูล

ค่า λ จึงควบคุม trade-off ระหว่าง **ความไวต่อข่าวล่าสุด** กับ **ความเรียบของค่าประมาณ** ค่า λ ต่ำให้น้ำหนักข้อมูลใหม่มากและตอบสนองเร็ว ส่วนค่า λ สูงทำให้ volatility เปลี่ยนช้ากว่า สามารถสรุปความจำของน้ำหนักด้วย half-life

$$h_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\lambda)}$$

เช่น $\lambda = 0.94$ มี half-life ประมาณ 11.2 งวด หมายความว่าน้ำหนักของ shock จะลดลงเหลือครึ่งหนึ่งหลัง

ประมาณ 11 งวด

ตัวอย่าง 3.8. ให้

$$\lambda = 0.94$$

$$\sigma_{t-1} = 1.5\%$$

และ

$$R_{t-1} - \mu = -3\%$$

จะได้

$$\sigma_t^2 = 0.94(0.015)^2 + 0.06(0.03)^2 = 0.0002655$$

ดังนั้น

$$\sigma_t = \sqrt{0.0002655} \approx 1.629\%$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

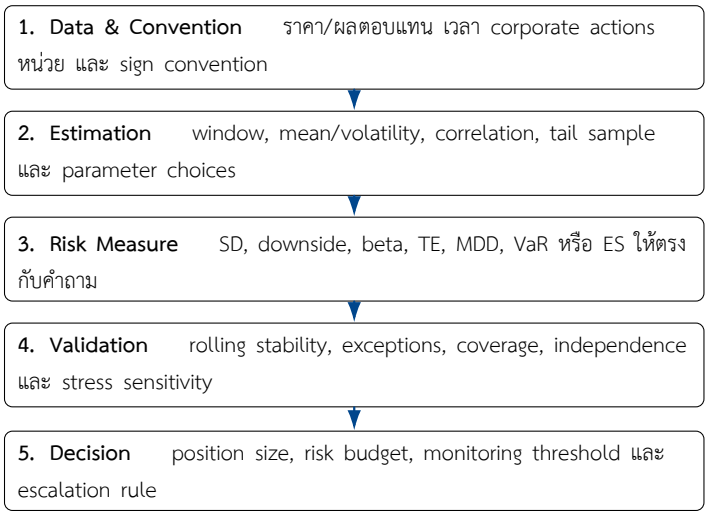
EWMA ทำให้ volatility เปลี่ยนตามข้อมูลล่าสุด แต่หากใช้ Normal EWMA ใน VaR หรือ ES ยังมี distributional assumption แบบ Normal เป็นอีกชั้นหนึ่ง จึงไม่ควรสรุปว่า time-varying volatility แก้ปัญหา fat tails ได้ทั้งหมด

3.11 การตรวจสอบแบบจำลองความเสี่ยง

ค่าความเสี่ยงที่คำนวณได้เป็น forecast ของ distribution หรือ tail threshold จึงต้องตรวจสอบด้วย realized outcomes

การ validation ควรแยกอย่างน้อยสองคำถาม: **coverage** ว่าจำนวน exceptions สอดคล้องกับระดับความเชื่อมั่นหรือไม่ และ **independence** ว่า exceptions กระจายตามเวลาอย่างเหมาะสมหรือกระจุกตัวเป็นกลุ่ม

หาก exceptions เกิดติดกันในช่วงวิกฤต แม้จำนวนรวมดูใกล้ค่าคาด ก็อาจบ่งชี้ว่าแบบจำลองตอบสนองต่อ regime change ช้าเกินไป



รูปที่ 3.3: วงจรจากข้อมูลสู่การตัดสินใจด้านความเสี่ยง โดยบังคับให้ risk estimate ผ่านการตรวจสอบก่อนนำไปใช้กำหนดสถานะหรือวงเงิน

สำหรับ VaR กำหนด exception indicator

$$I_t = \mathbf{1}\{L_t > \mathrm{VaR}_{\alpha,t}\}$$

ถ้าแบบจำลอง calibrated ถูกต้องในเชิง coverage โดยประมาณ

$$\mathbb{E}(I_t) = 1 - \alpha$$

และจำนวน exceptions ใน T วันควรใกล้

$$T(1-\alpha)$$

3.11.1 Violation Ratio

ถ้าเกิด exception จริง x ครั้ง

$$\text{VR} = \frac{x}{T(1-\alpha)}$$

ค่าใกล้ 1 หมายถึงจำนวน exceptions ใกล้ค่าที่คาดจาก nominal coverage แต่ไม่ได้ยืนยันว่า exceptions กระจายอย่างเป็นอิสระ

ในเชิงบริหารความเสี่ยง $\text{VR} > 1$ มักชี้ว่าแบบจำลองให้ VaR ต่ำเกินไปเมื่อเทียบกับ realized losses ส่วน $\text{VR} < 1$ อาจเกิดจากแบบจำลอง conservative เกินไปหรือช่วงทดสอบสงบกว่าช่วงประมาณค่า อย่างไรก็ตามทั้งสองกรณีต้องดูความไม่แน่นอนเชิงสถิติและ clustering ของ exceptions ก่อนตัดสินคุณภาพแบบจำลอง

ตัวอย่าง 3.9. VaR ที่ระดับ 99% มีข้อมูล 500 วันและเกิด exception 9 วัน จำนวนที่คาดคือ

$$500(0.01) = 5$$

ดังนั้น

$$\text{VR} = \frac{9}{5} = 1.8$$

แบบจำลองมี exceptions มากกว่าที่ nominal coverage คาดไว้ 80% ในเชิงจำนวน แต่การตัดสินเชิงสถิติยังต้องใช้ formal backtesting

การทดสอบ formal coverage และ independence เช่น Kupiec และ Christoffersen จะพัฒนาในบทที่ 11 [29, 15]

3.12 กรณีศึกษาจากงานวิจัย: VaR และ CVaR ของหุ้นธนาคารไทย

งานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาความเสี่ยงของหุ้นกลุ่มธนาคารไทยและดัชนี SET Finance ด้วยข้อมูลในช่วงปี 2017–2021 โดยเปรียบเทียบ Normal EWMA กับ Historical Simulation ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% พร้อมตรวจสอบแบบจำลองด้วย Violation Ratio, Three-Zone Approach และการประเมิน CVaR [71]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: หลักการอ่านกรณีศึกษาทางประวัติศาสตร์

ตัวเลขในส่วนนี้เป็นผลจาก sample period ปี 2017–2021 และ methodology ของงานวิจัยดังกล่าว จึงใช้เพื่อศึกษาความไวของ risk estimates ต่อแบบจำลองและการตรวจสอบคุณภาพของแบบจำลอง ไม่ควรตีความเป็นอันดับความเสี่ยงปัจจุบันหรือคำแนะนำซื้อขายหลักทรัพย์

ตารางที่ 3.2: ตัวอย่างค่าเฉลี่ยความเสี่ยงรายวันระดับ 99% จากกรณีศึกษาหุ้นธนาคารไทย ปี 2017–2021

หลักทรัพย์	SD (%)	Normal EWMA VaR (%)	Historical VaR (%)	Normal EWMA CVaR/ES (%)	Historical CVaR/ES (%)
BAY	1.83342	4.27498	4.81192	4.89627	6.58033
BBL	1.66791	3.90430	5.68874	4.46950	7.63402
KBANK	2.07678	4.85173	6.48606	5.55548	9.16025
KKP	1.74970	4.06866	5.58098	4.66158	9.06688
KTB	1.62364	3.80265	4.65200	4.35285	7.88938
SCB	1.95513	4.56549	6.03957	5.22802	9.21371
LHFG	1.59193	3.72377	4.34851	4.26322	6.51605
TCAP	1.75994	4.10823	4.50237	4.70461	8.23542
TISCO	1.66323	3.83718	5.24258	4.40079	8.47776
TTB	2.22489	5.20752	6.80535	5.96147	11.19225
SET Finance	1.30504	3.04015	3.73471	3.48238	6.98334

ตารางแสดงประเด็นสำคัญสามประการ

1. การจัดอันดับความเสี่ยงสามารถเปลี่ยนเมื่อเปลี่ยนแบบจำลอง แม้ใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน
2. Historical ES/CVaR สามารถสูงกว่า Normal EWMA ES อย่างมากเมื่อ empirical tail รุนแรงกว่าที่ Normal assumption สื่อ
3. แบบจำลองที่ให้ตัวเลขดูสมเหตุสมผลยังต้องผ่านการตรวจสอบกับ realized losses ก่อนนำไปใช้จริง

เมื่ออ่านตัวเลขเชิงเปรียบเทียบจะเห็นภาพชัดขึ้น เช่น TTB มี Historical CVaR 11.19225% เทียบกับ Normal EWMA CVaR 5.96147% หรือประมาณ 1.88 เท่า ขณะที่ SET Finance มี Historical CVaR 6.98334% เทียบกับ Normal EWMA CVaR 3.48238% หรือประมาณ 2.01 เท่า ความต่างดังกล่าวไม่ได้พิสูจน์ว่า Historical Simulation “ดีกว่าเสมอ” แต่ชี้ว่า **สมมติฐานเกี่ยวกับ tail มีผลต่อขนาด risk estimate อย่างมาก** และผู้ใช้ควรตรวจว่าแบบจำลองใดสอดคล้องกับ realized outcomes มากกว่าในบริบทที่ใช้งาน

อีกข้อสังเกตคือ SD กับ tail risk ไม่ให้ ranking เดียวกันโดยอัตโนมัติ แม้ TTB มี SD สูงสุดในตารางและมีค่าหางสูงมาก แต่ความแตกต่างระหว่างหลักทรัพย์อื่น ๆ เปลี่ยนตาม Normal EWMA หรือ Historical Simulation

จึงไม่ควรสรุป “หุ้นใดเสี่ยงกว่า” โดยไม่ระบุทั้ง metric, confidence level, horizon และ model

ผล การ ตรวจ สอบ ใน งาน วิจัย ยัง แสดง ว่า acceptance หรือ rejection ของ แบบ จำลอง แตก ต่าง ตาม confidence level และวิธีประเมิน จึงสนับสนุนหลักการว่า risk model ไม่มีคุณภาพโดยอาศัยความซับซ้อนของสูตรเพียงอย่างเดียว [71]

3.13 Data Risk, Estimation Risk และ Model Risk

การวัดความเสี่ยงมีความเสี่ยงของตัวมันเองอย่างน้อยสามชั้น

3.13.1 Data Risk

เกิดจากข้อมูลผิด ไม่ครบ หรือไม่สอดคล้อง เช่น missing prices, corporate actions ที่ไม่ได้ปรับ, stale prices, timestamp mismatch, survivorship bias และ currency mismatch

3.13.2 Estimation Risk

เกิดจากการประมาณพารามิเตอร์จากตัวอย่างจำกัด เช่น mean, volatility, beta, correlation และ tail quantile ซึ่งสามารถเปลี่ยนเมื่อเปลี่ยน sample period

3.13.3 Model Risk

เกิด จาก สมมติฐาน หรือ โครงสร้าง แบบ จำลอง เช่น Normality, iid assumption, fixed correlation, linear exposure หรือ lookback window ที่ไม่เหมาะกับสภาวะตลาด

สามชั้นนี้สามารถเกิดพร้อมกันได้ ตัวอย่างเช่นราคาบางวัน stale (data risk) ทำให้ volatility ถูกประมาณต่ำ (estimation risk) และเมื่อนำค่าดังกล่าวไปใส่ Normal VaR ที่สมมติหางบาง (model risk) ความคลาดเคลื่อนอาจสะสมจน risk limit ที่กำหนดจากผลลัพธ์ดูปลอดภัยเกินจริง ดังนั้น governance ที่ดีต้องตรวจตั้งแต่ต้นทางข้อมูล ไม่ใช่ตรวจเฉพาะสูตรสุดท้าย

แนวทางควบคุมแบบใช้งานจริง

Data risk: ใช้ data dictionary, timestamp check และ corporate-action audit **Estimation risk**: ใช้ rolling window, confidence interval, bootstrap หรือ sensitivity analysis **Model risk**: ใช้ challenger model, out-of-sample validation และ stress scenario หากโมเดลหลายแบบให้คำตอบต่างกันมาก ความแตกต่างนั้นเองเป็นข้อมูลเกี่ยวกับ model uncertainty

Minimum Risk-Model Record

การรายงานตัวเลขความเสี่ยงควรระบุอย่างน้อย

1. ตัวแปรและ sign convention
2. data source และ sample period
3. frequency และ timestamp convention
4. return definition และ corporate-action adjustment
5. estimation window
6. confidence level และ horizon
7. model specification
8. parameter choices เช่น λ
9. validation method
10. ข้อจำกัดและเหตุการณ์ที่แบบจำลองอาจใช้ไม่ได้

3.14 การเลือกมาตรวัดความเสี่ยงให้เหมาะกับคำถาม

หลักที่สำคัญคือ **ไม่มีมาตรวัดใดเป็น “ดีที่สุด” โดยไม่ระบุ decision problem** ผู้จัดการกองทุนตามดัชนีอาจให้ความสำคัญกับ Tracking Error มากกว่านักลงทุนที่กังวลการขาดทุนจาก peak ขณะที่ผู้กำหนด risk limit ระยะสั้นอาจใช้ VaR/ES ร่วมกับ liquidity และ stress metrics ตารางต่อไปจึงควรอ่านเป็นแผนที่เลือกเครื่องมือ ไม่ใช่อันดับคุณภาพของมาตรวัด

ตารางที่ 3.3: แผนที่การเลือกมาตรวัดความเสี่ยง

คำถาม	มาตรวัดหลัก	ข้อควรระวัง
ผล ตอบแทน กระจาย จาก ค่า เฉลี่ยเพียงใด	Variance / SD	สมมาตรต่อ upside และ downside
สินทรัพย์สองตัวเคลื่อนไหวร่วม กันอย่างไร	Covariance / Correlation	correlation ไม่เท่ากับ independence
ขาดทุนต่ำกว่าเป้าหมายเพียงใด	LPM / Downside Deviation	ต้องกำหนด target และ denominator convention
ไวต่อการเคลื่อนไหวตลาดเพียง ใด	Beta	ไม่ใช่ total risk
เบี่ยงจาก benchmark เพียงใด	Tracking Error	ไม่วัด absolute risk
เคย ลด จาก peak มาก ที่สุด เท่าใด	MDD	ขึ้นกับเส้นทางและ sample period
threshold ของ tail loss อยู่ที่ ใด	VaR	ไม่บอก severity หลัง threshold
เมื่ออยู่ใน tail แล้วรุนแรงเพียง ใด	ES/CVaR	ขึ้นกับ tail model และ sample
volatility ปัจจุบัน เปลี่ยน อย่างไร	EWMA	ยังต้องเลือก λ และ distribution assumption

3.15 Investment Lab: Risk Measurement Pipeline

Investment Lab: Risk Dashboard จากข้อมูลผลตอบแทน

วัตถุประสงค์ สร้างรายงานความเสี่ยงที่สามารถตรวจสอบย้อนกลับได้

1. เลือกสินทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการและกำหนด sample period
2. คำนวณ mean, SD, skewness และ kurtosis
3. สร้าง covariance และ correlation matrix
4. คำนวณ downside deviation ที่ target อย่างน้อย 2 ค่า

5. เลือก benchmark และคำนวณ beta กับ tracking error
6. สร้าง wealth index และคำนวณ MDD
7. คำนวณ Historical VaR/ES ที่ 95% และ 99%
8. ประมาณ EWMA volatility และ Normal VaR/ES
9. สร้าง exception indicators สำหรับช่วง out-of-sample
10. สรุปว่า metric ใดให้ข้อมูลที่ metric อื่นไม่ให้

Quality Gate ก่อนส่ง Risk Dashboard

รายงานควรผ่านอย่างน้อย 6 จุด: **(1)** ใช้ return convention เดียวกันทุกสินทรัพย์ **(2)** ระบุ sample และ as-of date **(3)** ตรวจ missing/stale data **(4)** ระบุ denominator/quantile convention **(5)** แยก in-sample estimation จาก out-of-sample validation และ **(6)** อธิบายว่าตัวเลขแต่ละตัวนำไปใช้ตัดสินใจอะไร หาก dashboard มีตัวเลขมากแต่ตอบข้อ 6 ไม่ได้ ควรถือว่ายังไม่พร้อมใช้งาน

Investment Lab: Research Reproduction: VaR–CVaR และ Model Validation

หากมีข้อมูลต้นฉบับช่วงปี 2017–2021 ให้ทำซ้ำกรณีศึกษาหุ้นธนาคารไทยตามขั้นตอน

1. สร้าง daily return โดยบันทึก price adjustment และ trading calendar
2. ประมาณ volatility ด้วย EWMA
3. คำนวณ Normal VaR/ES ที่ 95% และ 99%
4. คำนวณ Historical Simulation VaR/ES ด้วย quantile convention ที่ระบุ
5. สร้าง exception indicator และ Violation Ratio
6. เปรียบเทียบผลกับตารางที่ 3.2
7. หากผลต่างจากงานเดิม ให้ตรวจ calendar, missing data, price convention, quantile interpolation และ EWMA initialization ก่อนสรุป

การใช้ข้อมูลช่วงเวลาอื่นถือเป็น replication หรือ extension ไม่ใช่ reproduction ของ sample เดิม

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์ของความเสี่ยงจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่ tail risk โดยเริ่มจากการมองผลตอบแทนเป็นตัวแปรสุ่มและวัดการกระจายด้วย variance กับ standard deviation จากนั้นใช้ covariance และ correlation เพื่ออธิบาย dependence และใช้ beta เพื่อวัดความไวต่อปัจจัยตลาด

ความเสี่ยงด้านลบถูกแยกออกด้วย lower partial moments และ downside deviation ขณะที่ tracking error วัดความเสี่ยงเทียบ benchmark และ maximum drawdown วัดความเสี่ยงตามเส้นทาง

สำหรับ tail risk การกำหนด loss convention ทำให้ VaR และ ES ตีความสอดคล้องกัน VaR เป็น quantile threshold ส่วน ES สรุปความรุนแรงหลัง threshold Historical Simulation ใช้ empirical distribution โดยตรง ขณะที่ Normal EWMA ทำให้ volatility ปรับตามข้อมูลล่าสุดแต่ยังคง distributional assumption

สุดท้าย การวัดความเสี่ยงต้องคำนึงถึง data risk, estimation risk และ model risk ควบคู่กับตัวเลข จึงควรรายงาน sample period, frequency, convention, horizon, confidence level, model specification และผล validation ทุกครั้งที่นำ risk estimate ไปใช้

คำศัพท์สำคัญ

- Expected return
- Variance
- Standard deviation
- Covariance
- Correlation
- Covariance matrix
- Skewness
- Kurtosis
- Lower Partial Moment
- Downside deviation
- Beta
- Systematic risk
- Idiosyncratic risk
- Tracking Error
- Maximum Drawdown
- Value-at-Risk
- Expected Shortfall
- Conditional Value-at-Risk
- Historical Simulation
- EWMA
- Exception
- Violation Ratio
- Data risk
- Estimation risk
- Model risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ผลตอบแทน $(5\%, -2\%, 10\%, -6\%, 8\%)$ จงหาค่าเฉลี่ย sample variance และ sample standard deviation
2. พิสูจน์ว่า variance ไม่เปลี่ยนเมื่อบวกค่าคงที่ให้ตัวแปรสุ่ม

3. อธิบายเงื่อนไขที่ทำให้การ annualize volatility ด้วย $\sqrt{252}$ สมเหตุสมผล
4. พิสูจน์ว่า $|\rho_{ij}| \leq 1$ ด้วย Cauchy–Schwarz inequality
5. สร้างตัวอย่างตัวแปรสุ่มสองตัวที่มี correlation เท่ากับศูนย์แต่ไม่เป็นอิสระต่อกัน
6. คำนวณ downside deviation สำหรับข้อมูล $(-8\%, -2\%, 1\%, 4\%, 7\%)$ ที่ target 0% และ 2%
7. ถ้า $\text{Cov}(R_i, R_M) = 0.00030$ และ $\text{Var}(R_M) = 0.00020$ จงหา beta และตีความ
8. จาก active returns รายเดือน 12 ค่า จงคำนวณ annualized tracking error โดยระบุสมมติฐาน
9. จาก wealth index ที่กำหนด จงหาจุด peak, trough, drawdown และ MDD
10. ถ้า $R \sim N(0.0005, 0.015^2)$ จงหา Normal VaR ที่ 95% และ 99%
11. จากข้อมูล loss 100 ค่า จงอธิบายขั้นตอนคำนวณ Historical VaR และ ES ที่ 95% พร้อมระบุ quantile convention
12. พิสูจน์สูตร Normal ES จาก expectation ของ truncated normal distribution
13. อธิบายเหตุผลที่ VaR อาจไม่เป็น subadditive ในบาง distribution
14. ให้ $\lambda = 0.94$, $\sigma_{t-1} = 1.5\%$ และ innovation เท่ากับ -3% จงหา EWMA volatility งวดถัดไป
15. แบบจำลอง VaR 99% มีข้อมูล 500 วันและ exceptions 9 วัน จงหา Violation Ratio และอภิปรายข้อจำกัดของการใช้ VR เพียงอย่างเดียว
16. จากตารางที่ 3.2 เลือกหลักทรัพย์อย่างน้อย 3 ตัวและเปรียบเทียบ risk ranking ระหว่าง Normal EWMA กับ Historical Simulation
17. อธิบายความแตกต่างระหว่าง data risk, estimation risk และ model risk พร้อมยกตัวอย่างอย่างละ 2 กรณี
18. แบบจำลอง A ให้ VaR 99% ต่ำกว่าแบบจำลอง B แต่ ES สูงกว่า จงอธิบายว่าเหตุการณ์นี้สะท้อนรูป tail ที่ต่างกันอย่างไร และควรตรวจข้อมูลใดก่อนเลือกแบบจำลอง
19. สร้าง rolling 60-day volatility และ rolling 250-day volatility จากข้อมูลชุดเดียวกัน แล้วอภิปราย trade-off ระหว่าง responsiveness กับ estimation noise
20. สมมติ risk dashboard รายงาน SD, beta, MDD และ ES ให้กำหนดตัวอย่าง decision rule ที่เหมาะกับแต่ละมาตรวัด โดยไม่ใช้มาตรวัดใดแทน risk limit โดยตรง

คำถามชวนคิด

1. สินทรัพย์ที่มี standard deviation ต่ำกว่าอาจมี tail risk สูงกว่าได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. Correlation ที่ต่ำในภาวะปกติสามารถสร้างความมั่นใจเกินจริงด้าน diversification ได้อย่างไร

3. หากผู้ลงทุนสนใจการรักษาเงินต้นมากกว่าความผันผวนโดยรวม ควรใช้มาตรวัดใดร่วมกัน
4. VaR และ ES ควรแทนที่กันหรือควรใช้ร่วมกัน เพราะเหตุใด
5. แบบจำลองความเสี่ยงที่ผ่าน backtest ในอดีตควรถูกเชื่อถือในอนาคตโดยอัตโนมัติหรือไม่
6. ระหว่าง การใช้โมเดล เดียว ที่ ซับ ซ้อน มาก กับ การใช้ หลาย โมเดล ที่ เรียบ ง่าย เพื่อ เปรียบ เทียบ model uncertainty แนวทางใดเหมาะกับ governance มากกว่าในบริบทใด

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 3

[3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. “Coherent Measures of Risk”. In: *Mathematical Finance* 9.3 (1999), pp. 203–228.

[15] Peter F. Christoffersen. “Evaluating Interval Forecasts”. In: *International Economic Review* 39.4 (1998), pp. 841–862.

[29] Paul H. Kupiec. “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”. In: *The Journal of Derivatives* 3.2 (1995), pp. 73–84.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[34] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. 2nd ed. Princeton University Press, 2015.

[41] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. “Optimization of Conditional Value-at-Risk”. In: *The Journal of Risk* 2.3 (2000), pp. 21–41.

[61] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การลงทุนในตลาดการเงิน: เอกสารประกอบการเรียนรายวิชา ส.247 ตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์*. ปทุมธานี, 2021.

[62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.

[71] Wichai Witayakiattilerd, Natthaphon Reunprot, Wachirada Limpanawannakul, and Jirawan Phuphon. “Analyzing Stock Performance in the Banking Sector: Unveiling Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk Strategies”. In: *Thailand Statistician* 22.4 (2024), pp. 877–893.

[72] Yasuhiro Yamai and Toshinao Yoshiba. “Value-at-Risk versus Expected Shortfall: A Practical Perspective”. In: *Journal of Banking & Finance* 29.4 (2005), pp. 997–1015.

Part II

การประเมินมูลค่าสินทรัพย์

บทที่ 4 การประเมินมูลค่าตราสารทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. แยก ความ แตก ต่าง ระหว่าง ราคา ตลาด กับ มูลค่า ที่ ประเมิน ได้ และ อธิบาย บทบาท ของ ข้อมูล สมมติฐาน และแบบจำลองในการประเมินมูลค่า
2. เชื่อมโยงกำไรต่อหุ้น เงินปันผล อัตราการจ่ายปันผล อัตราการเก็บกำไรไว้ ROE และอัตราการเติบโตอย่างยั่งยืนได้
3. คำนวณและตีความ BVPS, NAV per share, P/E, P/BV, earnings yield และ EV/EBITDA โดยไม่ใช้ตัวคูณเชิงกล
4. ประเมิน มูลค่า หุ้น ด้วย Dividend Discount Model ทั้ง แบบ finite horizon, perpetuity, Gordon growth และ multi-stage growth
5. ประเมินมูลค่าหุ้นด้วย Free Cash Flow to Equity และอธิบายความแตกต่างระหว่าง dividend policy กับ cash-generating capacity ได้
6. เชื่อม fundamental P/E และ P/BV กับ growth, payout, ROE และ required return ภายใต้สมมติฐานที่ชัดเจน
7. อธิบาย หลัก การ ของ Residual Income Valuation และ ความ สัมพันธ์ กับ clean-surplus accounting ได้
8. วิเคราะห์ sensitivity ต่อ k_e, g, payout, ROE และ terminal assumptions พร้อมสร้าง valuation range แทนการรายงานมูลค่าเป็นจุดเดียว
9. จัดทำ valuation model ที่ตรวจสอบย้อนกลับได้ โดยแยกข้อมูล สมมติฐาน การคำนวณ ผลลัพธ์ และข้อจำกัดออกจากกัน

4.1 บทนำ: ราคาตลาดและมูลค่าที่ประเมินได้

บทที่ 2 พัฒนาการวัดผลตอบแทนจากราคาและกระแสเงินสด ส่วนบทที่ 3 พัฒนาการวัดความไม่แน่นอนของผลตอบแทน บทนี้เปลี่ยนมุมมองจากการอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นในอดีตไปสู่คำถามเชิงมูลค่าว่า ภายใต้ข้อมูล กระแสเงินสด ความเสี่ยง และสมมติฐานที่กำหนด ตราสารทุนควรมีมูลค่าเท่าใด

บทนิยาม 4.1

ราคาตลาด (market price) คือราคาที่เกิดจากการซื้อขาย ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง
มูลค่าที่ประเมินได้ (estimated intrinsic value) คือค่าที่ได้จากแบบจำลองภายใต้ชุดข้อมูล สมมติฐาน กระแสเงินสด อัตราคิดลด การเติบโต และเงื่อนไขอื่นที่ผู้ประเมินกำหนด

มูลค่าที่ประเมินได้จึงไม่ใช่ค่าคงที่ที่สังเกตได้โดยตรง แต่เป็นผลลัพธ์แบบมีเงื่อนไข

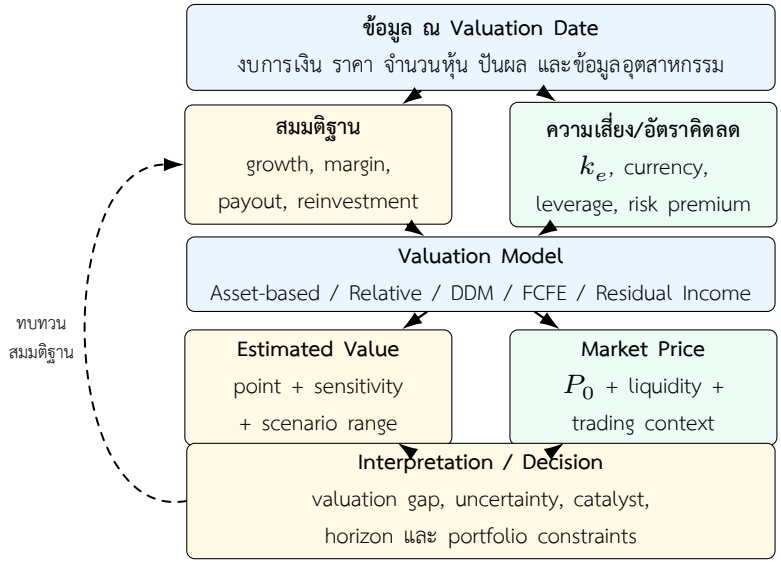
$$\widehat{V}_0 = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c}\text{cash-flow assumptions},\ \text{discount rate},\ \text{growth},\\ \text{terminal assumptions},\ \text{accounting data}\end{array}\right)$$

การเปลี่ยนสมมติฐานเพียงบางตัวสามารถทำให้ $\widehat{V}_0$ เปลี่ยนมาก โดยเฉพาะกิจการที่มูลค่าส่วนใหญ่เกิดจากกระแสเงินสดระยะไกล

ในเชิงเศรษฐศาสตร์ การประเมินมูลค่าเป็นการเชื่อม **ผลประโยชน์ในอนาคต** กับ **ราคาที่ควรยอมจ่ายในวันนี้** ภายใต้ผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการรับเพื่อชดเชยความเสี่ยง กล่าวอีกอย่างหนึ่ง valuation เป็นปัญหากลับด้านของ return: เมื่อกำหนดราคา เราคำนวณผลตอบแทนที่คาดหมายได้ แต่เมื่อกำหนดกระแสเงินสดและ required return เราสามารถหามูลค่าที่สอดคล้องกับสมมติฐานเหล่านั้นได้

คำถาม 5 ข้อก่อนเริ่ม Valuation

ก่อนเปิดแบบจำลองควรตอบให้ได้ว่า **(1)** กำลังประเมิน equity value หรือ enterprise value **(2)** กระแสเงินสดใดเป็นของผู้ถือหุ้น **(3)** สมมติฐานใดเป็นตัวขับเคลื่อนมูลค่าหลัก **(4)** discount rate สอดคล้องกับกระแสเงินสดหรือไม่ และ **(5)** ผลลัพธ์จะใช้เพื่อ screening, target range, portfolio decision หรือ transaction decision เพราะวัตถุประสงค์ต่างกันต้องการระดับความละเอียดและ margin of safety ต่างกัน



รูปที่ 4.1: กระบวนการประเมินมูลค่าจากข้อมูลและสมมติฐานสู่มูลค่าเปรียบเทียบราคา ก่อนแปลงเป็นการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน

ประเด็นที่ต้องระวัง

เงื่อนไข $\widehat{V}_0 > P_0$ ไม่ได้พิสูจน์ว่าราคาหุ้นจะปรับขึ้น และ $\widehat{V}_0 < P_0$ ไม่ได้พิสูจน์ว่าราคาจะปรับลง เพราะมูลค่าที่ประเมินได้ขึ้นกับ model risk, estimation risk, data quality และความไม่แน่นอนของสมมติฐาน

ความต่างระหว่างมูลค่ากับราคาเป็นเพียง **valuation signal** ไม่ใช่คำสั่งซื้อขายโดยอัตโนมัติ การนำไปใช้จริงยังต้องตรวจ horizon, catalyst, liquidity, downside risk และความเป็นไปได้ที่ตลาดรู้อะไรบางอย่างซึ่งแบบจำลองยังไม่สะท้อน

4.2 กระแสเงินสดของผู้ถือหุ้นและตัวแปรพื้นฐาน

ผู้ถือหุ้นสามัญมีสิทธิใน residual cash flows ของกิจการหลังจากภาระต่อผู้มีสิทธิเรียกร้องลำดับสูงกว่าได้รับการชำระแล้ว ผลประโยชน์ที่ผู้ถือหุ้นสังเกตได้อาจอยู่ในรูปเงินปันผล การเพิ่มขึ้นของราคาหุ้น สิทธิซื้อหุ้นเพิ่มทุน การซื้อหุ้นคืน และการคืนทุนในรูปอื่น

หากผู้ลงทุนซื้อหุ้นที่ P_0 ได้รับเงินปันผล D_1 และขายที่ P_1 ผลตอบแทนหนึ่งงวดคือ

$$R_{0,1} = \frac{P_1 - P_0 + D_1}{P_0}$$

การประเมินมูลค่ามองสมการในทิศทางกลับกัน กล่าวคือ ถ้า cash flows และ required return ถูกกำหนดไว้ จะหามูลค่า ณ เวลา 0 ที่ทำให้ผลตอบแทนสอดคล้องกับความเสี่ยงได้อย่างไร

ข้อเท็จจริงสำคัญคือ **กำไรทางบัญชี เงินปันผล และกระแสเงินสดไม่ใช่สิ่งเดียวกัน** กำไรเกิดจาก accrual accounting เงินปันผลเป็นการตัดสินใจของคณะกรรมการภายใต้ข้อจำกัดด้านเงินสดและเงินทุน ส่วน FCFE พยายามวัดเงินสดที่สามารถเป็นของผู้ถือหุ้นหลังการลงทุนและการจัดหาเงินทุนที่จำเป็น ความแตกต่างนี้เป็นเหตุผลที่บทนี้ต้องใช้หลายแบบจำลองแทนการพึ่ง ratio หรือ cash-flow measure เพียงตัวเดียว

4.2.1 EPS, DPS, Payout Ratio และ Retention Ratio

ให้ NI_c เป็นกำไรสุทธิที่เป็นของผู้ถือหุ้นสามัญ และ N_{wa} เป็นจำนวนหุ้นสามัญถัวเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

$$EPS = \frac{NI_c}{N_{\text{wa}}}$$

ถ้า DPS เป็นเงินปันผลต่อหุ้น

บทนิยาม 4.2

Dividend Payout Ratio และ retention ratio นิยามเป็น

$$\text{DPR} = \frac{DPS}{EPS}$$

และ

$$b = 1 - \text{DPR}$$

เมื่อ $EPS > 0$ ค่า b แสดงสัดส่วนกำไรที่กิจการเก็บไว้เพื่อรองรับการลงทุน การชำระหนี้ การเพิ่มสภาพคล่อง หรือวัตถุประสงค์อื่น

อย่างไรก็ดี EPS ต้องอ่านร่วมกับ **quality of earnings** และจำนวนหุ้นบนฐานเดียวกัน กำไรจากรายการพิเศษ การกลับรายการสำรอง หรือกำไรจากการขายสินทรัพย์อาจทำให้ trailing EPS สูงชั่วคราว ขณะที่ share buyback และ dilution เปลี่ยน EPS ต่อหุ้นได้แม้กำไรรวมแทบไม่เปลี่ยน ดังนั้น valuation ที่ใช้ EPS ควรระบุว่าเป็น basic/

diluted และ trailing/forward/normalized EPS อย่างชัดเจน

Dividend yield ณ ราคาตลาด P_0 คือ

$$\text{Dividend Yield} = \frac{DPS}{P_0}$$

ตัวอย่าง 4.1. บริษัทมีกำไรต่อหุ้น 5 บาท จ่ายเงินปันผล 2 บาท และมีราคาหุ้น 40 บาท

$$\text{DPR} = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$b = 60\%$$

และ

$$\text{Dividend Yield} = \frac{2}{40} = 5\%$$

DPR วัดนโยบายการกระจายกำไร ขณะที่ dividend yield เปรียบเทียบเงินปันผลกับราคาที่ผู้ลงทุนจ่าย จึงไม่ใช่มาตรวัดเดียวกัน

ในเชิงตัดสินใจ dividend yield สูงจึงไม่ใช่หลักฐานว่าหุ้นมีมูลค่าน่าสนใจเสมอ หากราคาลดลงเพราะกำไรและความสามารถจ่ายปันผลกำลังเสื่อม yield ที่คำนวณจากเงินปันผลย้อนหลังอาจสูงในเวลาเดียวกับที่เงินปันผลในอนาคตมีความเสี่ยงถูกลดลง

4.2.2 ROE และ Sustainable Growth

ให้ B_{t-1} เป็น book value of equity ต้นงวด และ E_t เป็นกำไรของงวด

$$ROE_t = \frac{E_t}{B_{t-1}}$$

ภายใต้สมมติฐานว่ากิจการเก็บกำไรสัดส่วน b และสามารถนำเงินที่เก็บไว้ไปสร้าง ROE เดิมอย่างต่อเนื่อง จะได้อัตราการเติบโตพื้นฐาน

Sustainable Growth Identity

$$g = b\,ROE$$

พิสูจน์. หากกำไรหนึ่งงวดเป็น

$$E_1 = ROE\,B_0$$

และกิจการเก็บกำไรสัดส่วน b จะได้

$$B_1 = B_0 + bE_1$$

ดังนั้น

$$B_1 = B_0(1 + bROE)$$

จึงได้อัตราการเติบโตของ book equity

$$g = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = bROE$$

□

ประเด็นที่ต้องระวัง

สูตร $g = bROE$ เป็น model identity ภายใต้ชุดสมมติฐาน ไม่ได้หมายความว่า ROE และ reinvestment opportunity จะคงที่ตลอดไป กิจการที่เติบโตสูงในช่วงต้นมักเผชิญการแข่งขัน ขนาดตลาด และผลตอบแทนส่วนเพิ่มที่ลดลงเมื่อเข้าสู่ระยะ mature

การเติบโตจะสร้างมูลค่าเมื่อเงินที่เก็บไว้สามารถลงทุนต่อด้วยผลตอบแทนที่คุ้มกับต้นทุนเงินทุน หาก incremental return on equity ต่ำกว่า k_e การเพิ่ม retention อาจทำให้กำไรหรือสินทรัพย์เติบโต แต่ไม่จำเป็นต้องเพิ่มมูลค่าทางเศรษฐกิจ ดังนั้นคำถามที่สำคัญกว่า “บริษัทโตเท่าใด” คือ “เติบโตด้วยผลตอบแทนต่อเงินลงทุนใหม่เท่าใด”

ในทางปฏิบัติ ROE ควรถูกแยกแรงขับเคลื่อน เช่น margin, asset efficiency และ leverage เพราะ ROE สูงจากหนี้ที่มากขึ้นมีความหมายด้าน valuation และ risk ต่างจาก ROE สูงจาก operating efficiency

4.3 Corporate Actions และความต่อเนื่องของมูลค่า

การแตกหุ้น การรวมหุ้น หุ้นปันผล และสิทธิซื้อหุ้นเพิ่มทุนสามารถเปลี่ยนจำนวนหุ้น ราคาต่อหุ้น และฐานการคำนวณ EPS แต่การเปลี่ยนหน่วยเชิงกลไม่ควรถูกตีความว่าเป็นการสร้างมูลค่าทางเศรษฐกิจโดยอัตโนมัติ

หลักคิดคือแยก **การเปลี่ยนจำนวนหน่วย** ออกจาก **การเปลี่ยนสิทธิทางเศรษฐกิจ** Stock split เป็นตัวอย่างของการเปลี่ยนหน่วยโดยมูลค่ารวมเชิงกลไม่เปลี่ยน ขณะที่ rights issue, buyback หรือ issuance อาจเปลี่ยนทั้งเงินสด จำนวนหุ้น สัดส่วนความเป็นเจ้าของ และมูลค่าต่อหุ้น ขึ้นกับราคาออก/ซื้อคืนและการใช้เงินที่ตามมา

4.3.1 Stock Split

หากหุ้นจำนวน N_0 หุ้น ราคา P_0 ถูกแตกหุ้นในอัตรา $m : n$

$$N_1 = N_0 \frac{m}{n}$$

และราคาต่อหุ้นเชิงทฤษฎีเมื่อไม่มีผลอื่นคือ

$$P_1^* = P_0 \frac{n}{m}$$

ทำให้

$$N_0 P_0 = N_1 P_1^*$$

ตัวอย่าง 4.2. ผู้ลงทุนถือ 1,200 หุ้น ราคา 20 บาทต่อหุ้น บริษัทแตกหุ้น 3:2

$$N_1 = 1{,}200 \frac{3}{2} = 1{,}800$$

และ

$$P_1^* = 20 \frac{2}{3} \approx 13.3333$$

มูลค่ารวมเชิงกลทั้งก่อนและหลัง split เท่ากับ 24,000 บาท

หลักการปรับข้อมูล

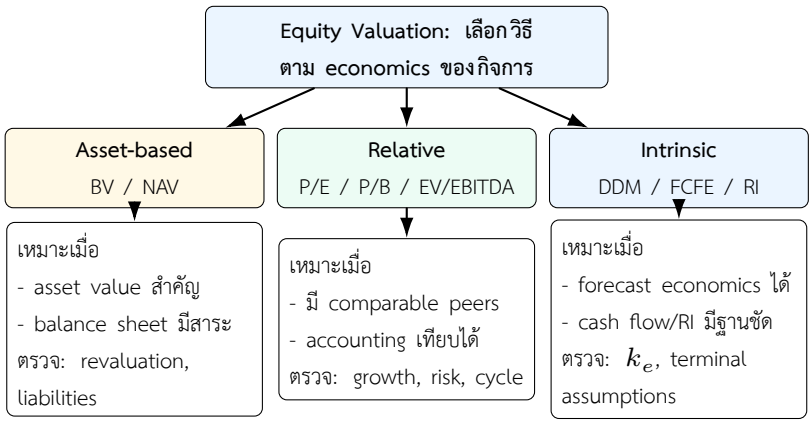
การประเมินต่อหุ้นต้องใช้จำนวนหุ้นและข้อมูลทางบัญชีที่อยู่บนฐานเดียวกัน หากมี split, rights issue, share buyback หรือ dilution ต้องตรวจว่า EPS, BVPS, DPS และจำนวนหุ้นถูก restate หรือปรับแล้วหรือไม่

สำหรับงานย้อนหลังควรตรวจด้วยว่าฐานข้อมูลได้ปรับราคาสำหรับ split แล้วหรือยัง และงบการเงินย้อนหลังได้ restate per-share figures หรือไม่ การปรับซ้ำสองครั้งทำให้ growth และ multiple ผิดได้มาก แม้สูตรถูกต้อง

4.4 แผนที่วิธีประเมินมูลค่าตราสารทุน

วิธีประเมินมูลค่าตราสารทุนสามารถจัดเป็นสามตระกูลหลัก ได้แก่ asset-based valuation, relative valuation และ intrinsic valuation [17]

แต่สามตระกูลไม่ได้เป็นคู่แข่งที่ต้องเลือกเพียงหนึ่งวิธี แต่เป็น **มุมมองคนละด้านของกิจการ**: asset-based ถามว่าสินทรัพย์สุทธิมีฐานมูลค่าเท่าใด relative valuation ถามว่าตลาดให้ราคากับกิจการที่เทียบเคียงกันอย่างไร และ intrinsic valuation ถามว่ากระแสผลประโยชน์ในอนาคตรองรับมูลค่าเท่าใด การใช้หลายมุมมองอย่างมีวินัยช่วยตรวจจับสมมติฐานที่ผิดปกติได้ดีกว่าการเฉลี่ยผลลัพธ์แบบกลไก



รูปที่ 4.2: ตระกูลหลักของการประเมินมูลค่าตราสารทุนและเงื่อนไขที่ทำให้แต่ละวิธีมีสาระทางเศรษฐกิจ

ตารางที่ 4.1: เปรียบเทียบแนวทางประเมินมูลค่าตราสารทุน

วิธี	ฐานข้อมูล	เหมาะเมื่อ	ข้อจำกัดหลัก
P/BV, NAV	balance sheet / asset value	มูลค่า สินทรัพย์ มี ความหมายต่อกิจการ	ไม่ สะท้อน intangible assets และ earning power ได้ครบ
P/ E, P/ B, EV/ EBITDA	earnings, book value, operating data, peers	มี comparable firms ที่ใกล้กัน	multiple สะท้อน growth, risk และ accounting ด้วย
DDM	dividends	payout policy สัมพันธ์กับ cash-generating capacity และ มีเสถียรภาพ	ใช้ ยาก เมื่อ ปันผล ไม่สอดคล้อง กับ ศักยภาพจ่ายเงินสด
FCFE	cash flow to equity	ต้องการ วัด เงินสด ที่สามารถเป็นของผู้ถือหุ้น	ต้อง ประมาณ reinvest-ment, leverage และ terminal value
Residual Income	book value และ abnor-mal earnings	book value มี คุณภาพ และ clean surplus ใกล้เคียง	ไวต่อ accounting qual-ity และ forecast ROE

4.5 Asset-Based Valuation

4.5.1 Book Value per Share และ P/BV

ให้ E_q เป็นส่วนของผู้ถือหุ้นสามัญตามบัญชีและ N เป็นจำนวนหุ้นสามัญที่เกี่ยวข้อง

$$BVPS = \frac{E_q}{N}$$

และ

$$P/BV = \frac{P_0}{BVPS}$$

ตัวอย่าง 4.3. บริษัทมีส่วนของผู้ถือหุ้น 50 ล้านบาท และมีหุ้น 2 ล้านหุ้น

$$BVPS = \frac{50}{2} = 25 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

ถ้า comparable valuation ใช้ P/BV เท่ากับ 1.4 เท่า

$$P^* = 1.4(25) = 35 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

P/BV ต่ำไม่ได้แปลว่า “ถูก” โดยอัตโนมัติ หากกิจการสร้าง ROE ต่ำกว่าต้นทุนเงินทุนของผู้ถือหุ้นอย่างต่อเนื่อง ตลาดอาจให้ราคาต่ำกว่า book value อย่างสมเหตุผล

ในทางกลับกัน P/BV สูงอาจมีเหตุผลเมื่อ book equity เป็นฐานที่กิจการสามารถสร้าง ROE เหนือ k_e ได้อย่างยั่งยืน แนวคิดนี้จะถูกทำให้เป็นสมการในหัวข้อ fundamental P/BV ภายหลัง จึงควรมอง P/BV เป็น **ราคาเทียบกับฐานทุนทางบัญชีภายใต้คุณภาพของ ROE** ไม่ใช่ราคาต่อสินทรัพย์แบบตายตัว

4.5.2 Net Asset Value

ถ้า A_{mkt} เป็นมูลค่าประเมินของสินทรัพย์ L^* เป็นหนี้สินและภาระที่ควรหัก และ N เป็นจำนวนหุ้น

บทนิยาม 4.3

$$NAVPS = \frac{A_{\text{mkt}} - L^*}{N}$$

ตัวอย่าง 4.4. สินทรัพย์ที่ประเมินใหม่มีมูลค่า 110 ล้านบาท หนี้สินและภาระรวม 60 ล้านบาท และมีหุ้น 6 ล้านหุ้น

$$NAVPS = \frac{110 - 60}{6} = 8.3333 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

NAV มีประโยชน์มากในกิจการที่มูลค่าสินทรัพย์สามารถประเมินได้โดยตรง เช่น holding company, property company หรือกิจการที่สินทรัพย์มีตลาดอ้างอิง แต่ในกิจการที่มูลค่าส่วนใหญ่เกิดจาก human capital, brand, technology หรือ network effects การใช้ NAV อย่างเดียวอาจประเมิน earning power ต่ำเกินไป

การทำ NAV ที่ใช้จริงควรแยก **book value** ออกจาก **realisable/market value** และหักภาระที่เกี่ยวข้องอย่างสอดคล้อง เช่น หนี้ ภาษีแฝง ค่าใช้จ่ายขายสินทรัพย์ หรือสิทธิของผู้ถือหลักทรัพย์ลำดับอื่น หากสินทรัพย์มีสภาพคล่องต่ำหรือราคาประเมินมีช่วงกว้าง NAV ก็ควรถูกรายงานเป็นช่วงเช่นเดียวกับ DCF

4.6 Relative Valuation

Relative valuation ประเมินสินทรัพย์โดยเทียบกับราคาของสินทรัพย์หรือกิจการที่มีคุณลักษณะใกล้เคียง จึงเป็นการประเมินแบบ conditional on market pricing

ดังนั้น relative valuation ไม่ได้บอก “มูลค่าที่แท้จริงโดยอิสระจากตลาด” แต่บอกว่ากิจการถูกประเมิน **แพงหรือถูกเมื่อเทียบกับฐานราคาของกลุ่ม** หากทั้งอุตสาหกรรมถูกตั้งราคาสูงเกินพื้นฐาน หุ้นที่มี multiple ต่ำที่สุดในกลุ่มก็ยังอาจมี absolute value ต่ำกว่าราคาได้

multiple แต่ละตัวสามารถมองเป็น **DCF ที่ถูกบีบอัด** เพราะค่าที่ตลาดยอมจ่ายต่อหนึ่งหน่วยของ earnings, book value หรือ EBITDA สะท้อนความคาดหวังต่อ growth, risk, cash conversion และ capital intensity อยู่ภายใน การเทียบ multiple จึงควรอธิบายความแตกต่างของ drivers ไม่ใช่เพียงหาค่ามัธยฐานของ peer

4.6.1 P/E และ Earnings Yield

เมื่อ $EPS > 0$

$$P/E = \frac{P_0}{EPS}$$

และ

$$E/P = \frac{EPS}{P_0} = \frac{1}{P/E}$$

P/E สูงอาจเกิดจาก expected growth สูง ความเสี่ยงต่ำ คุณภาพกำไรสูง หรือความคาดหวังที่มากเกินไป ขณะที่ P/E ต่ำอาจเกิดจาก undervaluation หรือปัญหาพื้นฐาน

นอกจากนี้ P/E ยังไวต่อวัฏจักรกำไร หากกำไรของธุรกิจ cyclical อยู่ใกล้จุดสูงสุด P/E อาจดูต่ำเพราะ denominator สูงผิดปกติ ในทางกลับกัน P/E อาจดูสูงในช่วงกำไรตกต่ำทั้งที่ราคาหุ้นไม่ได้แพงเชิงวัฏจักร การใช้ normalized earnings หรือ through-the-cycle earnings จึงมีประโยชน์ในบางอุตสาหกรรม

ประเด็นที่ต้องระวัง

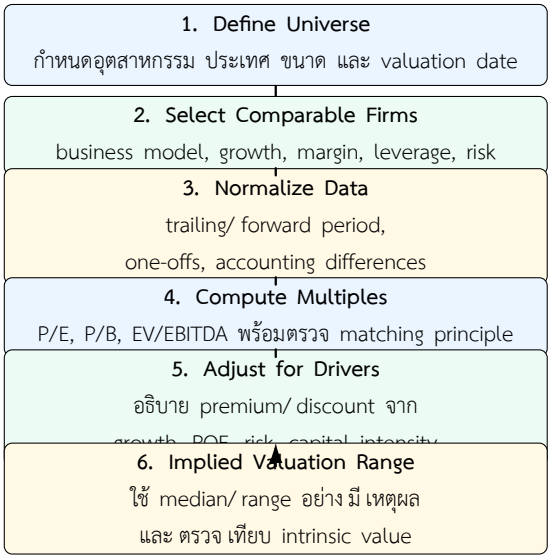
P/E ไม่มีความหมายเชิงเศรษฐศาสตร์ที่ดีเมื่อ EPS ติดลบ และ P/E ที่คำนวณจาก trailing EPS ไม่ควรถูกเปรียบเทียบตรงกับ forward P/E โดยไม่ระบุฐานเวลา

4.6.2 การเลือก Comparable Firms

การเลือก peer ควรพิจารณา

ก่อนคำนวณ multiple ควรกำหนด **peer-selection rule** ล่วงหน้าเพื่อป้องกันการเลือกบริษัทที่ทำให้ข้อสรุปตรงกับความต้องการของผู้ประเมิน โดยเฉพาะเมื่อ universe มีบริษัทจำนวนมาก

- business model และอุตสาหกรรม
- ขนาดและตลาดที่ให้บริการ
- expected growth
- operating margin และ capital intensity
- leverage และ credit risk
- accounting policy และ quality of earnings
- currency และ reporting period



รูปที่ 4.3: กระบวนการ relative valuation ที่เริ่มจากความเทียบเคียงกันของกิจการก่อนคำนวณและตีความ multiples

4.6.3 EV/EBITDA

Enterprise Value ในรูปพื้นฐานคือ

$$EV = \text{Market Value of Equity} + \text{Debt} - \text{Cash}$$

โดยงานประเมินจริงอาจต้องปรับ preferred stock, minority interest, lease liabilities, unfunded obligations และ non-operating assets ตามวัตถุประสงค์ [17]

ประโยชน์ของ EV/EBITDA คือช่วยลดความแตกต่างจาก capital structure บางส่วน แต่ EBITDA ไม่ใช่ cash flow เพราะยังไม่หัก CapEx, การเปลี่ยนแปลงเงินทุนหมุนเวียน ภาษี และต้นทุนเงินทุน บริษัทที่ต้องลงทุนทดแทนสูงสามารถมี EV/EBITDA ต่ำแต่ free cash flow ต่ำได้ จึงควรใช้ multiple นี้ร่วมกับ capital intensity และ cash conversion

จากนั้น

$$EV/EBITDA = \frac{EV}{EBITDA}$$

ตัวอย่าง 4.5. มูลค่าตลาดหุ้นเท่ากับ 5,000 ล้านบาท หนี้ 2,000 ล้านบาท เงินสดส่วนเกิน 500 ล้านบาท และ EBITDA 1,300 ล้านบาท

$$EV = 5{,}000 + 2{,}000 - 500 = 6{,}500$$

ดังนั้น

$$EV/EBITDA = \frac{6{,}500}{1{,}300} = 5 \text{ เท่า}$$

Matching Principle ของตัวคูณ

ตัวเศษและตัวส่วนต้องอยู่บนฐานผู้มีสิทธิเรียกร้องเดียวกัน P/E จับ equity value กับ earnings to equity ส่วน EV/EBITDA จับ enterprise value กับ operating metric ก่อนการแบ่งกระแสเงินสดให้เจ้าหนี้และผู้ถือหุ้น

4.7 Dividend Discount Model

หลักของ DDM คือมูลค่าหุ้นเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลที่ผู้ถือหุ้นคาดว่าจะได้รับ โดย discount ด้วย required return on equity k_e [17]

DDM ไม่ได้สมมติว่าผู้ลงทุนจำเป็นต้องถือหุ้นตลอดไป หลักการคือราคาที่ผู้ลงทุนรายถัดไปยอมจ่ายในอนาคตเองก็ต้องมาจากมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดหลังจากวันขาย หากมองต่อเนื่องจนสุดท้าย มูลค่าของ equity จึงผูกกับ distributions ที่ผู้ถือหุ้นได้รับ ไม่ใช่การคาดหวังว่าจะขายต่อในราคาสูงขึ้นโดยไม่มีฐานกระแสเงินสด

4.7.1 Finite-Horizon DDM

ถ้าถือหุ้น n งวด ได้รับ $D_1, \dots, D_n$ และขายปลายงวดที่ P_n

Finite-Horizon DDM

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+k_e)^t} + \frac{P_n}{(1+k_e)^n}$$

ตัวอย่าง 4.6. คาดว่าเงินปันผลสามปีข้างหน้าเท่ากับ 1.50, 1.60 และ 1.70 บาท และราคาขายปลายปีที่ 3 เท่ากับ 35 บาท หาก $k_e = 10\%$

$$V_0 = \frac{1.50}{1.10} + \frac{1.60}{1.10^2} + \frac{1.70 + 35}{1.10^3}$$

จึงได้

$$V_0 \approx 30.26 \text{ บาท}$$

4.7.2 Infinite-Horizon DDM

ถ้าลำดับเงินปันผลทำให้ผลรวมลู่เข้า

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_e)^t}$$

ราคา terminal ใน finite-horizon model ไม่ได้หายไป แต่สะท้อน present value ณ เวลา n ของ cash flows หลังจากนั้น

ข้อความนี้ช่วยป้องกันความเข้าใจผิดที่พบบ่อยว่า terminal price เป็น “ตัวแปรอิสระ” ที่สามารถตั้งขึ้นเพื่อให้ valuation ได้ค่าที่ต้องการ แท้จริงแล้ว terminal price ต้องสอดคล้องกับสถานะกิจการและ valuation assumptions ณ เวลา n

ทฤษฎีบท 4.1

ถ้า

$$P_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{n+j}}{(1+k_e)^j}$$

และ series ลู่เข้า แล้ว finite-horizon DDM และ infinite-horizon DDM ให้ค่าเดียวกัน

พิสูจน์. แทน P_n ลงใน finite-horizon equation

$$\frac{P_n}{(1+k_e)^n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{n+j}}{(1+k_e)^{n+j}}$$

เมื่อรวมกับ $D_1, \dots, D_n$ จะได้

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_e)^t}$$

□

4.8 DDM กรณีสำคัญ

4.8.1 Constant Dividend Perpetuity

ถ้าจ่ายเงินปันผลคงที่ D ตลอดไปและ $k_e > 0$

$$V_0 = \frac{D}{k_e}$$

ตัวอย่างเช่น หุ้นบุริมสิทธิจ่าย 0.80 บาททุก 6 เดือนและ required return ต่อครึ่งปีเท่ากับ 3

$$V_0 = \frac{0.80}{0.03} = 26.6667 \text{ บาท}$$

4.8.2 Gordon Growth Model

สมมติเงินปันผลเติบโตคงที่

$$D_t = D_1(1+g)^{t-1}$$

และ

$$k_e > g$$

จะได้

Gordon Growth Model

$$V_0 = \frac{D_1}{k_e - g}$$

พิสูจน์. จาก DDM

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k_e)^t}$$

เขียนใหม่เป็น

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k_e} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+k_e}\right)^t$$

series เรขาคณิตลู่เข้าเมื่อ

$$\left|\frac{1+g}{1+k_e}\right| < 1$$

ภายใต้บริบททั่วไปที่ $k_e, g > -1$ เงื่อนไขนี้ให้ $k_e > g$

ดังนั้น

$$V_0 = \frac{D_1}{1+k_e}\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+k_e}} = \frac{D_1}{k_e - g}$$

□

ตัวอย่าง 4.7. คาดว่าเงินปันผลปีหน้า $D_1 = 2$ บาท เติบโตระยะยาว $g = 4\%$ และ $k_e = 10\%$

$$V_0 = \frac{2}{0.10 - 0.04} = 33.3333 \text{ บาท}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

หาก $g \geq k_e$ Gordon model ในรูปมาตรฐานไม่ให้มูลค่าจำกัดที่มีความหมายทางเศรษฐศาสตร์ ปัญหานี้ไม่ควรแก้ด้วยการแทนตัวเลขเชิงกล แต่ต้องปรับ long-run growth assumption หรือใช้ multi-stage model

ใน steady state ค่า g ควรเป็นอัตราที่กิจการสามารถรักษาได้โดยไม่ต้องเพิ่มส่วนแบ่งตลาดหรือผลตอบแทนต่อเงินลงทุนอย่างไม่จำกัด ดังนั้น long-run growth ต้องตรวจร่วมกับขนาดกิจการ ภาวะอุตสาหกรรม เงินเฟ้อ การเติบโตของเศรษฐกิจ และ reinvestment ที่จำเป็น ไม่ควรใช้ growth ช่วง high-growth เป็น terminal growth โดยตรง

4.9 Sensitivity ของ Gordon Model

จาก

$$V_0 = \frac{D_1}{k_e - g}$$

จะได้

$$\frac{\partial V_0}{\partial k_e} = -\frac{D_1}{(k_e - g)^2} < 0$$

และ

$$\frac{\partial V_0}{\partial g} = \frac{D_1}{(k_e - g)^2} > 0$$

รวมทั้ง

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial k_e^2} = \frac{2D_1}{(k_e - g)^3} > 0$$

เมื่อ $D_1 > 0$ และ $k_e > g$

ดังนั้นมูลค่าลดลงเมื่อ required return เพิ่ม และเพิ่มขึ้นเมื่อ long-run growth เพิ่ม พร้อมทั้งมี nonlinearity สูงเมื่อ $k_e - g$ แคบลง

ความไวนี้มีความหมายเชิงปฏิบัติสูง เพราะ k_e และ g เป็นค่าที่สังเกตไม่ได้โดยตรง หาก $k_e - g$ เหลือเพียงไม่กี่จุดร้อยละ ความคลาดเคลื่อน 0.5–1.0 จุดร้อยละสามารถเปลี่ยนมูลค่าอย่างมีนัยสำคัญ จึงไม่ควรรายงานจำนวนทศนิยมมากกว่าความแม่นยำของสมมติฐาน

สามารถเห็นความไวในเชิงสัดส่วนจาก

$$\frac{\partial \ln V_0}{\partial k_e} = -\frac{1}{k_e - g}, \qquad \frac{\partial \ln V_0}{\partial g} = \frac{1}{k_e - g},$$

ซึ่งตอกย้ำว่าเมื่อ spread $k_e - g$ แคบ ความผิดพลาดของสมมติฐานจะถูกขยายเข้าสู่ valuation

ตารางที่ 4.2: Sensitivity ของ Gordon value เมื่อ $D_1 = 2$ บาท

$g \backslash k_e$	8%	9%	10%	11%
2%	33.33	28.57	25.00	22.22
3%	40.00	33.33	28.57	25.00
4%	50.00	40.00	33.33	28.57
5%	66.67	50.00	40.00	33.33

Valuation Range

เมื่อมูลค่าไวต่อ k_e และ g มาก ควรรายงาน sensitivity table หรือ scenario range พร้อม assumptions แทนการแสดง target value เพียงค่าหนึ่ง

4.10 Multi-Stage Dividend Discount Model

กิจการเติบโตสูงมักไม่สามารถเติบโตด้วยอัตราเดียวตลอดไป จึงแบ่งการประเมินเป็นช่วง explicit forecast และ stable-growth phase

การแบ่งช่วงควรสะท้อน **economics of transition** ไม่ใช่เลือกจำนวนปีเพียงเพื่อความสะดวก เช่น ช่วง high growth ควรสิ้นสุดเมื่อ margin, growth, ROE และ leverage เริ่มเข้าใกล้ระดับที่แข่งขันได้ในระยะยาว การเปลี่ยนจากช่วงเติบโตสูงสู่ steady state อย่างฉับพลันเกินไปอาจสร้าง terminal value ที่ไม่สอดคล้องกับงบปีสุดท้าย

สำหรับ two-stage DDM สมมติเงินปันผลเติบโต g_H ใน n ปีแรก และ g_S ตั้งแต่ปี $n+1$ เป็นต้นไป โดย $k_e > g_S$

$$D_t = D_0(1+g_H)^t \qquad t = 1, \dots, n$$

เงินปันผลปี $n+1$ คือ

$$D_{n+1} = D_n(1+g_S)$$

terminal value ณ เวลา n คือ

$$TV_n = \frac{D_{n+1}}{k_e - g_S}$$

ดังนั้น

Two-Stage DDM

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+k_e)^t} + \frac{TV_n}{(1+k_e)^n}$$

ตัวอย่าง 4.8. ให้ $D_0 = 1.20$ บาท เติบโต 15% ต่อปี 3 ปี หลังจากนั้นเติบโต 5% และ $k_e = 10\%$

$$D_1 = 1.38$$

$$D_2 = 1.587$$

$$D_3 = 1.82505$$

และ

$$D_4 = 1.82505(1.05) = 1.9163025$$

ดังนั้น

$$TV_3 = \frac{1.9163025}{0.10 - 0.05} = 38.32605$$

เมื่อคิดลดเงินปันผลสามปีและ terminal value กลับสู่เวลา 0 จะได้มูลค่าประมาณ

$$V_0 \approx 32.73 \text{ บาท}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Terminal value มักเป็นสัดส่วนใหญ่ของมูลค่ารวม จึงต้องตรวจ terminal growth, normalized profitability, payout และ required return อย่างเข้มงวด การสร้าง explicit forecast จำนวนมากไม่ช่วยหาก terminal assumptions ไม่สมเหตุผล

หนึ่งใน diagnostic ที่ควรรายงานคือ

$$\text{Terminal Value Share} = \frac{\text{PV}(TV_n)}{V_0}.$$

หากสัดส่วนนี้สูงมาก ผลประเมินกำลังพึ่งพาสมมติฐาน steady state มากกว่ารายละเอียด forecast ระยะต้น ผู้ประเมินควรเพิ่ม sensitivity ต่อ g_S, k_e, normalized ROE และ payout แทนการเพิ่มความละเอียดของปีแรก ๆ เพียงอย่างเดียว

ใน steady state หากใช้ $g = bROE$ และ $ROE > 0$ จะได้ $b = g/ROE$ และ payout ratio $= 1 - g/ROE$ ทำให้ growth, profitability และ payout ถูกบังคับให้สอดคล้องกันทางคณิตศาสตร์

4.11 Fundamental P/E และ P/BV

ตัวคูณสามารถเชื่อมกลับสู่ intrinsic valuation ได้ภายใต้สมมติฐาน Gordon growth

ถ้า

$$D_1 = EPS_1(1-b)$$

แล้ว

$$P_0 = \frac{EPS_1(1-b)}{k_e - g}$$

จึงได้ forward fundamental P/E

Fundamental Forward P/E

$$\frac{P_0}{EPS_1} = \frac{1-b}{k_e - g}$$

ถ้า

$$EPS_1 = ROE_1 B_0$$

จะได้

Fundamental P/B

$$\frac{P_0}{B_0} = \frac{ROE_1(1-b)}{k_e - g}$$

และถ้าใช้ sustainable growth identity

$$g = bROE$$

จะเห็นว่าตัวคูณสัมพันธ์กับ profitability, reinvestment, growth และ risk อย่างเป็นระบบ

เมื่อแทน $b = g/ROE$ ใน fundamental P/B จะได้รูปที่ช่วยตีความได้ชัดขึ้น

$$\frac{P_0}{B_0} = \frac{ROE - g}{k_e - g},$$

ภายใต้สมมติฐานเดียวกัน ดังนั้นโดยหลัก หาก $ROE = k_e$ จะได้ $P/B \approx 1$ และหาก $ROE > k_e$ อย่างยั่งยืน กิจการสามารถมี premium เหนือ book value ได้ ความสัมพันธ์นี้เป็นสะพานไปสู่ residual income model โดยตรง

ข้อสังเกต

fundamental P/E และ P/BV เป็น model identities ภายใต้สมมติฐานเฉพาะ ไม่ใช่ threshold สากล สำหรับบอกว่าหุ้นถูกหรือแพง จุดสำคัญคือช่วยอธิบายว่าเหตุใดกิจการ ROE สูง growth สูง และ required return ต่ำจึงสามารถซื้อขายด้วย multiple สูงอย่างสมเหตุผล

4.12 Free Cash Flow to Equity

DDM ใช้เงินปันผลที่กิจการเลือกจ่าย แต่ FCFE วัดเงินสดที่สามารถเป็นของผู้ถือหุ้นหลังจากภาระการลงทุนและการจัดหาเงินทุนที่จำเป็น [17]

ความแตกต่างนี้ทำให้ FCFE มีประโยชน์เมื่อ dividend policy ไม่สะท้อน capacity เช่น บริษัทที่เก็บเงินสดจำนวนมากหรือซื้อหุ้นคืนแทนการจ่ายปันผล อย่างไรก็ตาม FCFE ไม่ใช่ “เงินสดส่วนเกินแบบปราศจากเงื่อนไข” เพราะการประมาณ CapEx, working capital และ net borrowing ต้องสอดคล้องกับแผนเติบโตและโครงสร้าง

เงินทุน

สำหรับกิจการทั่วไปในรูปพื้นฐาน

บทนิยาม 4.4

$$FCFE = NI + \text{Depreciation} - \text{CapEx} - \Delta NWC + \text{Net Borrowing}$$

โดย

$$\text{Net Borrowing} = \text{Debt Issued} - \text{Debt Repaid}$$

ถ้า $FCFE_t$ เป็น FCFE รวมของกิจการ มูลค่าหุ้นทั้งหมดคือ

$$V_0^E = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFE_t}{(1+k_e)^t}$$

และมูลค่าต่อหุ้นคือ

$$V_0^{\text{share}} = \frac{V_0^E}{N_0}$$

เมื่อจำนวนหุ้นคงที่หรือมีการปรับ dilution อย่างสอดคล้อง

FCFE ติดลบไม่จำเป็นต้องหมายถึงกิจการไม่มีมูลค่า อาจเกิดจากการลงทุนหนักในช่วงเติบโต แต่ valuation ต้องอธิบายได้ว่าเงินลงทุนดังกล่าวจะเปลี่ยนเป็นกระแสเงินสดบวกเมื่อใดและด้วยผลตอบแทนเท่าใด ในทางกลับกัน FCFE สูงจากการกู้เพิ่มมากผิดปกติไม่ควรถูกตีความว่าเป็น operating strength โดยไม่ตรวจ leverage

4.12.1 Constant-Growth FCFE

ถ้า

$$FCFE_t = FCFE_1(1+g)^{t-1}$$

และ $k_e > g$

$$V_0^E = \frac{FCFE_1}{k_e - g}$$

ตัวอย่าง 4.9. คาดว่า FCFE ปีหน้าเท่ากับ 120 ล้านบาท เติบโตระยะยาว 4% และ $k_e = 10\%$

$$V_0^E = \frac{120}{0.10 - 0.04} = 2{,}000 \text{ ล้านบาท}$$

ถ้ามีหุ้น 100 ล้านหุ้น

$$V_0^{\text{share}} = 20 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

4.12.2 DDM กับ FCFE ควรให้ผลสอดคล้องเมื่อใด

หากในระยะยาวกิจการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ FCFE และใช้ growth กับ k_e ที่สอดคล้องกัน DDM และ FCFE valuation ควร converge ไปสู่มูลค่าเดียวกันโดยหลักเศรษฐศาสตร์

หาก DDM ให้มูลค่าต่ำกว่า FCFE มาก อาจสะท้อนว่ากิจการจ่ายเงินปันผลต่ำกว่าความสามารถสร้างเงินสด แต่ผู้ประเมินต้องพิจารณาด้วยว่า retained cash ถูกลงทุนสร้างมูลค่าหรือสะสมโดยไม่มีประสิทธิภาพ

การ reconcile สองวิธีควรตรวจเส้นทางของเงินสดที่ไม่ได้จ่ายเป็นปันผล: หากถูก reinvest ด้วยผลตอบแทนเหนือ k_e มูลค่าอาจเกิดผ่าน growth ในอนาคต แต่หากสะสมเป็น excess cash หรือถูกใช้ในโครงการที่ผลตอบแทนต่ำกว่า cost of equity ส่วนต่างระหว่าง capacity กับ distribution ไม่ควรถูกให้มูลค่าเต็มโดยอัตโนมัติ

ประเด็นที่ต้องระวัง

FCFE ของสถาบันการเงินต้องตีความแตกต่างจากบริษัททั่วไป เพราะหนี้ เงินทุนหมุนเวียน และเงินลงทุนเชื่อมโยงกับกิจกรรมดำเนินงานและข้อกำกับเงินกองทุน การใช้สูตร CapEx–NWC แบบอุตสาหกรรมทั่วไปกับธนาคารโดยตรงอาจไม่เหมาะสม

4.13 Residual Income Valuation

Residual income เชื่อมมูลค่าตามบัญชีกับ earning power โดยวัดกำไรส่วนที่สูงกว่าต้นทุนเงินทุนของผู้ถือหุ้น

จุดเด่นคือมูลค่าส่วนหนึ่งถูกยึดไว้ที่ book value วันนี้ แล้ว forecast เฉพาะ **excess profitability** ในอนาคต จึงมีประโยชน์เมื่อ dividends หรือ FCFE ผันผวน แต่ book value และ earnings มีสาระทางเศรษฐกิจ

โดยแนวคิดนี้สอดคล้องกับกรอบ residual-income valuation ในวรรณกรรมบัญชีและการประเมินมูลค่า [38, 39]

ให้ B_{t-1} เป็น book value of equity ต้นงวด และ E_t เป็นกำไร

$$RI_t = E_t - k_e B_{t-1}$$

หรือ

$$RI_t = (ROE_t - k_e) B_{t-1}$$

ภายใต้ clean-surplus accounting

$$B_t = B_{t-1} + E_t - D_t$$

และเงื่อนไขลู่เข้าที่เหมาะสม จะได้

Residual Income Valuation

$$V_0 = B_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{RI_t}{(1+k_e)^t}$$

ดังนั้น

$$V_0 - B_0 = \text{PV}(\text{future residual income})$$

ถ้า expected future ROE เท่ากับ k_e ตลอดและ residual income เป็นศูนย์ มูลค่าภายใต้แบบจำลองจะเท่ากับ book value

นี่เป็นเหตุผลเชิงเศรษฐศาสตร์ของความสัมพันธ์ระหว่าง P/B และ ROE: premium เหนือ book value ไม่ได้เกิดจาก ROE สูงในปีเดียว แต่เกิดจากมูลค่าปัจจุบันของ **ความสามารถรักษา ROE เหนือ k_e ในอนาคต** หากการแข่งขันทำให้ excess ROE fade ลงเร็ว premium ควรลดลงตามไปด้วย

ถ้า

$$ROE > k_e$$

และ excess return มีความยั่งยืน จะเกิด premium เหนือ book value

ตัวอย่าง 4.10. สมมติ $B_0 = 100$ บาทต่อหุ้น กำไรปีหน้า 14 บาท และ $k_e = 10\%$

$$RI_1 = 14 - 0.10(100) = 4 \text{ บาท}$$

หาก residual income 4 บาทคงที่ตลอดไปในตัวอย่างเชิงกล

$$V_0 = 100 + \frac{4}{0.10} = 140 \text{ บาท}$$

ตัวอย่างนี้มีไว้แสดงโครงสร้างของแบบจำลอง ไม่ได้หมายความว่า residual income จะคงที่ได้จริงตลอดไป

ประเด็นที่ต้องระวัง

Residual income model ไวต่อคุณภาพของ book value และ accounting adjustments หากมี dirty-surplus items, write-offs, share-based compensation หรือการบันทึกสินทรัพย์ไม่มีตัวตนที่แตกต่างกัน ต้องปรับฐานก่อนตีความ

ในงานจริงควรสร้างสมมติฐาน **fade of excess ROE** อย่างชัดเจน เช่น ให้ $ROE_t - k_e$ ลดลงตามเวลาแทนการคง residual income เดิมตลอดไป เพราะ economic rents มักถูกการแข่งขันและการเปลี่ยนเทคโนโลยีกดให้ลดลง เว้นแต่มีเหตุผลรองรับความได้เปรียบเชิงโครงสร้าง

4.14 Required Return และ Valuation Consistency

อัตรา k_e คือ required return ของผู้ถือหุ้นที่สอดคล้องกับความเสี่ยงของ equity cash flows ไม่ใช่เพียงอัตราดอกเบี้ยเงินฝากหรือค่าที่เลือกเพื่อให้มูลค่าใกล้ราคาตลาด

ใน valuation k_e ทำหน้าที่สองอย่างพร้อมกัน คือเป็น **opportunity cost of capital** และเป็นตัวสะท้อนความเสี่ยงของกระแสเงินสดที่ผู้ถือหุ้นรับอยู่ ดังนั้นการปรับ k_e เพื่อ “ให้ราคาเป้าหมายสมเหตุผล” โดยไม่อธิบาย risk assumptions เป็นการย้อนเหตุผลของแบบจำลอง

การประมาณ k_e อาจใช้ asset-pricing model เช่น CAPM

$$k_e = R_f + \beta \left[\mathbb{E}(R_M) - R_f\right]$$

แต่การพัฒนา CAPM และการประมาณ beta อย่างเป็นระบบจะอยู่ในบทที่ 8

สำหรับบทนี้ประเด็นสำคัญคือ **valuation consistency**: หากเปลี่ยน leverage, currency, inflation convention หรือความเสี่ยงของธุรกิจใน forecast ก็ควรตรวจว่าค่า k_e ที่ใช้ยังสอดคล้องอยู่หรือไม่ ไม่ควรคง discount rate เดิมเพียงเพื่อความสะดวก

Consistency Principle

1. cash flow ที่เป็น nominal ต้อง discount ด้วย nominal required return
2. cash flow ที่เป็น real ต้อง discount ด้วย real required return
3. cash flow ในสกุลเงินหนึ่งควรใช้ required return ที่สอดคล้องกับสกุลเงินนั้น
4. FCFE และ dividends ใช้ cost of equity ไม่ใช่ WACC
5. FCFF ใช้ WACC และให้ enterprise value ไม่ใช่ equity valueโดยตรง
6. growth, reinvestment และ profitability ต้องสอดคล้องกันทางเศรษฐศาสตร์

4.15 Valuation under Uncertainty

การประเมินมูลค่าที่มีคุณภาพควรแสดง uncertainty ของ assumptions โดยใช้ sensitivity analysis, scenario analysis หรือ probabilistic valuation ตามระดับความเหมาะสม

ทั้ง สาม เครื่อง มือ ตอบ คำถาม ต่าง กัน: **sensitivity analysis** เปลี่ยน ตัวแปร ที ละ ตัว เพื่อ ดู ความ ไว, **scenario analysis** เปลี่ยนหลายสมมติฐานให้เป็นภาพเศรษฐกิจที่สอดคล้องกัน และ **probabilistic valuation** กำหนดการแจกแจงของ inputs เพื่อสร้าง distribution ของมูลค่า การเลือกวิธีควรสัมพันธ์กับคุณภาพข้อมูล ไม่ใช่เพิ่มความซับซ้อนเพื่อให้ดูแม่นยำ

4.15.1 Scenario Analysis

กำหนด scenario $s \in \{\text{Bear}, \text{Base}, \text{Bull}\}$ และให้

$$V_0^{(s)} = \mathcal{V}(\theta_s)$$

โดย θ_s เป็นชุด assumptions ของ scenario นั้น

แทนที่จะรายงาน

$$V_0 = 37.50$$

เพียงค่าเดียว อาจรายงาน

$$V_0^{\text{Bear}} = 28$$

$$V_0^{\text{Base}} = 37.5$$

และ

$$V_0^{\text{Bull}} = 48$$

พร้อมระบุเหตุผลของ growth, margin, payout และ k_e ในแต่ละกรณี

scenario ที่ดีต้องมี **internal consistency** เช่น Bear case ไม่ควรลดยอดขายแต่เพิ่ม margin และลด risk premium โดยไม่มีเหตุผลรองรับ หากกำหนดความน่าจะเป็น p_s ให้แต่ละ scenario สามารถคำนวณ $\sum_s p_s V_0^{(s)}$ เป็น probability-weighted value ได้ แต่ควรรายงาน distribution/range ควบคู่กันเพื่อไม่ให้ expected value เพียงค่าเดียวซ่อน tail outcomes

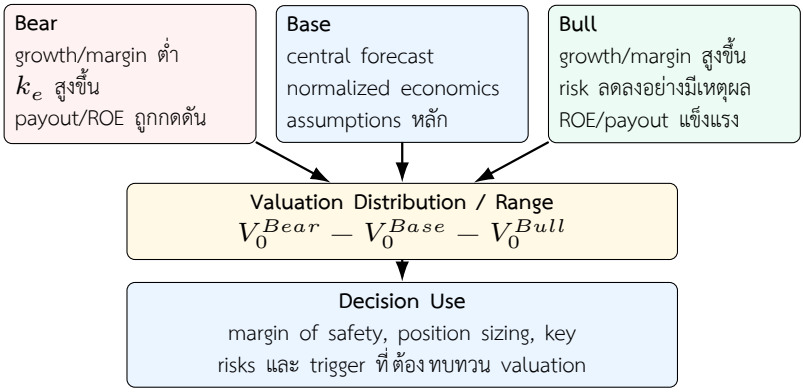
4.15.2 Margin of Safety

ถ้ามูลค่าที่ประเมินได้เท่ากับ $\widehat{V}_0$ และราคาตลาด P_0 สามารถนิยาม valuation gap แบบหนึ่งเป็น

$$M = \frac{\widehat{V}_0 - P_0}{\widehat{V}_0}$$

แต่การกำหนดเกณฑ์ margin of safety ไม่ควรเป็นเลขตายตัว เพราะควรสัมพันธ์กับ uncertainty ของ business model, forecast horizon, leverage, cyclicality และ model risk

ดังนั้น margin of safety ควรมากขึ้นเมื่อช่วงมูลค่ากว้าง terminal value share สูง งบการเงินมีความ



รูปที่ 4.4: Scenario valuation เปลี่ยนหลายสมมติฐานอย่างสอดคล้องกันเพื่อแสดงช่วงมูลค่าและความเสี่ยงของการตัดสินใจ

ไม่แน่นอน leverage สูง หรือธุรกิจขึ้นกับสมมติฐานระยะไกล และควรน้อยลงเมื่อ cash flows สังเกตได้ชัด สมมติฐานมีความเสถียร และมีหลักฐานอิสระหลายวิธีให้ผลใกล้กัน ทั้งนี้ margin of safety ไม่แทน position sizing หรือ portfolio risk control

4.16 Valuation Reconciliation

เมื่อใช้หลายวิธี ไม่ควรเฉลี่ยมูลค่าจาก DDM, FCFE, residual income และ multiples โดยอัตโนมัติ ความต่างระหว่างวิธีเป็นข้อมูลเชิงวินิจฉัย

ตัวอย่างเช่น หาก DDM ต่ำกว่า FCFE มาก ให้ตรวจ payout policy; หาก residual income สูงกว่า DDM มาก ให้ตรวจ persistence ของ ROE และ book-value quality; หาก relative valuation สูงกว่า intrinsic valuation มาก ให้ตรวจว่าทั้ง peer group กำลังถูกตั้งราคาบน growth/risk assumptions ที่สูงกว่าของเราอยู่หรือไม่ การ reconcile จึงเป็นกระบวนการค้นหา **สมมติฐานที่ทำให้แบบจำลองต่างกัน** ก่อนตัดสินว่าจะให้น้ำหนักวิธีใด

ตารางที่ 4.3: คำถามสำหรับ Valuation Reconciliation

ประเด็น	คำถามตรวจสอบ
Cash flow	dividends สะท้อน FCFE หรือไม่
Growth	growth จาก forecast สอดคล้องกับ reinvestment และ ROE หรือไม่
Discount rate	ทุกวิธีใช้ k_e ที่สอดคล้องกับ risk และ currency หรือไม่
Terminal assumptions	long-run growth และ profitability สมเหตุผลหรือไม่
Accounting	EPS, book value และ EBITDA ถูก normalize หรือไม่
Capital structure	leverage ที่ใช้ใน peer และ forecast ใกล้เคียงกันหรือไม่
Share count	dilution, options และ buybacks ถูกสะท้อนหรือไม่
Date alignment	price, statements และ forecasts อยู่ ณ valuation date เดียวกันหรือไม่

Valuation Reconciliation

ความแตกต่างระหว่างแบบจำลองไม่ใช่สิ่งที่ต้องกำจัดด้วยการเฉลี่ยทันที แต่เป็นสัญญาณให้ย้อนตรวจ cash flow, growth, risk, accounting และ terminal assumptions

4.17 งานวิจัยของผู้เขียน: จาก Financial Ratios สู่การคัดเลือกหุ้นหลายเกณฑ์

Kesamoon และ Witayakiattilerd ศึกษาการคัดเลือกหุ้นภายใต้เกณฑ์ทางการเงินหลายมิติและความกำกวม โดยใช้ Fuzzy Analytical Hierarchy Process กับข้อมูลย้อนหลังของหุ้นใน SET50 [28]

ประเด็นที่เชื่อมกับบทนี้คือ การใช้ P/E, P/BV, ROA, ROE หรือ ratio เพียงตัวเดียวสามารถให้ ranking ที่ขัดกัน เพราะแต่ละ ratio มองกิจการคนละมิติ

ในเชิงปฏิบัติ ratio-based screening สามารถทำหน้าที่เป็น **upstream filter** เพื่อคัด candidate universe ก่อนทำ valuation เชิงลึก แต่ไม่ควรแปลง score หลายเกณฑ์ให้เป็น target price โดยตรง เพราะ score เป็นการจัดอันดับเชิงสัมพัทธ์ ขณะที่ valuation ต้องมีฐานกระแสเงินสดและ required return ที่ตีความเป็นหน่วยเงินได้

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: บทเรียนจาก Multi-Criteria Stock Selection

การคัดเลือกหุ้นและการประเมินมูลค่าไม่ควรถูกทำให้เท่ากันโดยตรง

- valuation ถามว่า ภายใต้สมมติฐานนี้กิจการมีมูลค่าเท่าใด
- screening/ranking ถามว่า ภายใต้ชุดเกณฑ์นี้สินทรัพย์ใดมีคุณลักษณะเด่นกว่า
- portfolio construction ถามว่า ควรจัดน้ำหนักสินทรัพย์ร่วมกันอย่างไรภายใต้ risk constraints

ทั้งสามขั้นตอนเชื่อมโยงกันแต่ตอบคำถามคนละระดับ

4.18 Data Lineage และข้อผิดพลาดที่พบบ่อย

ตารางที่ 4.4: Checklist สำหรับ Valuation Data Lineage

ชั้นข้อมูล	ต้องบันทึก	ตัวอย่างความผิดพลาด
Price/share count	valuation date, adjusted/ unadjusted price, diluted shares	ใช้ ราคา ปัจจุบัน กับ จำนวน หุ้น คนละ งวด
Earnings	trailing/forward/normalized EPS	ใช้กำไร one-off เป็นฐานระยะยาว
Dividends	DPS, special dividend, payout policy	นับ special dividend เป็น recurring
Book value	common equity, revaluation, intangible adjustments	ใช้ total equity ที่ มี preferred claims โดยไม่ปรับ
Debt/cash	debt definition, leases, excess cash	EV definition ไม่ตรง peer
Forecast	revenue, margin, reinvestment, leverage	growth สูง แต่ ไม่ รองรับ ด้วย reinvestment
Discount rate	risk-free, beta, premium, currency	ใช้ nominal cash flow กับ real rate
Terminal value	growth, ROE, payout, steady-state margin	terminal growth สูงกว่าความเป็นไปได้ระยะยาว

ข้อผิดพลาดที่พบได้บ่อย ได้แก่

ก่อนรายการข้อผิดพลาด ควรแยก **data date** ออกจาก **information date** เช่น งบไตรมาสสิ้นสุดวันที่ 30 มิถุนายนอาจเผยแพร่ในเดือนสิงหาคม หากทำ historical valuation หรือ backtest ต้องใช้วันที่ข้อมูลเปิดเผยจริง มิฉะนั้นจะเกิด look-ahead bias นอกจากนี้ต้องเก็บทั้ง originally reported และ restated data เมื่อการแก้ไขย้อนหลังมีผลต่อสิ่งที่ผู้ลงทุนรู้ ณ เวลานั้น

1. double counting เงินปันผลกับ adjusted price
2. ใช้ trailing multiple เทียบกับ forward multiple โดยไม่ปรับ
3. ใช้ EPS ที่ติดลบใน P/E
4. ใช้ FCFE แต่ discount ด้วย WACC
5. ใช้ enterprise multiple แล้วแปลงเป็น equity valueโดยไม่หัก net debt
6. ใช้ terminal growth ใกล้หรือสูงกว่า k_e
7. ใช้ ROE สูงใน terminal period โดยไม่ตรวจ competitive convergence
8. มอง share split หรือ stock dividend เป็นการสร้างมูลค่าเชิงกล
9. ใช้มูลค่าจุดเดียวโดยไม่แสดง sensitivity

4.19 Investment Lab: Equity Valuation Engine

Investment Lab: สร้างแบบจำลอง DDM / FCFE / Relative Valuation

ส่วนที่ A: Data Sheet

1. เลือกบริษัทจดทะเบียนหนึ่งแห่ง
2. บันทึก valuation date, price, diluted shares, EPS, DPS, BVPS, debt, cash และข้อมูลที่จำเป็น
3. ระบุ source, period และ accounting convention ของทุก input

ส่วนที่ B: Valuation

1. คำนวณ P/E, P/BV และ EV/EBITDA
2. เลือก peer อย่างน้อย 4 บริษัทพร้อมเหตุผล
3. สร้าง Gordon DDM หากสมมติฐานเหมาะสม
4. สร้าง two-stage DDM หรือ FCFE model
5. สร้าง sensitivity grid ของ k_e และ g

ส่วนที่ C: Reconciliation

1. เปรียบเทียบมูลค่าจากแต่ละวิธี

2. ระบุสาเหตุของความแตกต่าง
3. สร้าง Bear/Base/Bull scenarios
4. รายงาน valuation range และ key risks

Investment Lab: Python: Valuation Functions

สร้างฟังก์ชันอย่างน้อย

- `gordon_value(d1, ke, g)`
- `finite_ddm(dividends, terminal_price, ke)`
- `two_stage_ddm(d0, gh, n, gs, ke)`
- `fcfe_value(fcfe1, ke, g)`
- `sensitivity_grid(...)`

พร้อม unit tests อย่างน้อย 5 กรณี โดยต้องมีการทดสอบกรณี $g \geq k_e$ ให้ function ปฏิเสธ input หรือแจ้งข้อผิดพลาดอย่างชัดเจน

ผลส่งมอบขั้นต่ำของ Equity Valuation Engine

แบบจำลองที่พร้อมใช้ควรมีอย่างน้อย **Input sheet** ที่ระบุ source/as-of date, **Assumption sheet** ที่แยก base/bear/bull, **Calculation sheet** ที่ไม่ hard-code สมมติฐานซ้ำ, **Output dashboard** ที่แสดง valuation range และ terminal-value share, และ **Audit checks** เช่น $k_e > g$, numerator–denominator matching, share-count consistency และ reconciliation ระหว่างวิธี

4.20 การเลือกวิธีประเมินให้เหมาะกับกิจการ

ตารางที่ 4.5: แนวทางเลือกแบบจำลองประเมินมูลค่าตราสารทุน

ลักษณะกิจการ	วิธีที่ควรพิจารณา	เหตุผล
ปันผลสม่ำเสมอและสะท้อน FCFE	DDM	cash distribution สังเกตและ forecast ได้
ปันผลต่ำแต่ cash generation แข็งแรง	FCFE	แยก payout policy ออกจาก capacity
สินทรัพย์มีมูลค่าตลาดอ้างอิงชัด	NAV / P/BV	asset value มีสาระเชิงเศรษฐกิจสูง
มี peers ที่เทียบเคียงได้ดี	Relative valuation	ใช้ market-implied pricing ของ comparable firms
book value มีคุณภาพและ ROE forecast สำคัญ	Residual income	เชื่อม book value กับ excess profitability
กิจการเติบโตสูงก่อนเข้าสู่ steady state	Multi-stage model	แยก high-growth และ terminal phase

ตารางนี้ควรถูกใช้เป็น **starting point** ไม่ใช่กฎตายตัว กิจการเดียวอาจต้องใช้หลายวิธี เช่น ธนาคารอาจใช้ P/BV และ residual income เป็นแกน ขณะที่บริษัทอุตสาหกรรมที่มี CapEx สูงอาจใช้ FCFE/DCF ร่วมกับ EV multiple เพื่อ cross-check การเลือกวิธีควรตาม economics และคุณภาพข้อมูล ไม่ใช่ตามสูตรที่ให้ target price น่าสนใจที่สุด

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาการประเมินมูลค่าตราสารทุนจากหลักการพื้นฐานว่ามูลค่าเป็นค่าประมาณภายใต้ข้อมูลและสมมติฐาน ไม่ใช่ราคาตลาดที่สังเกตได้โดยตรง

แนวทาง asset-based ใช้ BVPS และ NAV เพื่อมองฐานสินทรัพย์ ขณะที่ relative valuation ใช้ P/E, P/BV และ EV/EBITDA โดยต้องรักษาความเทียบเคียงของ peer และ matching ระหว่าง numerator กับ denominator

Intrinsic valuation ใช้มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด DDM เหมาะเมื่อเงินปันผลสะท้อนความสามารถจ่ายเงินสด FCFE แยก cash-generating capacity ออกจาก dividend policy ส่วน residual income เชื่อม book value กับผลตอบแทนส่วนเกินเหนือ cost of equity

Gordon model แสดงอย่างชัดเจนว่ามูลค่าไวต่อ $k_e - g$ และต้องมี $k_e > g$ ขณะที่ multi-stage valuation แยกช่วงเติบโตสูงออกจาก steady state เพื่อลดความไม่สมเหตุผลของการใช้ growth เดียวตลอดไป

การประเมินมูลค่าที่ดีจึงต้องทำมากกว่าการแทนสูตร ต้องมี data lineage, accounting consistency, sensitivity analysis, scenario analysis และ valuation reconciliation ก่อนนำมูลค่าไปใช้ประกอบการตัดสินใจลงทุน

คำศัพท์สำคัญ

- Market price
- Intrinsic value
- EPS
- DPS
- Dividend payout ratio
- Retention ratio
- ROE
- Sustainable growth
- BVPS
- NAV
- P/E
- P/BV
- Earnings yield
- Enterprise Value
- EV/EBITDA
- Dividend Discount Model
- Gordon Growth Model
- Terminal value
- Two-stage DDM
- FCFE
- Residual income
- Clean-surplus accounting
- Cost of equity
- Sensitivity analysis
- Scenario analysis
- Margin of safety
- Valuation reconciliation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. บริษัทมี $EPS = 6$ บาท $DPS = 2.40$ บาท และราคาหุ้น 48 บาท จงหา payout ratio, retention ratio และ dividend yield

2. ถ้า $b = 0.55$ และ $ROE = 16\%$ จงหา sustainable growth และอภิปรายข้อจำกัดของคำตอบ
3. บริษัทมีส่วนของผู้ถือหุ้นสามัญ 12,000 ล้านบาท และ diluted shares 600 ล้านหุ้น จงหา BVPS
4. ถ้าหุ้นซื้อขายที่ 1.8 เท่าของ book value จากข้อก่อน จงหาราคา implied
5. หุ้นมีราคา 75 บาท EPS trailing 5 บาท และ forward EPS 6.25 บาท จงหา trailing กับ forward P/E และอธิบายเหตุผลที่ห้ามสลับฐาน
6. บริษัทมี market capitalization 18,000 ล้านบาท หนี้ 7,000 ล้านบาท เงินสดส่วนเกิน 2,000 ล้านบาท และ EBITDA 3,000 ล้านบาท จงหา EV และ EV/EBITDA
7. หุ้นคาดว่าจะจ่ายปันผล 2, 2.20 และ 2.40 บาทในสามปี และขายปลายปีที่ 3 ที่ 42 บาท หาก $k_e = 11\%$ จงหา finite-horizon DDM value
8. พิสูจน์ Gordon Growth Model จาก geometric series
9. ให้ $D_1 = 2.50$ บาท $k_e = 9\%$ และ $g = 4\%$ จงหามูลค่าและ derivatives ต่อ k_e กับ g
10. สร้าง sensitivity table ของ Gordon value เมื่อ k_e อยู่ในช่วง 8%–12% และ g อยู่ในช่วง 2%–6%
11. บริษัทจ่ายเงินปันผลล่าสุด 1.50 บาท เติบโต 18% 4 ปี จากนั้นเติบโต 5% และมี $k_e = 10\%$ จงสร้าง two-stage DDM
12. พิสูจน์ fundamental forward P/E จาก Gordon model
13. ถ้า $ROE = 18\%$, $b = 40\%$ และ $k_e = 11\%$ จงหา g และ fundamental P/BV ภายใต้ Gordon assumptions
14. บริษัทมี $NI = 500$, depreciation 120, CapEx 200, $\Delta NWC = 50$ และ net borrowing 30 ล้านบาท จงหา FCFE
15. FCFE ปีหน้า 300 ล้านบาท เติบโต 4% และ $k_e = 10\%$ ถ้ามีหุ้น 150 ล้านหุ้น จงหามูลค่าต่อหุ้น
16. อธิบายกรณีที่ DDM และ FCFE ให้มูลค่าแตกต่างกันมาก และเสนอรายการ assumptions ที่ต้องตรวจ
17. บริษัทมี $B_0 = 80$ บาทต่อหุ้น คาด ROE ปีหน้า 15% และ $k_e = 10\%$ จงหา residual income ปีหน้า
18. อธิบาย clean-surplus condition และยกตัวอย่างรายการที่อาจทำให้ต้องปรับ book value
19. สร้าง Bear/Base/Bull valuation สำหรับกิจการหนึ่งแห่งโดยกำหนด assumptions อย่างมีเหตุผล
20. อธิบายข้อผิดพลาดอย่างน้อย 5 ประเภทที่ทำให้ valuation model ดูแม่นยำแต่ไม่สอดคล้องทางเศรษฐศาสตร์

คำถามชวนคิด

1. เหตุใดหุ้นที่มี P/E ต่ำที่สุดในอุตสาหกรรมจึงอาจไม่ใช่หุ้นที่ถูกที่สุด

2. ถ้ากิจการไม่จ่ายเงินปันผลเลย DDM ยังมีความหมายทางทฤษฎีหรือไม่
3. เหตุใด terminal value จึงมักเป็นแหล่ง model risk ที่สำคัญที่สุดของ DCF valuation
4. ถ้า ROE สูงกว่า k_e การเก็บกำไรไว้มากขึ้นสร้างมูลค่าเสมอหรือไม่
5. ควรรายงาน target price เป็นค่าหนึ่งหรือ valuation range และเพราะเหตุใด

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 4

[17] Aswath Damodaran. *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. 3rd ed. Wiley, 2012.

[21] Myron J. Gordon and Eli Shapiro. “Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit”. In: *Management Science* 3.1 (1956), pp. 102–110.

[28] C. Kesamoon and W. Witayakiattilerd. “Hierarchy Analysis Process under Fuzzy Environment: A Positive Way of Selecting Stocks into Portfolio under Ambiguity in Stock Information”. In: *Science & Technology Asia* 25.4 (2020), pp. 1–11. DOI: 10.14456/scitechasia.2019.24.

[38] James A. Ohlson. “Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation”. In: *Contemporary Accounting Research* 11.2 (1995), pp. 661–687.

[39] Stephen H. Penman. *Financial Statement Analysis and Security Valuation*. 5th ed. McGraw-Hill/Irwin, 2013.

บทที่ 5 คณิตศาสตร์ตราสารหนี้และความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. แยกองค์ประกอบของตราสารหนี้ ได้แก่ มูลค่าที่ตราไว้ มูลค่าไถ่ถอน อัตราคูปอง ความถี่การจ่ายคูปอง วันครบกำหนด และอัตราผลตอบแทนที่ใช้คิดลด
2. ประเมินราคาตราสารไม่มีคูปองและตราสารมีคูปองจากหลักมูลค่าปัจจุบัน โดยจัดฐานเวลาและความถี่การทบต้นให้สอดคล้องกัน
3. พิสูจน์และตีความความสัมพันธ์ระหว่าง coupon rate, yield และสถานะ premium–par–discount
4. หา Yield to Maturity (YTM) จากสมการราคาและอธิบายข้อจำกัดของ YTM ในฐานะมาตรวัดผลตอบแทน
5. สร้าง discount factors และ spot rates ด้วย bootstrap และคำนวณ forward rates จากเงื่อนไข no-arbitrage
6. คำนวณมูลค่าตามบัญชี การตัดจ่าย premium/discount และแยก clean price, dirty price กับ accrued interest
7. คำนวณ Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01/BPV และใช้ประมาณการการเปลี่ยนแปลงราคาจาก yield shock
8. อธิบาย key-rate duration และข้อจำกัดของ parallel-shift assumption
9. สร้าง immunized portfolio ภายใต้เงื่อนไข present-value matching และ duration matching พร้อมอธิบายบทบาทของ convexity
10. แยก interest-rate risk ออกจาก credit, liquidity, reinvestment และ embedded-option risk
11. เชื่อม zero-coupon curve และ forward-rate representation กับแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยเชิงสโตแคสติก
12. สร้างแบบจำลองตราสารหนี้ด้วย Excel หรือ Python ที่ตรวจสอบย้อนกลับได้และมี unit checks ของราคา yield duration และ convexity

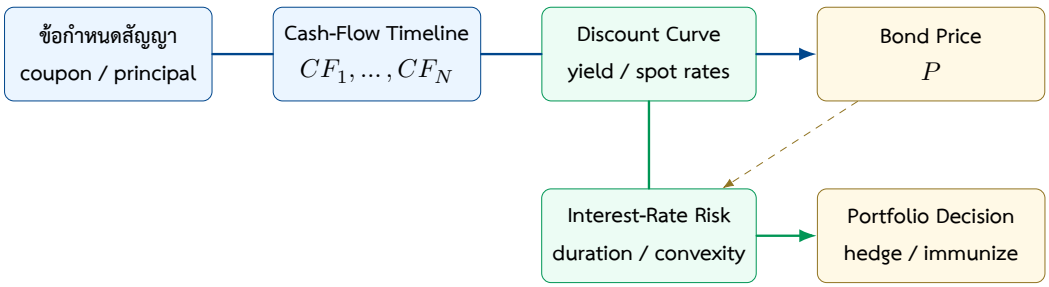
5.1 บทนำ: ตราสารหนี้คือชุดกระแสเงินสดที่มีโครงสร้างเวลา

ตราสารหนี้เป็นสิทธิเรียกร้องตามสัญญาที่กำหนดกระแสเงินสดในอนาคต ผู้ลงทุนจึงสามารถมองตราสารหนี้เป็นชุดของ cash flows ที่กระจายอยู่ตามเวลา แล้วใช้ discount factors ที่เหมาะสมแปลงกระแสเงินสดเหล่านั้นกลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบัน

แกนกลางของบทคือ

$$\boxed{\text{Bond Price} = \text{Present Value of Contractual Cash Flows}}$$

เมื่ออัตราที่ใช้คิดลดเปลี่ยน ราคาจะเปลี่ยนตาม จึงเกิดความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย ขณะเดียวกัน ตราสารหนี้ยังมีความเสี่ยงจากเครดิต สภาพคล่อง การลงทุนต่อ และเงื่อนไขแฝงในสัญญา ดังนั้น duration หรือ yield เพียงตัวเดียวไม่สามารถอธิบายความเสี่ยงทั้งหมดได้ [18]



รูปที่ 5.1: จากข้อกำหนดในสัญญาไปสู่ราคา ความไวต่ออัตราดอกเบี้ย และการบริหารพอร์ต

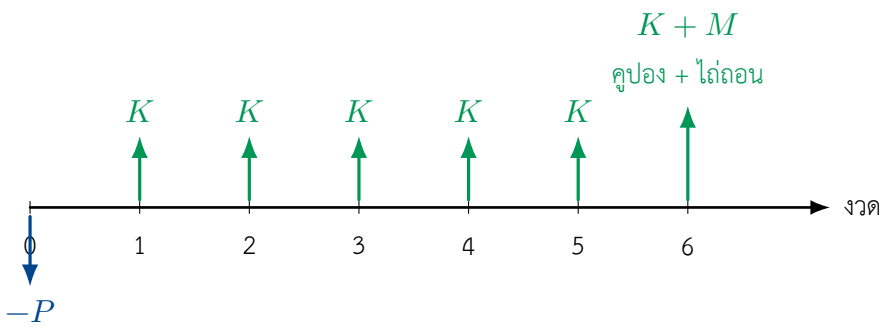
ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า “อัตราดอกเบี้ย”, “coupon rate”, “yield”, “YTM”, “spot rate” และ “forward rate” ไม่ใช่คำเดียวกัน แม้ทั้งหมดมีหน่วยเป็นอัตราต่อเวลา การคำนวณต้องระบุฐานเวลา ความถี่การทบต้น day-count convention และกระแสเงินสดที่อัตรานั้นใช้กำหนดราคาเสมอ

5.2 องค์ประกอบของตราสารหนี้และสัญลักษณ์

ตารางที่ 5.1: สัญลักษณ์หลักที่ใช้ในบท

สัญลักษณ์	ความหมาย	หมายเหตุ
F	มูลค่าที่ตราไว้ (face/par value)	ฐานคำนวณคูปองในกรณีทั่วไป
M	มูลค่าไถ่ถอน (redemption value)	อาจเท่าหรือไม่เท่ากับ F
c	nominal coupon rate ต่อปี	ต้องระบุ frequency
m	จำนวนครั้งที่จ่ายคูปองต่อปี	เช่น $m = 2$ สำหรับครึ่งปี
K	คูปองต่อหนึ่งงวด	โดยทั่วไป $K = cF/m$
T	อายุคงเหลือในหน่วยปี	อาจเป็นเศษปีได้
N	จำนวนงวดคูปองที่เหลือ	ถ้าเป็นจำนวนเต็ม มักมี $N = mT$
$y^{(m)}$	nominal YTM ต่อปี ทบต้น m ครั้ง	periodic yield $i = y^{(m)}/m$
i	yield ต่อหนึ่งงวดคูปอง	ใช้กับ cash flows ที่ห่างกันหนึ่งงวด
v	discount factor หนึ่งงวด	$v = (1+i)^{-1}$
P	ราคาตราสาร ณ วันประเมิน	ต้องระบุ clean หรือ dirty ระหว่างวันคูปอง



รูปที่ 5.2: แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารคูปองมาตรฐาน

5.3 ราคาตราสารหนี้จากมูลค่าปัจจุบัน

5.3.1 หลักมูลค่าปัจจุบันทั่วไป

ให้ตราสารจ่ายกระแสเงินสด CF_k ณ เวลา t_k และให้ $d(0, t_k)$ เป็น discount factor จาก t_k กลับสู่เวลา 0

หลักการประเมินราคาตราสารหนี้

$$P = \sum_{k=1}^{q} CF_k \, d(0, t_k)$$

สมการนี้เป็นหลักทั่วไปที่สุดของบท สูตร YTM, spot-rate pricing และการ bootstrap ล้วนเป็นกรณีหรือการประยุกต์ของสมการเดียวกัน

5.3.2 ตราสารไม่มีคูปอง

บทนิยาม 5.1

ตราสารไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) จ่ายเพียงมูลค่าไถ่ถอน M ณ เวลา T ถ้าอัตราผลตอบแทนที่เป็นผลต่อปีเท่ากับ y

$$P = \frac{M}{(1+y)^T}$$

ตัวอย่าง 5.1. ตราสารไม่มีคูปองมีมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อายุ 5 ปี และ yield 10% ต่อปี

$$P = 100{,}000(1.10)^{-5} \approx 62{,}092.13 \text{ บาท}$$

5.3.3 ตราสารมีคูปอง

ถ้า yield ต่อหนึ่งงวดคูปองเท่ากับ i และเหลือ N งวด

Coupon Bond Pricing

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{K}{(1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^N}$$

หรือ

$$P = K \, a_{\overline{N}|i} + M v^N$$

โดย

$$a_{\overline{N}|i} = \frac{1 - v^N}{i} \qquad v = (1+i)^{-1}$$

ถ้า $M = F$ และจ่ายคูปองปีละครั้ง $K = cF$

$$P = cF\, a_{\overline{N}|i} + Fv^N$$

ตัวอย่าง 5.2. ตราสารมูลค่าที่ตราไว้และมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราคูปอง 10% อายุคงเหลือ 10 ปี YTM 8% และจ่ายคูปองปีละครั้ง

$$P = 10{,}000\, a_{\overline{10}|0.08} + 100{,}000(1.08)^{-10}$$

จึงได้

$$P \approx 113{,}420.16 \text{ บาท}$$

5.3.4 ความถี่การจ่ายคูปองและฐาน yield

หากจ่ายคูปองปีละ m ครั้ง

$$K = \frac{cF}{m}$$

และถ้า YTM เสนอเป็น nominal rate $y^{(m)}$

$$i = \frac{y^{(m)}}{m}$$

ดังนั้น

Bond Pricing with m Coupon Payments per Year

$$P = \sum_{k=1}^{mT} \frac{cF/m}{\left(1 + y^{(m)}/m\right)^k} + \frac{M}{\left(1 + y^{(m)}/m\right)^{mT}}$$

หากทราบ effective annual yield y_{eff} แทน periodic yield ที่สอดคล้องคือ

$$i = (1 + y_{\text{eff}})^{1/m} - 1$$

ไม่ใช่ y_{eff}/m โดยทั่วไป

5.4 Premium, Par และ Discount

กำหนด modified coupon rate ต่อหนึ่งงวดเมื่อเทียบกับมูลค่าไถ่ถอนเป็น

$$g = \frac{K}{M}$$

จาก

$$P = Ka_{\overline{N}|i} + Mv^N$$

และ

$$1 - v^N = ia_{\overline{N}|i}$$

จะได้

Base-Amount Formula

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

หรือ

$$P = M + M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

อีกแบบหนึ่งคือ

Makeham Form

$$P = \frac{K}{i} + \left(M - \frac{K}{i}\right) v^N$$

ทฤษฎีบท 5.1

สมมติ $M > 0, i > 0$ และคูปองคงที่ แล้ว

$$g > i \iff P > M$$

$$g = i \iff P = M$$

และ

$$g < i \iff P < M$$

พิสูจน์. จาก

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

และเพราะ

$$M > 0 \qquad \text{และ} \qquad a_{\overline{N}|i} > 0$$

เครื่องหมายของ $P - M$ จึงตรงกับเครื่องหมายของ $g - i$ □

ในกรณี $F = M$ และ coupon frequency กับ yield convention สอดคล้องกัน สามารถเปรียบเทียบ coupon rate กับ YTM ได้โดยตรง

ข้อสังเกต

ตราสารที่ซื้อขายสูงกว่าพาร์ไม่ได้แปลว่า “แพงเกินไป” และตราสารที่ต่ำกว่าพาร์ไม่ได้แปลว่า “ถูก” สถานะ premium หรือ discount เป็นกลไกที่ทำให้ present value ของกระแสเงินสดสอดคล้องกับ

yield ที่ตลาดกำหนด

5.5 Yield to Maturity

บทนิยาม 5.2

Yield to Maturity คือ periodic rate i ที่ทำให้ present value ของ contractual cash flows เท่ากับราคาตราสาร

$$f(i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{K}{(1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^N} - P = 0$$

YTM จึงเป็น IRR ของชุดกระแสเงินสดภายใต้ convention ที่กำหนด [62]

ทฤษฎีบท 5.2

ถ้า $CF_k > 0$ ทุกงวดและ $i > -1$

$$P(i) = \sum_{k=1}^{N} CF_k (1+i)^{-k}$$

เป็นฟังก์ชันลดลงอย่างเคร่งครัด เพราะ

$$P'(i) = -\sum_{k=1}^{N} kCF_k (1+i)^{-k-1} < 0$$

ดังนั้น หากราคาที่กำหนดอยู่ในช่วงของฟังก์ชันราคา ราก YTM มีเอกลักษณ์

Bisection สำหรับ YTM

1. เลือก i_L และ i_U ให้ $f(i_L)f(i_U) < 0$
2. กำหนด
$$i_M = \frac{i_L + i_U}{2}$$
3. เลือกครึ่งช่วงที่ยังคร่อมราก

4. ทำซ้ำจน residual หรือความกว้างช่วงต่ำกว่า tolerance ที่กำหนด

Bisection มี convergence ที่ทนทานและเหมาะเป็น reference implementation สำหรับตรวจผลจาก spreadsheet หรือ library อื่น

ประเด็นที่ต้องระวัง

YTM ไม่ใช่ realized return ที่รับประกัน หากขายก่อนครบกำหนด หาก reinvest coupons ด้วยอัตราที่ต่างจาก YTM หรือหาก cash flows เปลี่ยนเพราะ default หรือ embedded option ผลตอบแทนจริงอาจต่างจาก YTM อย่างมีนัยสำคัญ

5.6 ราคาและ Yield: Monotonicity และ Convexity

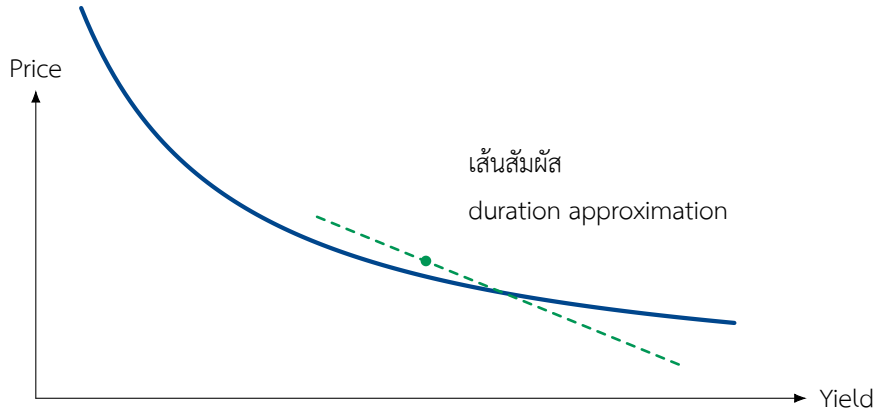
สำหรับกระแสเงินสดบวก

$$P'(i) < 0$$

และ

$$P''(i) = \sum_{k=1}^{N} k(k+1)CF_k(1+i)^{-k-2} > 0$$

ดังนั้น price–yield relationship ของ plain-vanilla bond ที่ cash flows คงที่มีลักษณะลดลงและนูน



รูปที่ 5.3: เส้นราคา–yield มีลักษณะลดลงและนูน ขณะที่ duration เป็นความชันเฉพาะที่

5.7 Spot Rate, Discount Factor และ Bootstrap

YTM ใช้อัตราเดียวสำหรับกระแสเงินสดหลายเวลา แต่การกำหนดราคาแบบ no-arbitrage ใช้ discount factor เฉพาะแต่ละ maturity

บทนิยาม 5.3

ให้ s_t เป็น spot rate แบบ effective annual สำหรับอายุ t ปี

$$d_t = d(0,t) = \frac{1}{(1+s_t)^t}$$

และ

$$P = \sum_t CF_t d_t$$

5.7.1 Bootstrap

สมมติ zero-coupon อายุ 1 ปีมี spot rate 3%

$$d_1 = \frac{1}{1.03} = 0.9708738$$

จากนั้นมีตราสาร 2 ปี มูลค่าไถ่ถอน 1,000 บาท คูปอง 40 บาทต่อปี และราคา 1,000 บาท

$$1000 = 40d_1 + 1040d_2$$

จึงได้

$$d_2 = \frac{1000 - 40d_1}{1040} \approx 0.9241972$$

ดังนั้น

$$s_2 = d_2^{-1/2} - 1 \approx 4.0202\%$$

หลัก bootstrap ทำซ้ำโดยใช้ discount factors ที่หาได้แล้วหัก present value ของ cash flows ต้นทางออกก่อนแก้ discount factor ของ maturity ถัดไป

ประเด็นที่ต้องระวัง

การ bootstrap ในตลาดจริงต้องคำนึงถึง instrument conventions, settlement, day count, coupon dates, interpolation และ market quotes ที่แตกต่างกัน การใช้ตัวอย่าง annual cash flow แบบเรียบง่ายมีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงตรรกะทางคณิตศาสตร์

5.8 Forward Rate และ Term Structure

ให้ $f_{m,n}$ เป็น effective annual forward rate สำหรับช่วง m ถึง n

บทนิยาม 5.4

ภายใต้ no-arbitrage

$$(1 + s_n)^n = (1 + s_m)^m (1 + f_{m,n})^{n-m}$$

จึงได้

$$1 + f_{m,n} = \left[\frac{(1+s_n)^n}{(1+s_m)^m}\right]^{1/(n-m)}$$

จาก $s_1 = 3\%$ และ $s_2 \approx 4.0202\%$

$$f_{1,2} = \frac{(1+s_2)^2}{1+s_1} - 1 \approx 5.0505\%$$

เมื่อใช้ continuous compounding และ instantaneous forward rate

Continuous Forward-Rate Representation

$$P(0,T) = \exp\left(-\int_0^T f(0,u)\ \mathrm{d}u\right)$$

ข้อสังเกต

yield curve อาจมีลักษณะ upward, flat, inverted หรือ humped แต่รูปทรงเพียงอย่างเดียวไม่ใช่คำพยากรณ์เศรษฐกิจที่แน่นอน เพราะสะท้อน expected future rates, term premium, liquidity, supply–demand และปัจจัยเชิงสถาบันร่วมกัน

5.9 มูลค่าตามบัญชีและการตัดจ่าย Premium/Discount

สมมติซื้อ bond ที่ราคา $B_0 = P$ และใช้ effective yield ต่อหนึ่งงวด i ภายใต้วิธี effective interest

ดอกเบี้ยทางคณิตศาสตร์ของงวด k คือ

$$I_k = iB_{k-1}$$

ถ้าคูปองที่ได้รับเท่ากับ K

$$B_k = B_{k-1} + I_k - K$$

ดังนั้น

Book-Value Recursion

$$B_k = B_{k-1}(1+i) - K$$

ถ้า bond เป็น premium bond จะมี $K > I_k$ ในช่วงแรกโดยทั่วไปและ book value ลดเข้าหา redemption value ส่วน discount bond จะมี $I_k > K$ โดยทั่วไปและ book valueเพิ่มเข้าหา redemption value

ทฤษฎีบท 5.3

หาก yield i และ contractual cash flows คงที่ Book value หลังจ่ายคูปองงวดที่ k เท่ากับ present value ณ เวลานั้นของ remaining cash flows

$$B_k = K a_{\overline{N-k}|i} + M v^{N-k}$$

พิสูจน์. เริ่มจาก

$$B_{k-1} = K a_{\overline{N-k+1}|i} + M v^{N-k+1}$$

ใช้ identity

$$(1+i) a_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

จะได้

$$B_{k-1}(1+i) - K = K a_{\overline{N-k}|i} + M v^{N-k} = B_k$$

□

5.10 ราคาตราสารระหว่างวันจ่ายคูปอง

เมื่อ settlement date อยู่ระหว่าง coupon dates ต้องแยก dirty price กับ clean price

บทนิยาม 5.5

Dirty price หรือ full price คือ present value ของ cash flows ที่ผู้ซื้อมีสิทธิได้รับจาก settlement date เป็นต้นไป

Accrued interest คือส่วนคูปองที่สะสมจากวันจ่ายคูปองล่าสุดถึง settlement date ตาม day-count convention

Clean price คือ

$$P_{\text{clean}} = P_{\text{dirty}} - AI$$

ภายใต้ simple fraction approximation ถ้า α เป็นสัดส่วนของ coupon period ที่ผ่านไปแล้ว

$$AI \approx \alpha K$$

หากเวลาเหลือถึง coupon ถัดไปเท่ากับ $1-\alpha$ งวด และ periodic yield เท่ากับ i

$$P_{\text{dirty}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{CF_j}{(1+i)^{j-\alpha}}$$

ในงานจริงต้องใช้ settlement rule และ day-count convention ของตลาดนั้น ไม่ควรแทน α ด้วยจำนวนวันหารจำนวนวันในงวดแบบใดก็ได้โดยไม่ตรวจมาตรฐาน

ตัวอย่าง 5.3. สมมติ coupon ต่อครึ่งปีเท่ากับ 3 บาท และผ่านไป 40% ของ coupon period

$$AI = 0.40(3) = 1.20 \text{ บาท}$$

ถ้า dirty price เท่ากับ 102.75 บาท

$$P_{\text{clean}} = 102.75 - 1.20 = 101.55 \text{ บาท}$$

5.11 Macaulay Duration

Macaulay duration วัดค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของเวลาที่ได้รับ present value ของ cash flows

ให้ t_k เป็นเวลาในหน่วยปี PV_k เป็น present value ของ cash flow ที่เวลา t_k และ

$$P = \sum_k PV_k$$

บทนิยาม 5.6

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_k t_k PV_k}{P}$$

กำหนด

$$w_k = \frac{PV_k}{P}$$

จะได้

$$w_k \geq 0 \qquad \text{และ} \qquad \sum_k w_k = 1$$

ดังนั้น

$$D_{\text{Mac}} = \sum_k w_k t_k$$

จึงเป็น weighted-average time ของ cash flows ในหน่วยปี

สำหรับ zero-coupon bond ที่ครบกำหนด T

$$D_{\text{Mac}} = T$$

สำหรับ coupon bond ที่ cash flow ส่วนหนึ่งได้รับก่อน maturity จะมี

$$D_{\text{Mac}} < T$$

เมื่อคูปองเป็นบวก

5.12 Modified Duration และ Price Sensitivity

ในกรณี yield $y^{(m)}$ เสนอเป็น nominal annual yield ทบต้น m ครั้ง

บทนิยาม 5.7

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1 + y^{(m)}/m}$$

และสำหรับ yield shift เล็ก

First-Order Price Approximation

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y^{(m)}$$

สูตรนี้ใช้ $\Delta y^{(m)}$ ในหน่วย decimal เช่น 25 bp เท่ากับ

$$0.0025$$

ตัวอย่าง 5.4. ถ้า

$$D_{\text{mod}} = 6.8$$

และ yield เพิ่ม 50 bp

$$\Delta y = 0.005$$

จะได้

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -6.8(0.005) = -0.034 = -3.4\%$$

ถ้าราคาเริ่มต้น 105 บาท ราคาประมาณใหม่คือ

$$105(1 - 0.034) = 101.43 \text{ บาท}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Modified duration เป็น local linear approximation จึงเหมาะกับ yield change ขนาดเล็กและสมมติว่า cash flows ไม่เปลี่ยนตาม yield หาก bond มี call, put หรือ prepayment behavior ความสัมพันธ์นี้อาจคลาดเคลื่อนมาก

5.13 Convexity

Duration ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ส่วน convexity ใช้อนุพันธ์อันดับสองเพื่อสะท้อนความโค้งของ price–yield relation

กำหนด convexity ต่อ nominal yield $y^{(m)}$ เป็น

$$\mathcal{C} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial (y^{(m)})^2}$$

สำหรับ cash flows ที่เกิดที่งวดคูปอง $k = 1, \dots, N$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{m^2 P}\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)CF_k}{\left(1 + y^{(m)}/m\right)^{k+2}}$$

เมื่อใช้ Taylor approximation อันดับสอง

Duration–Convexity Approximation

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}}\Delta y + \frac{1}{2}\mathcal{C}(\Delta y)^2$$

สำหรับ plain-vanilla option-free bond ที่ cash flows คงที่ convexity เป็นบวก จึงทำให้ราคาลดน้อยกว่าที่เส้น duration tangent คาดเมื่อ yield เพิ่ม และราคาเพิ่มมากกว่าที่ linear approximation คาดเมื่อ yield ลดในระดับขนาดใกล้กัน

5.14 DV01 หรือ BPV

DV01 วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาโดยประมาณเมื่อ yield เปลี่ยนหนึ่ง basis point

$$1 \text{ bp} = 0.0001$$

จาก duration approximation

บทนิยาม 5.8

$$DV01 \approx PD_{\text{mod}}(0.0001)$$

โดยทั่วไป DV01 รายงานเป็นจำนวนเงินบวกแทนขนาดการเปลี่ยนแปลง หาก yield เพิ่ม 1 bp ราคาจะลดประมาณ DV01 และหาก yield ลด 1 bp ราคาจะเพิ่มประมาณ DV01 ภายใต้ first-order approximation

ตัวอย่าง 5.5. ถ้าราคาเท่ากับ 10 ล้านบาทและ modified duration เท่ากับ 4.5

$$DV01 \approx 10{,}000{,}000(4.5)(0.0001) = 4{,}500 \text{ บาท}$$

5.15 Key-Rate Duration และการเปลี่ยนรูปของ Yield Curve

single duration สมมติโดยนัยว่าการเปลี่ยน yield ที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปด้วย parallel shift หนึ่งค่า แต่ yield curve จริงอาจ steepen, flatten, twist หรือเปลี่ยนเฉพาะบาง tenor

ให้ z_j เป็น yield/spot rate ที่ key maturity j และ Δz_j เป็น bump ขนาดเล็ก

บทนิยาม 5.9

Key-rate duration ที่ tenor j สามารถประมาณด้วย central difference

$$KRD_j \approx -\frac{P(z_j + \Delta z_j) - P(z_j - \Delta z_j)}{2P_0 \Delta z_j}$$

เมื่อ bump rate อื่นตาม interpolation rule ที่กำหนดคงเดิม

จากนั้นการเปลี่ยนแปลงราคาอันดับหนึ่งจาก nonparallel curve shock ประมาณได้ด้วย

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\sum_j KRD_j \, \Delta z_j$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Key-rate duration ขึ้นกับวิธี bump และ interpolation ของ yield curve จึงไม่ใช่ตัวเลขที่เป็นอิสระจาก curve construction methodology

5.16 Immunization

หลัก immunization ใช้โครงสร้างของ present value และ duration เพื่อลดความไวของ surplus ระหว่างสินทรัพย์และภาระผูกพันต่อการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย [62, 18]

ให้ A เป็น present value ของสินทรัพย์และ L เป็น present value ของหนี้สิน

เงื่อนไข first-order แบบพื้นฐานคือ

$$A = L$$

และ

$$D_A = D_L$$

ทฤษฎีบท 5.4

ภายใต้ small parallel yield shift Δy หาก

$$A = L$$

และ

$$D_A = D_L$$

แล้ว first-order change ของ surplus

$$S = A - L$$

มีค่าเป็นศูนย์โดยประมาณ

พิสูจน์. ใช้ duration approximation

$$\Delta A \approx -AD_A \Delta y$$

และ

$$\Delta L \approx -LD_L \Delta y$$

ดังนั้น

$$\Delta S = \Delta A - \Delta L$$

จึงได้

$$\Delta S \approx -(AD_A - LD_L)\Delta y$$

เมื่อ $A = L$ และ $D_A = D_L$

$$AD_A = LD_L$$

จึงมี

$$\Delta S \approx 0$$

□

5.16.1 สองสินทรัพย์สำหรับภาระผูกพันหนึ่งก้อน

ให้สินทรัพย์ 1 และ 2 มี durations D_1 และ D_2 โดยต้องการ duration เป้าหมาย D_L

กำหนดน้ำหนัก

$$w_1 + w_2 = 1$$

และ

$$w_1 D_1 + w_2 D_2 = D_L$$

จะได้

$$w_1 = \frac{D_2 - D_L}{D_2 - D_1}$$

และ

$$w_2 = \frac{D_L - D_1}{D_2 - D_1}$$

ถ้าต้องการ long-only solution จะต้องมี D_L อยู่ระหว่าง D_1 และ D_2

5.16.2 Convexity Condition

เมื่อสินทรัพย์และหนี้สินมี value และ duration match กัน เงื่อนไขเสริมที่มักต้องการคือ

$$\mathcal{C}_A \geq \mathcal{C}_L$$

เพื่อให้ asset value มี second-order response ที่ไม่ด้อยกว่าหนี้สินภายใต้ small parallel shifts

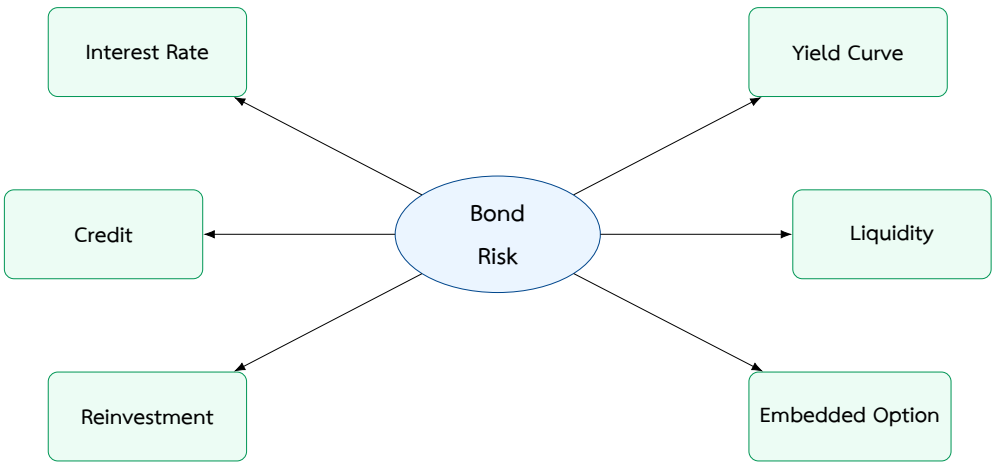
ประเด็นที่ต้องระวัง

Immunization ไม่ใช่การกำจัดความเสี่ยงอย่างถาวร Duration เปลี่ยนตามเวลา yield curve และ cash flows จึงต้อง rebalance และยังต้องบริหาร curve risk, credit spread risk, liquidity risk และ optionality แยกต่างหาก

5.17 ความเสี่ยงของตราสารหนี้ที่ Duration ไม่ครอบคลุม

ตารางที่ 5.2: มิติความเสี่ยงสำคัญของตราสารหนี้

ความเสี่ยง	กลไก	มาตรวัด/แนวทางที่เกี่ยวข้อง
Interest-rate risk	risk-free/benchmark curve เปลี่ยน	duration, convexity, KRD, DV01
Curve risk	tenor ต่างกันเคลื่อนไม่เท่ากัน	KRD, scenario shocks
Credit-spread risk	spread ของผู้ออกเพิ่ม/ลด	spread duration, CS01, credit analysis
Default risk	ผู้ออกไม่จ่ายตามสัญญา	PD, LGD, recovery, rating transition
Liquidity risk	ซื้อขายยากหรือ spread กว้าง	bid–ask, market depth, liquidity premium
Reinvestment risk	coupon ถูกลงทุนต่อที่อัตราใหม่	horizon return / immunization
Embedded-option risk	call/put/prepayment เปลี่ยน cash flows	effective duration, OAS, scenario models
Inflation risk	purchasing power ลด	real yield, inflation-linked instruments



รูปที่ 5.4: ตราสารหนี้มีความเสี่ยงหลายมิติซึ่งต้องใช้มาตรวัดมากกว่าหนึ่งประเภท

5.18 สะพานสู่งานวิจัย: Zero-Coupon Curve และ Stochastic Rates

งานของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาการกำหนดราคาตราสารหนี้และการแปลงมูลค่าตราสารเป็นเงินสดตามเวลา โดยเปรียบเทียบแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย Vasicek, CIR และ Hull–White ในข้อมูลตลาดตราสารหนี้ไทย [70]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: จาก Discount Curve สู่ Stochastic Interest Rates

คณิตศาสตร์ในบทนี้เชื่อมกับงานดังกล่าวผ่านความสัมพันธ์

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\ \mathrm{d}s\right)$$

เมื่อ forward curve $f(t,s)$ กลายเป็นตัวแปรสุ่ม ราคา zero-coupon bond จึงเป็นฟังก์ชันของเส้นอัตราดอกเบี้ยที่เปลี่ยนตามเวลา

แบบจำลอง Vasicek, CIR และ Hull–White เพิ่มโครงสร้างพลวัตให้ short rate หรือ term structure แต่หลัก present-value/no-arbitrage ที่ใช้ในบทนี้ยังคงเป็นรากฐานของการกำหนดราคา

ผลการศึกษาเชิงประจักษ์ของแบบจำลองหนึ่งใน sample period ไม่ควรถูกตีความว่าแบบจำลองนั้นดีที่สุดในทุกตลาดหรือทุกช่วงเวลา การเลือก interest-rate model ต้องพิจารณาวัตถุประสงค์ calibration target, instrument set และ out-of-sample validation

5.19 Data Lineage และ Pricing Convention

การคำนวณตราสารหนี้ไวต่อ convention มากกว่าการดูสูตรเพียงอย่างเดียว

ตารางที่ 5.3: Checklist สำหรับข้อมูลและ convention ของตราสารหนี้

รายการ	ต้องระบุ	ความผิดพลาดที่พบบ่อย
Settlement	trade date, settlement date	ใช้ maturity fraction ผิด
Coupon	rate, frequency, coupon dates	ใช้ annual rate เป็น periodic coupon
Yield	nominal/effective/continuous	หาร effective yield ด้วย frequency โดยตรง
Day count	ACT/365, ACT/360, 30/360 หรือ convention อื่น	accrued interest ผิด
Price	clean/dirty	เทียบ market clean price กับ model dirty price
Redemption	par หรือ redemption premium	สมมติ $M = F$ โดยไม่ตรวจ
Curve	source, interpolation, compounding	bootstrap/integration basis ไม่ตรงกัน
Credit	risk-free, government, corporate spread	ใช้ government curve กับ risky cash flow โดยไม่ปรับ
Option	callable/puttable/prepayable	ใช้ fixed cash-flow duration กับ option bond

5.20 Investment Lab: Fixed-Income Analytics

Investment Lab: Excel: Bond Pricing, Yield และ Interest-Rate Risk

สร้าง workbook อย่างน้อย 5 ชีต

1. **Inputs** ระบุ settlement, maturity, face, redemption, coupon rate, frequency, YTM และ day-count assumption
2. **CashFlows** แสดงวันที่/งวด coupon principal total cash flow discount factor และ present value
3. **Price–Yield** สร้าง yield grid รอบ base yield อย่างน้อย ± 200 bp และคำนวณ exact price

4. **Risk** คำนวณ Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01 และ approximation error
5. **Curve** bootstrap discount factors/spot rates จากตราสารตัวอย่าง แล้วคำนวณ forward rates

สร้างกราฟ price–yield curve และเปรียบเทียบ exact repricing กับ duration และ duration–convexity approximation สำหรับ shocks ± 25, ± 50, ± 100 และ ± 200 bp

Investment Lab: Python: Fixed-Income Companion

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `bond_price(...)`
- `ytm_bisection(...)`
- `macaulay_duration(...)`
- `modified_duration(...)`
- `convexity(...)`
- `dv01(...)`
- `clean_dirty_price(...)`
- `bootstrap_discount_factors(...)`
- `forward_rate(...)`
- `two_asset_immunization(...)`

ควรมี unit tests อย่างน้อยสำหรับกรณี par bond, zero-coupon bond, premium bond, discount bond, duration ของ zero-coupon และ round-trip test ที่นำราคาจากฟังก์ชัน pricing กลับไปหา YTM แล้วได้ yield เดิมภายใน tolerance

5.21 การเลือกมาตรวัดให้เหมาะกับปัญหา

ตารางที่ 5.4: แผนที่การเลือกเครื่องมือวิเคราะห์ตราสารหนี้

คำถาม	เครื่องมือหลัก	ข้อควรระวัง
ราคา จาก contractual cash flows เท่าใด	PV / discount factors	convention ต้องตรง cash flows
อัตราเดียวที่ทำให้ราคาเท่ากันคือเท่าใด	YTM	ไม่ใช่ realized return ที่รับประกัน
อัตราเฉพาะ maturity เป็นเท่าใด	Spot rate	ต้องสร้าง curve อย่างสอดคล้อง
อัตรา implied ระหว่างสอง maturity คือเท่าใด	Forward rate	ขึ้นกับ compounding convention
ราคาไวต่อ parallel yield shift เพียงใด	Modified duration / DV01	เป็น first-order/local measure
ความโค้งของราคาเป็นอย่างไร	Convexity	cash flows ต้อง ไม่ เปลี่ยน จาก option exercise
curve เปลี่ยนเฉพาะ tenor ใดมีผลอย่างไร	Key-rate duration	ขึ้น กับ bump/ interpolation method
จับคู่สินทรัพย์กับหนี้สินอย่างไร	PV + duration matching	ต้อง rebalance และดู convexity/ curve risk
credit spread เปลี่ยนมีผลอย่างไร	Spread duration / CS01	แยกจาก risk-free rate movement

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์ตราสารหนี้จากหลักมูลค่าปัจจุบัน โดยมองตราสารเป็นชุด contractual cash flows ที่ต้องคิดลดด้วยอัตราหรือ discount factors ที่สอดคล้องกับเวลา

ในกรอบ YTM ราคาของ plain-vanilla bond เป็นฟังก์ชันลดลงและนูนของ yield ความสัมพันธ์ premium–par–discount เกิดจากการเปรียบเทียบ coupon rate กับ required yield บนฐานเวลาเดียวกัน ขณะที่ YTM เป็น IRR ของ contractual cash flows และไม่ควรถูกตีความเป็นผลตอบแทนจริงที่รับประกัน

การกำหนดราคาที่ละเอียดขึ้นใช้ spot rates และ discount factors ตาม maturity แล้วสร้าง term structure ด้วย bootstrap จากนั้น forward rates เกิดจาก no-arbitrage identities

มูลค่าตามบัญชีอธิบายการตัดจ่าย premium หรือสะสม discount ตาม effective yield ส่วนการซื้อขายระหว่าง coupon dates ต้องแยก dirty price, accrued interest และ clean price ตาม market convention

ความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ยวัดด้วย Macaulay duration, modified duration, convexity, DV01 และ key-rate duration โดย duration เป็น first-order sensitivity และ convexity เป็น second-order correction Immunization ใช้ present-value matching กับ duration matching แต่ต้อง rebalance และยังคงเผชิญ curve, credit, liquidity และ option risk

สุดท้าย การวิเคราะห์ตราสารหนี้ที่ตรวจสอบได้ต้องบันทึก settlement, day count, compounding, coupon schedule, clean/dirty convention, curve construction และ model assumptions ก่อนนำตัวเลขไปใช้ในการบริหารพอร์ต

คำศัพท์สำคัญ

- Face value
- Redemption value
- Coupon rate
- Yield to Maturity
- Discount factor
- Spot rate
- Forward rate
- Yield curve
- Premium bond
- Par bond
- Discount bond
- Book value
- Accrued interest
- Dirty price
- Clean price
- Macaulay duration
- Modified duration
- Convexity
- DV01 / BPV
- Key-rate duration
- Spread duration
- CS01
- Immunization
- Reinvestment risk
- Embedded-option risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ตราสารไม่มีคูปองมีมูลค่าไถ่ถอน 100,000 บาท อายุ 4 ปี และ effective annual yield 6% จงหาราคา
2. พันธบัตรมูลค่าที่ตราไว้ 100,000 บาท คูปอง 8% จ่ายปีละครั้ง อายุ 6 ปี และ YTM 7% จงหาราคา
3. พิสูจน์ base-amount formula

$$P - M = M(g - i)a_{\overline{N}|i}$$

4. พิสูจน์ Makeham form จากสูตร coupon-bond pricing
5. อธิบายว่าทำไม coupon rate 8% กับ YTM 8% อาจไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าราคาเท่าพาร์ หาก compounding conventions ไม่ตรงกัน
6. แสดงว่า price function ของ bond ที่มี cash flows เป็นบวกเป็นฟังก์ชันลดลงของ yield
7. สร้าง bisection algorithm เพื่อหา YTM และทดสอบ round trip จากราคาที่สร้างด้วย yield 5.5%
8. ใช้ zero-coupon 1 ปีและ coupon bond 2 ปีที่กำหนดเพื่อ bootstrap d_1, d_2 และ spot rates
9. พิสูจน์ forward-rate identity จาก no-arbitrage
10. สร้าง amortization schedule ของ premium bond และตรวจว่า book value เข้าใกล้ redemption value
11. ตราสารจ่ายคูปอง 4 บาทต่อครึ่งปี settlement ผ่านไป 35% ของ coupon period และ dirty price 103.20 บาท จงหา accrued interest แบบ simple fraction และ clean price
12. คำนวณ Macaulay duration ของ zero-coupon 7 ปี
13. ตราสารมี modified duration 5.2 และราคา 98.50 บาท หาก yield เพิ่ม 75 bp จงประมาณราคาใหม่ด้วย duration
14. เพิ่ม convexity 42 ให้ข้อก่อนและคำนวณ duration–convexity approximation
15. พอร์ตตราสารหนี้มีมูลค่า 25 ล้านบาทและ modified duration 6.4 จงประมาณ DV01
16. อธิบายว่าทำไม parallel duration อาจล้มเหลวเมื่อ yield curve steepen
17. สร้าง key-rate shocks ที่ 2Y, 5Y และ 10Y แล้วอธิบายวิธีประมาณผลกระทบต่อพอร์ต
18. ภาระผูกพันมี duration 6 ปี เลือกจาก bond duration 3 ปีและ 9 ปี จงหาน้ำหนัก long-only ที่ match duration
19. พิสูจน์ว่า PV matching กับ duration matching ทำให้ first-order change ของ surplus เป็นศูนย์ภายใต้ small parallel shift
20. อธิบายว่าทำไม callable bond ต้องใช้ effective duration มากกว่า modified duration แบบ fixed

cash flows

คำถามชวนคิด

1. เหตุใด bond ที่ซื้อขายต่ำกว่าพาร์จึงไม่จำเป็นต้องให้ผลตอบแทนที่น่าสนใจกว่า bond ที่ซื้อขายสูงกว่าพาร์
2. YTM มีข้อจำกัดอะไรบ้างเมื่อนำไปเปรียบเทียบตราสารที่มี embedded options
3. หาก yield curve ไม่ขยับแบบขนาน duration matching เพียงอย่างเดียวเพียงพอหรือไม่
4. Positive convexity มีคุณค่าต่อผู้ถือ bond อย่างไร และเหตุใด bond ที่มี call option อาจมี negative convexity ในบางช่วง
5. ในการบริหารพอร์ตตราสารหนี้ขนาดใหญ่ ควรให้ความสำคัญกับ curve construction หรือ security selection มากกว่ากัน หรือทั้งสองส่วนเชื่อมโยงกันอย่างไร

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 5

[18] Frank J. Fabozzi. *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8th ed. Pearson, 2012.

[62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.

[70] Wichai Witayakiattilerd, Kammanai Phothong, Kanticha Sudtinont, and Panisara Bundasak. “Instant Exchange Analytics: A Compelling Mathematical Model for Real-Time Debt Instrument and Cash Conversion Rates”. In: *Thailand Statistician* 22.2 (2024), pp. 390–406.

Part III

ทฤษฎีพอร์ตและการกำหนดราคาสินทรัพย์

บทที่ 6 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. นิยามพอร์ตการลงทุนและน้ำหนักพอร์ตอย่างถูกต้อง รวมทั้งแยก long-only, short position และ fully-invested portfolio ได้
2. พิสูจน์ผลตอบแทนพอร์ตจาก simple returns และอธิบายเหตุผลที่ log returns ไม่สามารถนำมาถ่วงน้ำหนักในลักษณะเดียวกันได้โดยทั่วไป
3. คำนวณ ผล ตอบแทน คาด หมาย ความ แปรปรวน และ ส่วน เบี่ยง เบน มาตรฐาน ของ พอร์ต สอง สินทรัพย์ สามสินทรัพย์ และพอร์ต n สินทรัพย์
4. ใช้ covariance และ correlation อธิบายกลไกของ diversification และวิเคราะห์กรณี $\rho = 1, 0, -1$ ได้
5. เขียนสมการพอร์ตในรูปเวกเตอร์–เมทริกซ์

$$R_p = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{R}, \qquad \mu_p = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mu, \qquad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}$$

6. พิสูจน์ว่า covariance matrix เป็น symmetric positive semidefinite และอธิบายความสำคัญต่อการวิเคราะห์พอร์ตได้
7. วิเคราะห์ diversification limit ใน equal-weight/common-correlation model และอธิบายความแตกต่างระหว่าง naive diversification กับ covariance-aware diversification
8. คำนวณ marginal contribution to risk และ component contribution to risk เพื่ออธิบายแหล่งกำเนิดความเสี่ยงของพอร์ต
9. ประมาณ ค่า mean vector และ covariance matrix จาก ข้อมูล จริง พร้อม ตรวจ data alignment, corporate actions, missing observations และ estimation risk
10. อธิบาย covariance shrinkage, correlation stress testing และเหตุผลที่ sample covariance ไม่ควรถูกมองเป็นค่าคงที่ที่ทราบแน่นอน
11. วิเคราะห์ international diversification โดยรวมผลตอบแทนสินทรัพย์ต่างประเทศกับความเสี่ยงอัตราแลกเปลี่ยนอย่างถูกต้อง

12. เตรียม risk inputs ที่มีคุณภาพสำหรับ Markowitz theory และ portfolio optimization ในบทถัดไป

6.1 บทนำ: จากสินทรัพย์รายตัวสู่ระบบของพอร์ต

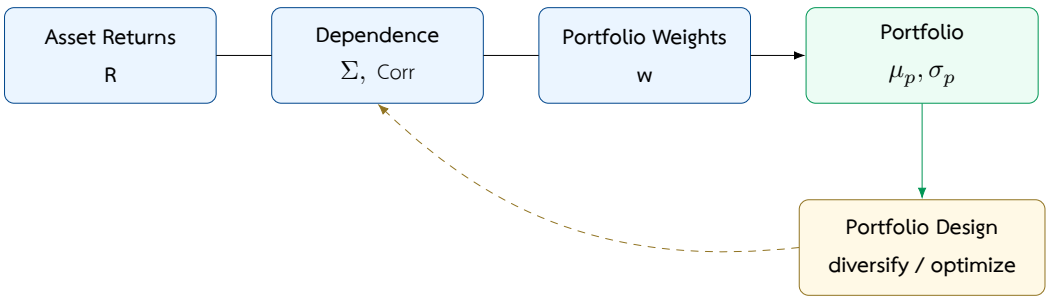
บทที่ 3 พัฒนามาตรวัดความเสี่ยงของผลตอบแทนและความสัมพันธ์ระหว่างสินทรัพย์ บทนี้เปลี่ยนหน่วยวิเคราะห์จากสินทรัพย์รายตัวไปเป็นพอร์ต ซึ่งทำให้คำถามสำคัญไม่ใช่เพียงว่าแต่ละสินทรัพย์มีความผันผวนเท่าใด แต่รวมถึงว่าสินทรัพย์เหล่านั้นเคลื่อนไหวร่วมกันอย่างไร

หัวใจของการบริหารพอร์ตจึงอยู่ที่สามองค์ประกอบ

$$\boxed{\text{Portfolio Risk} = \text{Weights} + \text{Individual Risks} + \text{Dependence Structure}}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง ความเสี่ยงของพอร์ตไม่ได้เกิดจากค่าเฉลี่ยของความเสี่ยงรายตัว แต่เกิดจาก quadratic aggregation ผ่าน covariance matrix [33]

ประเด็นนี้เป็นความแตกต่างเชิงแนวคิดที่สำคัญมาก ตัวอย่างเช่น สินทรัพย์สองชนิดอาจมี volatility เท่ากันทุกประการ แต่ให้ความเสี่ยงของพอร์ตต่างกันอย่างมากหาก correlation ต่างกัน ดังนั้นการวิเคราะห์พอร์ตจึงต้องตอบพร้อมกันว่า “ถืออะไร” “ถือเท่าใด” และ “สินทรัพย์ที่ถือเคลื่อนไหวร่วมกันอย่างไร” ไม่ใช่ดู volatility รายตัวแยกจากกัน



รูปที่ 6.1: โครงสร้างจากผลตอบแทนรายสินทรัพย์สู่ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต

ข้อสังเกต

Diversification ไม่ได้หมายถึงการถือสินทรัพย์ให้มากที่สุด แต่หมายถึงการออกแบบการรวมสินทรัพย์โดยคำนึงถึงโครงสร้างการเคลื่อนไหวร่วมกัน หากสินทรัพย์จำนวนมากมี correlation สูงในเวลาเดียวกัน ประโยชน์จากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์อาจมีจำกัด

6.2 พอร์ตการลงทุนและน้ำหนักพอร์ต

ให้พอร์ตมีสินทรัพย์ n รายการ ณ ต้นช่วงเวลา t โดย $V_{i,t}$ เป็นมูลค่าที่ลงทุนในสินทรัพย์ i และ

$$V_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} V_{i,t}$$

เป็นมูลค่ารวมของพอร์ต กำหนดน้ำหนักต้นงวดเป็น

$$w_{i,t} = \frac{V_{i,t}}{V_{p,t}}$$

ถ้าพอร์ต fully invested

$$\sum_{i=1}^{n} w_{i,t} = 1$$

หรือในรูปเวกเตอร์

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1$$

บทนิยาม 6.1

ถ้า

$$w_i \geq 0 \qquad \text{ทุก } i$$

พอร์ตเป็น long-only portfolio

ถ้าอนุญาต

$$w_i < 0$$

น้ำหนักติดลบแทน short position ภายใต้ข้อสมมติว่ากลยุทธ์สามารถขายชอร์ตได้

Gross exposure และ net exposure สามารถนิยามเป็น

$$G = \sum_{i=1}^{n} |w_i|$$

และ

$$N = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

ตามลำดับ

สำหรับ fully-invested long-only portfolio จะมี $G = N = 1$ แต่พอร์ต long–short อาจมี $G > 1$ แม้ $N = 1$ หรือ $N = 0$

ในการใช้งานจริง ควรแยกคำว่า “fully invested” ออกจาก “unlevered” ให้ชัดเจน เงื่อนไข $N = 1$ เป็นเงื่อนไขทางบัญชีของน้ำหนักสุทธิ แต่ไม่ได้ควบคุมขนาด position รวม หากต้องการควบคุม leverage ต้องกำหนดข้อจำกัดของ gross exposure เพิ่ม เช่น $G \le G_{\max}$ ส่วนกรณีที่ $\sum_i w_i < 1$ ส่วนที่เหลืออาจถูกตีความว่าเป็นเงินสดหรือสินทรัพย์ปลอดความเสี่ยง ซึ่งต้องระบุไว้ในแบบจำลองอย่างชัดเจน

ประเด็นที่ต้องระวัง

เงื่อนไข $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1$ ไม่ได้แปลว่าไม่มี leverage หากมี short positions ตัวอย่างเช่น $\mathbf{w} = (1.5, -0.5)^{\mathsf{T}}$ มี net exposure เท่ากับ 1 แต่ gross exposure เท่ากับ 2

6.3 ผลตอบแทนพอร์ตในหนึ่งช่วงเวลา

ให้ $R_{i,t+1}$ เป็น simple total return ของสินทรัพย์ i จาก t ถึง $t+1$ หากไม่มี external cash flow ระหว่างช่วง

$$V_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{n} V_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$$

หารด้วย $V_{p,t}$

$$1 + R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$$

เมื่อ $\sum_i w_{i,t} = 1$

Portfolio Simple Return

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t} R_{i,t+1} = \mathsf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathsf{R}_{t+1}$$

ทฤษฎีบท 6.1

ผลตอบแทน simple return ของพอร์ตในหนึ่งช่วงเวลาเป็นผลรวมเชิงเส้นของ simple returns รายสินทรัพย์เมื่อใช้น้ำหนักต้นงวด

สูตรนี้เป็นสูตรแบบ exact สำหรับ one-period buy-and-hold return เมื่อ R_i เป็น total return ที่สอดคล้องกับกระแสเงินสดของสินทรัพย์ หากมีการเติมหรือถอนเงินระหว่างงวด หรือมีการ rebalancing ภายในงวด ต้องแยกผลจากการลงทุนออกจาก external cash flow ก่อน มิฉะนั้นผลตอบแทนที่คำนวณได้จะปะปนกับการเปลี่ยนแปลงของเงินลงทุน

ประเด็นที่ต้องระวัง

โดยทั่วไป

$$r_{p,t} \neq \sum_i w_{i,t-1} r_{i,t}$$

เมื่อ r เป็น log return เพราะ logarithm ไม่แจกแจงผ่านผลรวมของมูลค่าสินทรัพย์ สมการเชิงเส้นของพอร์ตจึงควรสร้างจาก simple returns ก่อน

สำหรับ fully-invested portfolio ที่ไม่มี external cash flow จะมีความสัมพันธ์แบบ exact

$$r_{p,t+1} = \log\left(\sum_i w_{i,t} e^{r_{i,t+1}}\right)$$

ไม่ใช่ $\sum_i w_{i,t} r_{i,t+1}$ โดย weighted average ของ log returns อาจใช้เป็น first-order approximation ได้เมื่อผลตอบแทนมีขนาดเล็กและ dispersion ระหว่างสินทรัพย์ไม่สูงมาก แต่ไม่ควร

ใช้แทน exact portfolio return ในการตรวจผลหรือ backtest

6.4 ผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ต

ให้

$$\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$$

และ

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\mathsf{T}$$

จาก linearity of expectation

$$\mathbb{E}(R_p) = \mathbb{E}(\mathsf{w}^\mathsf{T}\mathsf{R}) = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu$$

ผลนี้ไม่ต้องสมมติว่าสินทรัพย์เป็นอิสระต่อกัน เพราะ expectation เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น อย่างไรก็ตาม สมการในรูปนี้ตีความ w เป็นน้ำหนักที่กำหนดไว้ล่วงหน้าหรือเป็นน้ำหนักที่ถือว่าคงที่ภายใต้ข้อมูลที่ใช้คำนวณ หากน้ำหนักเป็นตัวแปรสุ่มที่ขึ้นกับผลตอบแทนในงวดเดียวกัน ต้องวิเคราะห์ conditional expectation และความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกับผลตอบแทนเพิ่มเติม

จึงได้

Expected Portfolio Return

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu$$

ตัวอย่าง 6.1. ให้

$$\mu_A = 8\% \qquad \mu_B = 14\%$$

และ

$$w_A = 0.60 \qquad w_B = 0.40$$

จะได้

$$\mu_p = 0.60(0.08) + 0.40(0.14) = 0.104 = 10.4\%$$

การคำนวณ expected return ยังไม่ต้องใช้ covariance แต่การคำนวณ portfolio risk จำเป็นต้องใช้

6.4.1 Scenario Representation

ถ้ามีสถานการณ์ $s = 1, \dots, m$ ที่มีความน่าจะเป็น p_s และเวกเตอร์ผลตอบแทน r_s

$$\sum_{s=1}^{m} p_s = 1$$

แล้ว

$$\mu = \sum_{s=1}^{m} p_s \mathsf{r}_s$$

และ

$$\mu_p = \sum_{s=1}^{m} p_s \mathsf{w}^{\mathsf{T}} \mathsf{r}_s$$

หากต้องการสร้าง risk inputs จาก scenario set เดียวกัน สามารถคำนวณ

$$\Sigma = \sum_{s=1}^{m} p_s (\mathsf{r}_s - \mu)(\mathsf{r}_s - \mu)^{\mathsf{T}}$$

โดยสูตรนี้เป็น population-style scenario covariance เมื่อ p_s เป็นความน่าจะเป็นที่กำหนดให้ ไม่ใช้ตัวหาร $m - 1$ แบบ sample covariance

รูปแบบนี้มีประโยชน์เมื่อ expected returns และ dependence structure มาจาก economic scenarios แทนการประมาณจากค่าเฉลี่ยย้อนหลังเพียงอย่างเดียว และช่วยให้ผู้วิเคราะห์ตรวจได้ว่า scenario ที่ให้ผล

ตอบแทนสูงหรือต่ำเกิดพร้อมกันในสินทรัพย์ใดบ้าง

6.5 Covariance Matrix และความแปรปรวนของพอร์ต

ให้

$$\Sigma = \mathrm{Var}(\mathsf{R}) = \mathbb{E}\left[(\mathsf{R} - \mu)(\mathsf{R} - \mu)^{\mathsf{T}}\right]$$

สมาชิกตำแหน่ง (i, j) คือ

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$$

และสมาชิกแนวทแยงคือ

$$\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$$

เมื่อ $\sigma_i, \sigma_j > 0$ covariance และ correlation เชื่อมกันด้วย

$$\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

จึงมองได้ว่า covariance matrix รวมทั้ง “ขนาดความผันผวน” และ “ทิศทางการเคลื่อนไหวร่วมกัน” ไว้ในวัตถุทางคณิตศาสตร์เดียวกัน

ทฤษฎีบท 6.2

สำหรับน้ำหนักพอร์ต $\mathbf{w}$

$$\boxed{\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(R_p) = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}}$$

หรือในรูปผลรวม

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \,\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$$

พิสูจน์. จาก

$$R_p - \mu_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}(\mathsf{R} - \mu)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(R_p) &= \mathbb{E}\left[(R_p - \mu_p)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathsf{w}^\mathsf{T}(\mathsf{R} - \mu)(\mathsf{R} - \mu)^\mathsf{T}\mathsf{w}\right] \\
&= \mathsf{w}^\mathsf{T}\mathbb{E}\left[(\mathsf{R} - \mu)(\mathsf{R} - \mu)^\mathsf{T}\right]\mathsf{w} \\
&= \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}
\end{aligned}$$

□

6.5.1 เหตุใด Covariance Matrix ต้องเป็น Positive Semidefinite

ทฤษฎีบท 6.3

Covariance matrix เป็น symmetric positive semidefinite กล่าวคือ

$$\Sigma^\mathsf{T} = \Sigma$$

และสำหรับทุก $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathsf{a}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{a} \geq 0$$

พิสูจน์. ความสมมาตรเกิดจาก

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \mathrm{Cov}(R_j, R_i)$$

และ

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{a} = \text{Var}(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{R}) \geq 0$$

จึงได้ผลตามต้องการ □

ผลนี้สำคัญเพราะ variance ของ portfolio ใด ๆ ต้องไม่ติดลบ นอกจากนี้ sample covariance matrix ที่คำนวณจาก return matrix ชุดเดียวกันด้วยสูตรมาตรฐานจะเป็น PSD โดยโครงสร้างอยู่แล้ว ดังนั้นหากเมทริกซ์ที่สร้างจากข้อมูลมี negative eigenvalues ขนาดมีนัยสำคัญ สาเหตุที่ควรตรวจเป็นลำดับต้น ๆ ได้แก่ pairwise deletion ที่ใช้ sample คนละช่วง การปัดเศษ correlation มากเกินไป การปรับ correlation ทีละคู่โดยไม่รักษาความสอดคล้อง หรือความผิดพลาดในการประกอบเมทริกซ์ ส่วน eigenvalue ติดลบขนาดเล็กมากอาจเกิดจาก numerical roundoff และควรพิจารณาเทียบกับ tolerance ที่เหมาะสม

6.6 พอร์ตสองสินทรัพย์และบทบาทของ Correlation

ให้ w เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 1 และ $1 - w$ เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 2

$$\mu_p = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$$

และ

Two-Asset Portfolio Variance

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

ตัวอย่าง 6.2. กำหนด

$$\mu_A = 8\% \qquad \sigma_A = 12\%$$

$$\mu_B = 14\% \qquad \sigma_B = 20\%$$

$$\rho_{AB} = 0.25$$

และ

$$w_A = 0.60 \qquad w_B = 0.40$$

ผลตอบแทนคาดหมายคือ

$$\mu_p = 10.4\%$$

ส่วนความแปรปรวนคือ

$$\sigma_p^2 = 0.6^2(0.12)^2 + 0.4^2(0.20)^2 + 2(0.6)(0.4)(0.25)(0.12)(0.20)$$

จึงได้

$$\sigma_p^2 = 0.014464$$

และ

$$\sigma_p \approx 12.03\%$$

ขณะที่ weighted average volatility เท่ากับ

$$0.6(12\%) + 0.4(20\%) = 15.2\%$$

ความแตกต่างระหว่าง 15.2% กับ 12.03% แสดงผลของ covariance ต่อ diversification

สำหรับ long-only two-asset portfolio ผลของ correlation เห็นได้โดยตรงจาก

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \rho_{12}} = 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 \geq 0$$

เมื่อ $0 \leq w \leq 1$ ดังนั้นถ้า weights และ volatilities คงเดิม การลด correlation จะไม่เพิ่ม portfolio variance และโดยทั่วไปจะเพิ่มประโยชน์จาก diversification นี่เป็นเหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าทำไมสินทรัพย์ที่ volatility สูงกว่าเล็กน้อยอาจยังมีประโยชน์ต่อพอร์ต หากมี correlation ต่ำหรือเป็นลบกับสินทรัพย์เดิม

6.6.1 กรณี Correlation เท่ากับ 1

เมื่อ $\rho_{12} = 1$

$$\sigma_p = |w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2|$$

สำหรับ long-only weights

$$\sigma_p = w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2$$

จึงไม่มีประโยชน์จากการหักล้างความเสี่ยงเชิงเส้น

6.6.2 กรณี Correlation เท่ากับ 0

เมื่อ $\rho_{12} = 0$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2$$

แม้ covariance เป็นศูนย์ ความเสี่ยงพอร์ตยังไม่เป็นศูนย์ และ zero correlation ไม่ได้แปลว่าสินทรัพย์เป็นอิสระต่อกันโดยทั่วไป เพราะ correlation วัดเฉพาะความสัมพันธ์เชิงเส้น

6.6.3 กรณี Correlation เท่ากับ -1 และพอร์ตความแปรปรวนศูนย์

เมื่อ $\rho_{12} = -1$

$$\sigma_p^2 = [w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2]^2$$

ดังนั้นน้ำหนัก

$$w^{(0)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

และ

$$1 - w^{(0)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

ทำให้

$$\sigma_p = 0$$

ภายใต้แบบจำลอง

สำหรับ $\sigma_A = 12\%$ และ $\sigma_B = 20\%$

$$w_A^{(0)} = 0.625$$

และ

$$w_B^{(0)} = 0.375$$

ทำให้ expected return เท่ากับ

$$\mu_p = 0.625(0.08) + 0.375(0.14) = 10.25\%$$

ผลลัพธ์นี้ไม่ได้หมายความว่าสามารถสร้าง “สินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง” ได้จากสินทรัพย์เสี่ยงทั่วไปเสมอไป แต่เกิดจากสมมติฐานที่เข้มมากว่า $\rho = -1$ แบบคงที่และ covariance structure ที่ใช้ยังคงเดิมตลอดช่วงลงทุน

ประเด็นที่ต้องระวัง

Perfect negative correlation ที่คงอยู่ตลอดเวลาเป็นกรณีเชิงทฤษฎีที่เข้มมาก Sample correlation ที่ใกล้ -1 ในช่วงข้อมูลหนึ่งไม่ใช่หลักประกันว่าจะคงอยู่ในอนาคต โดยเฉพาะในช่วง market stress

6.7 พอร์ตสามสินทรัพย์และพอร์ตหลายสินทรัพย์

สำหรับสามสินทรัพย์

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 \\ + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

เมื่อจำนวนสินทรัพย์เพิ่ม รูปเมทริกซ์

$$\sigma_p^2 = \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}$$

ช่วยลดความซับซ้อนของ notation และเป็นฐานของ optimization ในบทถัดไป

ตัวอย่าง 6.3. ให้

$$\mathsf{w} = (0.40, 0.35, 0.25)^\mathsf{T}$$

$$\mu = (0.08, 0.12, 0.10)^\mathsf{T}$$

และ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0.0036 & -0.0014 \\ 0.0036 & 0.0324 & 0.00756 \\ -0.0014 & 0.00756 & 0.0196 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\mu_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu = 0.099 = 9.9\%$$

และ

$$\sigma_p^2 = \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w} = 0.008845$$

ดังนั้น

$$\sigma_p \approx 9.405\%$$

จาก diagonal ของ Σ จะได้ $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 18\%$ และ $\sigma_3 = 14\%$ ขณะที่ correlations ที่สอดคล้องกันคือประมาณ 0.20, -0.10 และ 0.30 สำหรับคู่ $(1,2)$, $(1,3)$ และ $(2,3)$ ตามลำดับ ตัวอย่างนี้จึงแสดงให้เห็นว่าคู่ที่มี covariance ติดลบช่วยหักล้าง risk aggregation บางส่วน แม้สินทรัพย์ทุกตัวจะยังมี variance เป็นบวก

6.7.1 จำนวนพารามิเตอร์ของ Covariance Matrix

covariance matrix ของสินทรัพย์ n รายการมี variance n ค่า และ covariance ที่ไม่ซ้ำกัน

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ค่า จึงมีพารามิเตอร์อิสระทั้งหมด

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

เมื่อ n ใหญ่ ปัญหาสำคัญจึงเปลี่ยนจากการคำนวณเมทริกซ์ไปเป็นการประมาณเมทริกซ์จำนวนพารามิเตอร์สูงจากข้อมูลที่จำกัด

ยิ่งไปกว่านั้น หาก sample covariance คำนวณจากข้อมูล T ช่วงหลังหักค่าเฉลี่ย rank ของเมทริกซ์จะไม่เกิน $T-1$ ดังนั้นเมื่อ $n \geq T$ เมทริกซ์ sample covariance จะ singular อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ปัญหานี้มีผลโดยตรงต่อ portfolio optimization ที่ต้องอาศัยการแก้ระบบสมการหรือ inverse ของ covariance matrix และเป็นเหตุผลหนึ่งที่ต้องใช้ shrinkage หรือ factor structure ในพอร์ตที่มีสินทรัพย์จำนวนมาก

6.8 Diversification: กลไกทางคณิตศาสตร์

6.8.1 Naive Diversification

Naive diversification ลด concentration ด้วยการกระจายเงินไปยังสินทรัพย์จำนวนมาก วิธีนี้ง่ายและอาจลด idiosyncratic exposure แต่ไม่ได้ใช้ covariance structure โดยตรง

ค่า

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i$$

ไม่ใช่ portfolio volatility โดยทั่วไป เพราะไม่มี cross-covariance terms

6.8.2 Covariance-Aware Diversification

แนวคิด mean–variance ของ Markowitz ใช้ expected returns, variances และ covariances พร้อมกัน [33] ดังนั้นพอร์ตที่มีสินทรัพย์จำนวนน้อยกว่าอาจมี diversification ที่ดีกว่าพอร์ตขนาดใหญ่ หากสินทรัพย์ในพอร์ตแรกมี dependence structure ที่เหมาะสมกว่า

6.8.3 Equal-Weight/Common-Correlation Model

สมมติสินทรัพย์ n รายการมี volatility เท่ากัน σ correlation ระหว่างคู่ทุกคู่เท่ากัน ρ และ

$$w_i = \frac{1}{n}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + n(n-1)\rho\sigma^2\right] \\ &= \sigma^2\left[\rho + \frac{1-\rho}{n}\right] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6.4

ภายใต้ equal-weight/common-correlation model

$$\boxed{\sigma_p^2 = \sigma^2\left(\rho + \frac{1-\rho}{n}\right)}$$

ถ้า $\rho \geq 0$ คงที่

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_p^2 = \rho\sigma^2$$

ส่วน

$$\frac{1-\rho}{n}\sigma^2$$

ลดลงเมื่อ n เพิ่ม ขณะที่

$$\rho\sigma^2$$

ไม่หายไปจากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์เพียงอย่างเดียว ในแบบจำลองนี้จึงตีความได้ว่าพจน์ที่ลดลงตาม $1/n$ เป็นส่วนที่ diversification สามารถลดได้จากการเพิ่มจำนวนสินทรัพย์ ขณะที่พจน์ที่เกิดจาก common co-movement ยังคงอยู่ แม้การตีความนี้ไม่ควรถูกขยายไปแทน systematic risk ของ factor model โดยอัตโนมัติ

ประเด็นที่ต้องระวัง

สำหรับ equicorrelation matrix ขนาด n เงื่อนไขที่เมทริกซ์เป็น PSD คือ

$$-\frac{1}{n-1} \le \rho \le 1$$

ดังนั้นไม่สามารถกำหนด common correlation ติดลบค่าคงที่ เช่น $\rho = -0.20$ แล้วปล่อย $n \to \infty$ โดยยังถือว่า covariance matrix ถูกต้องสำหรับทุก n

6.9 Marginal Risk และ Risk Contribution

การรู้เพียง σ_p บอกขนาดความเสี่ยงรวม แต่ยังไม่บอกว่าสินทรัพย์ใดสร้างความเสี่ยงให้พอร์ตเท่าใด

จาก

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}$$

อนุพันธ์ต่อ w_i คือ

Marginal Contribution to Risk

$$MRC_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma \mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

กำหนด component contribution to risk เป็น

$$RC_i = w_i MRC_i = \frac{w_i(\Sigma \mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

โดย Euler decomposition ให้

ทฤษฎีบท 6.5

ถ้า $\sigma_p > 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} RC_i = \sigma_p}$$

พิสูจน์.

$$\sum_i RC_i = \frac{\sum_i w_i(\Sigma \mathsf{w})_i}{\sigma_p} = \frac{\mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma \mathsf{w}}{\sigma_p} = \sigma_p$$

□

Percentage risk contribution คือ

$$PRC_i = \frac{RC_i}{\sigma_p}$$

และ

$$\sum_i PRC_i = 1$$

ข้อสังเกต

น้ำหนักเงินลงทุนและน้ำหนักความเสี่ยงเป็นคนละแนวคิด สินทรัพย์ที่มี capital weight ต่ำอาจสร้าง risk contribution สูง หาก volatility สูงหรือ covariance กับส่วนอื่นของพอร์ตสูง
นอกจากนี้ MRC_i, RC_i หรือ PRC_i สามารถติดลบได้ หากสินทรัพย์ i มีบทบาทเป็น hedge และช่วยลด volatility ของพอร์ต ค่า risk contribution ติดลบจึงไม่ใช่ความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แต่ต้องตีความร่วมกับเครื่องหมายของน้ำหนักและ covariance structure ส่วน MRC_i เป็นผลกระทบเฉพาะที่จากการเปลี่ยน w_i เล็กน้อยโดยยังไม่ได้บังคับ budget constraint ให้ weights อื่นเปลี่ยนตาม

6.10 International Diversification และ Currency Risk

สำหรับผู้ลงทุนไทยที่ถือสินทรัพย์ต่างประเทศ ให้ $R_{\text{asset,FX}}$ เป็นผลตอบแทนสินทรัพย์ในสกุลเงินต่างประเทศ และให้ R_{FX} เป็นผลตอบแทนของสกุลเงินต่างประเทศเทียบเงินบาท โดยนิยามให้ค่าเพิ่มหมายถึงเงินต่างประเทศแข็งค่าต่อเงินบาท

ผลตอบแทนสกุลบาทแบบ exact คือ

Foreign Asset Return in Domestic Currency

$$1 + R_{\text{THB}} = (1 + R_{\text{asset,FX}})(1 + R_{\text{FX}})$$

ดังนั้น

$$R_{\text{THB}} = R_{\text{asset,FX}} + R_{\text{FX}} + R_{\text{asset,FX}} R_{\text{FX}}$$

สำหรับผลตอบแทนขนาดเล็ก

$$R_{\text{THB}} \approx R_{\text{asset,FX}} + R_{\text{FX}}$$

ถ้าใช้ log returns และนิยามอัตราแลกเปลี่ยนในทิศเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์แบบ exact

$$r_{\text{THB}} = r_{\text{asset,FX}} + r_{\text{FX}}$$

ซึ่งเป็นกรณีที่ log return มีข้อได้เปรียบด้านการบวกข้ามองค์ประกอบแบบคูณ แม้จะไม่สามารถถ่วงน้ำหนักข้าม

สินทรัพย์ในพอร์ตแบบเดียวกับ simple return ได้

จึงเห็นว่า international diversification อาจลด dependence ระหว่างตลาดทุน แต่เพิ่ม currency exposure เข้ามาในพอร์ต การ hedge ค่าเงินจึงเปลี่ยน covariance structure ของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนไทยได้รับจริง

ประเด็นที่ต้องระวัง

ต้องกำหนดทิศทางของอัตราแลกเปลี่ยนให้ชัด หากนิยาม FX quote ในทิศกลับกัน เครื่องหมายของ R_{FX} จะเปลี่ยน การใช้สูตรโดยไม่กำหนด quote convention อาจทำให้ตีความผลตอบแทนผิดทิศ

6.11 การประมาณ Mean Vector และ Covariance Matrix จากข้อมูลจริง

ให้มีผลตอบแทนที่จัดแนววันตรงกัน T ช่วงเวลา สำหรับ n สินทรัพย์

$$\mathsf{R}_t = (R_{1t}, \dots, R_{nt})^{\mathsf{T}} \qquad t = 1, \dots, T$$

sample mean vector คือ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathsf{R}_t$$

และ sample covariance matrix คือ

Sample Covariance Matrix

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (\mathsf{R}_t - \hat{\mu})(\mathsf{R}_t - \hat{\mu})^{\mathsf{T}}$$

ทั้ง $\hat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ ขึ้นกับ sampling frequency และ estimation window อย่างมีนัยสำคัญ การใช้ข้อมูลรายวันให้จำนวนสังเกตมากขึ้นแต่ไวต่อ microstructure และ asynchronous trading มากขึ้น ขณะที่ข้อมูลรายเดือนลด noise บางส่วนแต่มีจำนวนสังเกตน้อยลง จึงไม่มีความถี่เดียวที่เหมาะสมกับทุกวัตถุประสงค์

การ annualize volatility ด้วย $\sqrt{K}$ และ covariance ด้วย K เป็นกฎที่อาศัยสมมติฐานว่าผลตอบแทนข้ามช่วงไม่มี serial covariance ที่มีนัยสำคัญ หากมี autocorrelation หรือ overlapping returns การ scaling

แบบง่ายอาจคลาดเคลื่อนและควรใช้ long-horizon variance ที่รวม autocovariance terms

6.11.1 Data Alignment

ก่อนประมาณ covariance ต้องตรวจอย่างน้อย

1. ใช้วันที่สังเกตเดียวกันทุกสินทรัพย์
2. ใช้ adjusted prices หรือ total-return data ที่สะท้อน corporate actions ตามวัตถุประสงค์
3. ไม่ forward-fill ราคาข้ามวันที่ไม่มีการซื้อขายโดยไม่พิจารณาผลต่อ volatility และ correlation
4. ใช้ return frequency เดียวกัน
5. ตรวจ missing values และ asynchronous trading
6. ตรวจ outliers ว่าเป็นเหตุการณ์ตลาดจริงหรือ data error

ประเด็นที่ต้องระวัง

Pairwise deletion อาจทำให้ covariance แต่ละคู่ถูกประมาณจากคนละ sample period และเมทริกซ์ที่ประกอบขึ้นอาจไม่เป็น PSD แม้ covariance matrix ทางทฤษฎีต้องเป็น PSD

6.12 Estimation Risk และ Covariance Shrinkage

Sample covariance เป็น estimator ไม่ใช่ค่าความจริงที่ทราบแน่นอน เมื่อ n มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับ T estimation noise สามารถทำให้ portfolio optimization ไวต่อข้อมูลอย่างมาก แม้เมทริกซ์จะเป็น PSD ทางคณิตศาสตร์ แต่ก็อาจมี eigenvalues เล็กมากและ condition number สูง ทำให้ผลลัพธ์จาก optimizer เปลี่ยนรุนแรงจากการเปลี่ยนข้อมูลเพียงเล็กน้อย

แนวคิด shrinkage สร้าง estimator

Linear Covariance Shrinkage

$$\widehat{\Sigma}_\lambda = (1-\lambda)\widehat{\Sigma} + \lambda F \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

โดย F เป็น structured target เช่น diagonal covariance หรือ constant-correlation target [30] ส่วน λ ควบคุม trade-off ระหว่างข้อมูลใน sample กับโครงสร้างที่เสถียรกว่า ในการประยุกต์ไม่ควรเลือก λ เพียงเพื่อให้ผลลัพธ์ดูเรียบ แต่ควรใช้เกณฑ์เชิงสถิติหรือวิธีประมาณที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของ risk estimation

ทฤษฎีบท 6.6

ถ้า $\widehat{\Sigma}$ และ F เป็น PSD และ $0 \leq \lambda \leq 1$ แล้ว $\widehat{\Sigma}_\lambda$ เป็น PSD

พิสูจน์. สำหรับทุก $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\widehat{\Sigma}_\lambda\mathbf{a} = (1-\lambda)\mathbf{a}^\mathsf{T}\widehat{\Sigma}\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}^\mathsf{T}F\mathbf{a}$$

ทั้งสองพจน์ไม่ติดลบ จึงได้

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\widehat{\Sigma}_\lambda\mathbf{a} \geq 0$$

□

ข้อสังเกต

Shrinkage ไม่ได้สร้างข้อมูลใหม่ แต่ยอมเพิ่ม bias บางส่วนเพื่อแลกกับ variance ของ estimator ที่ลดลง เป้าหมายคือความเสถียรของ risk estimate และ downstream portfolio weights

6.13 Correlation Stress Testing

Correlation ไม่คงที่ตามเวลา โดยเฉพาะในช่วงวิกฤต dependence ระหว่างสินทรัพย์เสี่ยงอาจสูงขึ้น จึงควรตรวจว่าพอร์ตตอบสนองอย่างไรหาก correlation structure เปลี่ยน

วิธี stress แบบง่ายอาจกำหนด candidate correlation matrix

$$C^{\text{stress}} = (1-\eta)C + \eta\mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}$$

โดย

$$0 \leq \eta \leq 1$$

ซึ่งดัน pairwise correlations เข้าใกล้ 1 ขณะที่ diagonal ยังคงเท่ากับ 1

สำหรับ stress construction นี้ หาก C เป็น correlation matrix ที่ถูกต้องและ $0 \leq \eta \leq 1$ แล้ว C^{stress}

จะยังเป็น PSD เพราะเป็น convex combination ของ PSD matrices C และ $\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$ จึงเป็นวิธี stress ที่รักษา global consistency ของ correlation matrix ได้ดีกว่าการเพิ่ม correlation ทีละคู่แบบอิสระ

ถ้า $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$\Sigma^{\text{stress}} = DC^{\text{stress}}D$$

แล้วคำนวณ

$$\sigma_{p,\text{stress}} = \sqrt{\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma^{\text{stress}}\mathbf{w}}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Stress matrix ต้องผ่าน validity checks เช่น symmetry, unit diagonal สำหรับ correlation matrix และ PSD ไม่ควรปรับ correlation ทีละคู่โดยอิสระแล้วสมมติว่าเมทริกซ์ที่ได้ยังเป็น correlation matrix ที่ถูกต้อง

6.14 Diversification Ratio

มาตรวัดหนึ่งที่ช่วยแยก weighted standalone volatility ออกจาก portfolio volatility คือ diversification ratio

บทนิยาม 6.2

สำหรับ long-only portfolio

$$DR = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\sigma_i}{\sigma_p}$$

จาก triangle inequality ของ standard deviation

$$\sigma_p \leq \sum_i w_i\sigma_i$$

เมื่อ $w_i \geq 0$ จึงได้

$$DR \geq 1$$

ค่า DR สูงขึ้นสะท้อนว่าการรวม covariance ทำให้ portfolio volatility ต่ำกว่า weighted standalone volatility มากขึ้น แต่ไม่ได้บอกว่า expected return สูงขึ้นหรือว่าพอร์ตเหมาะสมที่สุด หากสินทรัพย์ทุกตัวเคลื่อนไหวร่วมกันอย่างสมบูรณ์ในทิศเดียวกันจะได้ $DR = 1$ ส่วนค่า $DR > 1$ สะท้อน diversification benefit ภายใต้ metric นี้ ทั้งนี้นิยามดังกล่าวเหมาะที่สุดกับ long-only portfolio เพราะเมื่อมี short positions ตัวเศษอาจไม่สะท้อน standalone risk aggregation ในความหมายเดียวกัน

6.15 กรณีศึกษางานวิจัย: Correlation และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50

Witayakiattilerd และคณะศึกษาหลักทรัพย์ใน SET50 จำนวน 41 หลักทรัพย์ โดยใช้ข้อมูลรายวันในช่วง 4 มกราคม 2017 ถึง 30 ธันวาคม 2021 และใช้ correlation, beta แนวคิด modern portfolio theory และข้อกำหนดด้าน short selling เพื่อศึกษาการจัดคู่หลักทรัพย์และกลยุทธ์การลงทุน [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: บทเรียนที่เชื่อมกับบทนี้

ผลการศึกษาดังกล่าวมีคุณค่าในฐานะตัวอย่างเชิงประจักษ์ของแนวคิดว่า dependence structure มีผลต่อการสร้างพอร์ต แต่ผลการจัดคู่หลักทรัพย์ในช่วงข้อมูลดังกล่าวเป็น historical empirical finding ไม่ใช่คำแนะนำการลงทุนปัจจุบัน

สิ่งที่ควรนำไปใช้ต่อคือกระบวนการ

$$\text{aligned returns} \longrightarrow \text{correlation/covariance estimation}$$
$$\longrightarrow \text{portfolio construction} \longrightarrow \text{out-of-sample evaluation}$$

มากกว่าการนำรายชื่อคู่หลักทรัพย์ในอดีตไปใช้โดยตรง

6.16 จาก Risk Aggregation สู่ Portfolio Optimization

บทนี้ตอบคำถามว่า เมื่อกำหนด $\mathbf{w}$, μ และ Σ แล้ว พอร์ตมี expected return และ risk เท่าใด กล่าวคือเป็นปัญหาแบบ “forward evaluation” จาก inputs ไปสู่คุณลักษณะของพอร์ต

บทถัดไปเปลี่ยนทิศของปัญหาเป็น “inverse design” คือเริ่มจากเป้าหมายด้านผลตอบแทนและความเสี่ยง แล้วหาน้ำหนักที่สอดคล้องกับเป้าหมายนั้น

บทถัดไปเปลี่ยนทิศของปัญหาเป็น

$$\text{เลือก } \mathbf{w}$$

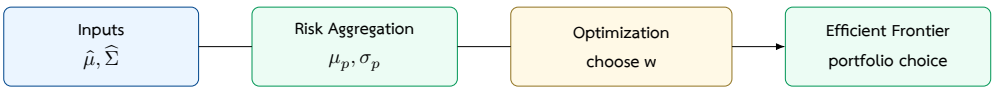
ภายใต้เงื่อนไข เช่น

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1$$

เพื่อให้

$$\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

ต่ำที่สุดสำหรับ target return หรือเพื่อหาพอร์ตบน efficient frontier



รูปที่ 6.2: บทที่ 6 ทำหน้าที่เป็นสะพานจากการประมาณความเสี่ยงไปสู่ทฤษฎีพอร์ตและ optimization

6.17 Data Lineage และ Model Validation

ตารางที่ 6.1: Checklist สำหรับ Portfolio Risk Model

องค์ประกอบ	ต้องบันทึก	ความผิดพลาดที่พบบ่อย
Price data	source, adjusted/ unadjusted, currency	corporate actions ทำให้ return ผิด
Calendar	common dates, holidays, time zones	asynchronous observations
Return definition	simple/log, total/price return	ใช้ log return เป็น exact portfolio return
Frequency	daily/weekly/monthly	annualization ไม่สอดคล้อง
Missing data	deletion/imputation rule	covariance แต่ละ คู่ ใช้ sample คนละชุด
Mean estimate	window, estimator, forecast source	historical mean ถูก ใช้ เป็น expected return โดยไม่ประเมิน uncertainty
Covariance	sample/shrinkage/factor estimator	near-singular หรือ unstable matrix
Correlation stress	scenario และ PSD check	ปรับทีละคู่จน matrix invalid
Currency	FX quote และ hedge assumption	เครื่องหมาย FX return ผิด
Validation	rolling window / holdout / stress test	ประเมิน และ ทดสอบ บน ข้อมูล ชุดเดียวทั้งหมด

Minimum Validation Set

ก่อนส่ง $\widehat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ ไปยัง optimizer ควรตรวจอย่างน้อย

1. $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}^{\mathsf{T}}$ ภายใน numerical tolerance
2. diagonal entries ไม่ติดลบ
3. eigenvalues ไม่ติดลบเกิน tolerance ที่อธิบายได้ และตรวจ condition number หรือ near-singularity เมื่อจะใช้ optimization

4. portfolio variance จาก matrix formula ตรงกับ direct calculation ใน test cases รวมทั้งตรวจหน่วยว่า daily, monthly หรือ annualized สอดคล้องกัน
5. ผลลัพธ์ไม่เปลี่ยนอย่างรุนแรงจากการเลื่อน estimation window เล็กน้อย
6. ผ่าน correlation และ volatility stress scenarios ที่เกี่ยวข้อง

6.18 Investment Lab: Portfolio Risk Engine

Investment Lab: Excel: จากราคาไปสู่ Covariance Matrix

เลือกสินทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการและสร้าง workbook ที่มี

1. adjusted price data ที่จัดวันตรงกัน
2. simple-return matrix
3. mean vector
4. covariance matrix
5. correlation matrix
6. equal-weight portfolio
7. portfolio variance และ volatility
8. risk contribution ของแต่ละสินทรัพย์
9. correlation stress scenario

ทดลองเพิ่มจำนวนสินทรัพย์ใน equal-weight portfolio แล้วสร้างกราฟ n กับ σ_p พร้อมอธิบายว่าผลที่เห็นเกิดจากจำนวนสินทรัพย์หรือ dependence structure และเปรียบเทียบอย่างน้อยสองช่วงเวลา เช่น normal period กับ stress period เพื่อดูว่า diversification benefit เปลี่ยนเมื่อ correlation regime เปลี่ยนหรือไม่

Investment Lab: Python: Portfolio Risk Functions

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `portfolio_return(w, mu)`
- `portfolio_variance(w, cov)`
- `portfolio_sd(w, cov)`
- `cov_from_corr(vol, corr)`

- `is_psd(cov)`
- `linear_shrinkage(sample, target, lambda)`
- `risk_contributions(w, cov)`
- `diversification_ratio(w, cov)`
- `stress_correlation(corr, eta)`

สร้าง unit tests สำหรับ two-asset formula, three-asset matrix formula, perfect-negative-correlation case, PSD test, shrinkage PSD preservation และ Euler risk decomposition

6.19 ข้อจำกัดของกรอบ Mean–Variance

แม้ variance–covariance framework เป็นรากฐานสำคัญของ portfolio theory แต่มีข้อจำกัด

1. variance ปฏิบัติต่อ upside และ downside deviations แบบสมมาตร จึงไม่แยกความผันผวนที่ผู้ลงทุนชอบออกจาก downside risk ที่ผู้ลงทุนกังวล
2. expected returns และ covariances ต้องประมาณจากข้อมูลหรือแบบจำลองและมี estimation error
3. dependence อาจ nonlinear มี tail dependence และเปลี่ยนตาม regime ซึ่ง covariance เพียงเมทริกซ์เดียวอาจสรุปได้ไม่ครบ
4. sample correlation ในช่วงปกติอาจไม่สะท้อน crisis dependence
5. transaction costs, taxes, liquidity และ market impact ยังไม่อยู่ในสมการพื้นฐาน
6. short-sale และ leverage constraints เปลี่ยน feasible set
7. multi-period investing มี rebalancing และ path dependence ที่ one-period model ไม่ครอบคลุมทั้งหมด

ข้อจำกัดเหล่านี้ไม่ได้ทำให้ mean–variance framework หมดประโยชน์ แต่กำหนดขอบเขตการตีความและเป็นแรงจูงใจให้พัฒนาแบบจำลองที่สมบูรณ์ขึ้นในบทต่อไป

บทสรุปท้ายบท

บทนี้สร้างสะพานจากความเสี่ยงรายสินทรัพย์ไปสู่ความเสี่ยงของพอร์ต โดยผลตอบแทน simple return ของพอร์ตหนึ่งช่วงเวลาเป็นผลรวมเชิงเส้น

$$R_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mathsf{R}$$

และ expected return คือ

$$\mu_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu$$

ขณะที่ความเสี่ยงรวมมีโครงสร้างกำลังสอง

$$\sigma_p^2 = \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}$$

จึงขึ้นกับทั้งน้ำหนัก variance รายสินทรัพย์ และ covariance ระหว่างทุกคู่

Diversification benefit เกิดจาก dependence structure ไม่ใช่จำนวนสินทรัพย์เพียงอย่างเดียว ใน equal-weight/common-correlation model

$$\sigma_p^2 = \sigma^2\left(\rho + \frac{1-\rho}{n}\right)$$

ซึ่งแสดงว่าความเสี่ยงส่วนที่เกิดจาก common co-movement ไม่หายไปเพียงเพราะเพิ่มจำนวนสินทรัพย์

Risk contribution ช่วยแยกแหล่งที่มาของ portfolio volatility โดย

$$RC_i = \frac{w_i(\Sigma\mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

และ

$$\sum_i RC_i = \sigma_p$$

ในเชิงประจักษ์ covariance matrix ต้องถูกมองเป็นค่าประมาณที่มี estimation risk จึงต้องตรวจ data alignment, PSD, rank/conditioning, stability และ stress scenarios รวมทั้งอาจใช้ shrinkage เพื่อเพิ่มความเสถียร โดยเฉพาะเมื่อจำนวนสินทรัพย์มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับจำนวนสังเกต

เมื่อ $\widehat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ ได้รับการตรวจสอบแล้ว บทถัดไปจะใช้ตัวแปรเหล่านี้เพื่อศึกษาการเลือกน้ำหนักพอร์ตอย่างเป็นระบบภายใต้กรอบ Markowitz

คำศัพท์สำคัญ

- Portfolio weight
- Fully invested
- Long-only
- Short position
- Gross exposure
- Net exposure
- Portfolio return
- Expected return
- Variance
- Covariance
- Correlation
- Covariance matrix
- Positive semidefinite
- Diversification
- Naive diversification
- Common correlation
- Marginal contribution to risk
- Risk contribution
- Diversification ratio
- International diversification
- Currency risk
- Sample covariance
- Covariance shrinkage
- Correlation stress
- Estimation risk

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. พอร์ตมีสินทรัพย์ 4 รายการ มูลค่า 200,000, 300,000, 250,000 และ 250,000 บาท จงหาน้ำหนักพอร์ตและตรวจเงื่อนไข fully invested
2. พอร์ต long–short มีน้ำหนัก $(1.2, 0.5, -0.7)^\mathsf{T}$ จงหา net exposure และ gross exposure
3. พิสูจน์ว่า simple return ของพอร์ตหนึ่งช่วงเวลาเท่ากับ $\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ เมื่อใช้น้ำหนักต้นงวด
4. ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขที่แสดงว่า weighted average ของ log returns ไม่เท่ากับ exact log return ของพอร์ต
5. ให้ $\mathbf{w} = (0.3, 0.4, 0.3)^\mathsf{T}$ และ $\mu = (0.06, 0.10, 0.14)^\mathsf{T}$ จงหา expected portfolio return
6. พิสูจน์สูตร $\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}$
7. พิสูจน์ว่า covariance matrix เป็น symmetric PSD
8. พอร์ตสองสินทรัพย์มี $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 18\%$, $w_1 = 0.55$ และ $\rho = 0.30$ จงหา σ_p
9. ใช้ข้อมูลในข้อก่อนคำนวณ σ_p ใหม่เมื่อ $\rho = 1, 0, -1$ และตีความผล
10. พิสูจน์น้ำหนัก zero-variance portfolio เมื่อ $\rho = -1$

11. สำหรับพอร์ตสามสินทรัพย์ จงขยาย $\mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}$ เป็น scalar formula
12. covariance matrix ของสินทรัพย์ 20 รายการมีพารามิเตอร์อิสระกี่ค่า
13. พิสูจน์ equal-weight/common-correlation variance formula
14. อธิบายเหตุผลที่ equicorrelation matrix ต้องมี $\rho \geq -1/(n-1)$
15. พอร์ตมี $\mathbf{w} = (0.4, 0.35, 0.25)^\mathsf{T}$ และใช้ covariance matrix จากตัวอย่างพอร์ตสามสินทรัพย์ข้างต้น จงคำนวณ MRC, RC และ PRC
16. พิสูจน์ Euler risk decomposition $\sum_i RC_i = \sigma_p$
17. สินทรัพย์ต่างประเทศให้ผลตอบแทน 8% ในสกุลเงินท้องถิ่น และสกุลเงินนั้นแข็งค่าต่อบาท 4% จงหา exact THB return และ first-order approximation
18. อธิบายว่าทำไม pairwise deletion อาจทำให้ covariance matrix ไม่เป็น PSD
19. พิสูจน์ว่า convex combination ของ PSD matrices ยังเป็น PSD และเชื่อมผลกับ covariance shrinkage
20. ออกแบบ correlation stress test สำหรับพอร์ต 5 สินทรัพย์และอธิบาย validity checks ที่ต้องทำ
21. เปรียบเทียบ naive diversification กับ covariance-aware diversification โดยสร้างตัวอย่างที่พอร์ต 5 สินทรัพย์มีความเสี่ยงต่ำกว่าพอร์ต 20 สินทรัพย์
22. อธิบายเหตุผลที่ sample covariance matrix ไม่ควรถูกส่งเข้า optimizer โดยไม่ทำ stability analysis
23. พิสูจน์ว่า sample covariance matrix ที่คำนวณจาก return matrix ชุดเดียวกันเป็น PSD และอธิบายว่าทำไม pairwise deletion จึงอาจทำลายสมบัตินี้
24. ถ้ามีสินทรัพย์ $n = 120$ รายการ แต่ใช้ข้อมูลรายเดือนเพียง $T = 60$ เดือน จงอธิบาย rank limitation ของ sample covariance matrix และผลต่อการทำ portfolio optimization
25. แสดงว่าในกรณี long-only two-asset portfolio มี $\partial\sigma_p^2/\partial\rho_{12} \geq 0$ และตีความเชิงการลงทุน
26. แสดงว่า exact log return ของ fully-invested one-period portfolio คือ $\log(\sum_i w_i e^{r_i})$ และเปรียบเทียบกับ $\sum_i w_i r_i$ ด้วยตัวอย่างเชิงตัวเลข

คำถามชวนคิด

1. จำนวนสินทรัพย์ในพอร์ตเป็นมาตรวัด diversification ที่ดีเพียงใด
2. เหตุใด correlation ระหว่างสินทรัพย์จึงมักเปลี่ยนในช่วงวิกฤต และมีผลต่อพอร์ตอย่างไร
3. ถ้าสินทรัพย์มี expected return สูงแต่สร้าง risk contribution สูงมาก ควรลดน้ำหนักเสมอหรือไม่
4. การใช้ข้อมูลย้อนหลัง 5 ปีเพื่อประมาณ covariance สำหรับพอร์ตในอีก 1 ปีข้างหน้ามีสมมติฐานแฝงอะไรบ้าง
5. ในการสร้างพอร์ตระหว่างประเทศ การ hedge ค่าเงินอาจเพิ่มความเสี่ยงในบางกรณีได้หรือไม่

6. เหตุใด portfolio optimization จึงอาจไวต่อ expected-return estimates มากกว่า covariance estimates

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 6

[30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

บทที่ 7 ทฤษฎีพอร์ตของ Markowitz

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบาย feasible set, opportunity set, dominance และ mean–variance efficient portfolio ได้
2. ตั้งปัญหา target-return minimum variance และแก้ด้วย Lagrange multiplier ในรูปเวกเตอร์–เมทริกซ์
3. หา Global Minimum Variance Portfolio (GMV) และพิสูจน์สมบัติสำคัญของพอร์ตดังกล่าว
4. สร้างสมการ minimum-variance frontier แบบปิดรูปและแยก efficient branch ออกจาก inefficient branch
5. พิสูจน์ two-fund theorem สำหรับ frontier ของสินทรัพย์เสี่ยง
6. ใช้ mean–variance utility เพื่อเชื่อม risk aversion กับการเลือกพอร์ตบน efficient frontier
7. วิเคราะห์ผลของข้อจำกัด no short-selling ด้วย quadratic programming และเงื่อนไข KKT
8. อธิบาย corner portfolios และ active-set interpretation ได้
9. วิเคราะห์ sensitivity ของ optimal weights ต่อ expected-return vector และ covariance matrix
10. แยก in-sample efficient frontier ออกจาก realized out-of-sample performance
11. ออกแบบ robustness analysis ด้วย shrinkage, resampling, constraints และ rolling estimation
12. เตรียมแนวคิดจาก risky-asset frontier ไปสู่ risk-free asset, tangency portfolio และ CAPM ในบทถัดไป

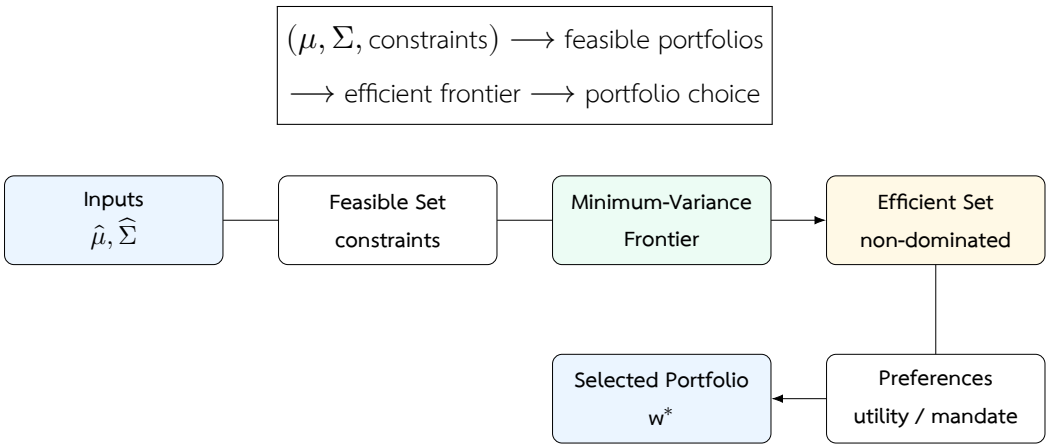
7.1 บทนำ: จากการวัดพอร์ตสู่การเลือกพอร์ต

บทที่ 6 แสดงว่า เมื่อกำหนดน้ำหนักพอร์ต $\mathbf{w}$ แล้ว ผลตอบแทนคาดหมายและความแปรปรวนของพอร์ตเขียนได้เป็น

$$\mu_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu, \qquad \sigma_p^2 = \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}$$

บทนี้กลับทิศทางของคำถาม โดยถือว่า μ และ Σ เป็น inputs แล้วถามว่าเราควรเลือก $\mathbf{w}$ อย่างไรภายใต้เป้าหมายและข้อจำกัดที่กำหนด แนวคิดนี้เป็นแกนของทฤษฎีการเลือกพอร์ตของ Markowitz [33]

ในเชิงการตัดสินใจ ต้องแยกสองชั้นออกจากกันให้ชัดเจน ชั้นแรกคือ *estimation layer* ซึ่งใช้ข้อมูลเพื่อประมาณ $\hat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ ส่วนชั้นที่สองคือ *optimization layer* ซึ่งนำค่าประมาณเหล่านั้นเข้าสู่ปัญหาการเลือกพอร์ต ตัว optimizer สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องทุกขั้น แต่พอร์ตที่ได้ยังอาจไม่เหมาะสมในอนาคตหาก inputs มี estimation error สูง ดังนั้นคำว่า “optimal portfolio” จึงต้องตีความควบคู่กับคุณภาพของข้อมูลและแบบจำลองเสมอ



รูปที่ 7.1: โครงสร้างการเลือกพอร์ตในกรอบ mean–variance

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า “optimal” ในบทนี้หมายถึง optimal ภายใต้ objective function, inputs และ constraints ที่ระบุ ไม่ได้หมายความว่าพอร์ตดังกล่าวจะให้ผลตอบแทนดีที่สุดในอนาคต และ efficient frontier ที่ประมาณจากข้อมูลเป็น estimated frontier ไม่ใช่เส้นคงที่ของตลาด

7.2 Feasible Set, Opportunity Set และ Dominance

ให้มีสินทรัพย์เสี่ยง n รายการ โดย

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\mathsf{T}$$

และ

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(\mathbf{R})$$

ถ้าอนุญาต short-selling และพอร์ต fully invested

$$\mathcal{W} = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{w} = 1\right\}$$

เมื่อส่งแต่ละ $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ ไปยังระนาบ risk–return ด้วย

$$\mathbf{w} \longmapsto \left(\sqrt{\mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}}, \mathbf{w}^\mathsf{T}\mu\right)$$

จะได้ opportunity set ซึ่งเป็นภาพของ feasible weights ในระนาบ risk–return

ข้อสังเกต

Feasible set และ opportunity set ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน Feasible set อยู่ใน *weight space* และบอกว่าน้ำหนักชุดใดทำได้ภายใต้ constraints ส่วน opportunity set อยู่ใน *risk–return space* และบอกว่าพอร์ตเหล่านั้นให้คู่ (σ_p, μ_p) ใดบ้าง พอร์ตน้ำหนักต่างกันอาจถูกส่งไปยังจุด risk–return เดียวกันได้ จึงไม่ควรใช้สองคำนี้แทนกันโดยไม่ระบุบริบท

บทนิยาม 7.1

พอร์ต P_1 ครอบงำพอร์ต P_2 ในความหมาย mean–variance ถ้า

$$\mu_1 \geq \mu_2$$

และ

$$\sigma_1 \leq \sigma_2$$

โดยมีอย่างน้อยหนึ่งอสมการเป็นแบบเข้ม

พอร์ตที่ไม่มีพอร์ตอื่นใน feasible set ครอบงำเรียกว่า mean–variance efficient portfolio

7.2.1 ข้อสมมติและขอบเขตของกรอบ Mean–Variance

กรอบ mean–variance ใช้ expected return เป็นตัวแทน reward และ variance เป็นตัวแทน risk เกณฑ์นี้มีฐานเชิงทฤษฎีที่ชัดเจนภายใต้ quadratic utility และมีความสะดวกมากเมื่อผลตอบแทนอยู่ในตระกูลการแจกแจงที่อธิบายได้ดีด้วยพารามิเตอร์ตำแหน่งและการกระจาย เช่น กรณีปกติ อย่างไรก็ตาม ในข้อมูลจริงที่มี skewness, fat tails หรือ downside asymmetry การใช้เพียงสองโมเมนต์แรกอาจไม่สะท้อนความเสี่ยงทั้งหมด จึงควรมอง mean–variance เป็นแบบจำลองอ้างอิงที่มีประโยชน์ ไม่ใช่คำอธิบายความเสี่ยงที่สมบูรณ์ในทุกสถานการณ์

การประยุกต์ใช้ต้องระบุอย่างน้อย investment horizon, return definition, วิธีประมาณ μ, วิธีประมาณ Σ, universe, short-sale rule, leverage rule และข้อจำกัดด้านสภาพคล่อง เพราะการเปลี่ยนองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งสามารถเปลี่ยน feasible set และ efficient frontier ได้ แม้ข้อมูลราคาชุดเดิมจะไม่เปลี่ยน

ข้อสังเกต

Mean–variance efficiency เป็น conditional statement พอร์ตที่ efficient ภายใต้ $\hat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ ชุดหนึ่งอาจไม่ efficient เมื่อ estimation window, estimator, constraints หรือ market regime เปลี่ยน

7.3 Target-Return Minimum-Variance Problem

สมมติ Σ เป็น symmetric positive definite และต้องการผลตอบแทนเป้าหมาย μ_0

Mean–Variance Optimization

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1, \qquad \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = \mu_0 \end{aligned}$$

ตัวคูณ $1/2$ ไม่เปลี่ยนคำตอบ แต่ทำให้อนุพันธ์สะดวกขึ้น ภายใต้กรณี unconstrained ที่อนุญาต short-selling หาก μ ไม่เป็นค่าคงที่เท่ากันทุกสินทรัพย์ จะสามารถสร้าง target return ได้หลากหลายมากผ่าน long–short positions แต่ความเป็นไปได้เชิงคณิตศาสตร์นี้ไม่ได้หมายความว่าพอร์ตดังกล่าวดำเนินการได้จริงเมื่อมี leverage, borrow หรือ position limits

สร้าง Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{w} - 1) - \gamma(\mu^\mathsf{T}\mathbf{w} - \mu_0)$$

เงื่อนไขอันดับหนึ่งคือ

$$\Sigma\mathbf{w} - \lambda\mathbf{1} - \gamma\mu = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1}(\lambda\mathbf{1} + \gamma\mu)$$

กำหนด

$$A = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mathbf{1}, \qquad B = \mathbf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mu, \qquad C = \mu^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mu, \qquad \Delta = AC - B^2 \quad (7.1)$$

จาก constraints

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\Delta > 0$

$$\lambda = \frac{C - B\mu_0}{\Delta}$$

และ

$$\gamma = \frac{A\mu_0 - B}{\Delta}$$

จึงได้ผลสำคัญ

ทฤษฎีบท 7.1

ถ้า Σ positive definite และ $\Delta > 0$ พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุดที่ให้ expected return เท่ากับ μ_0 คือ

$$\boxed{\mathsf{w}(\mu_0) = \Sigma^{-1}\left[\frac{C - B\mu_0}{\Delta}\mathbf{1} + \frac{A\mu_0 - B}{\Delta}\mu\right]} \tag{7.2}$$

สูตรนี้มีความหมายสำคัญสองประการ ประการแรก น้ำหนักพอร์ตขึ้นกับ Σ^{-1} จึงไวต่อ covariance estimation โดยเฉพาะเมื่อเมทริกซ์มี condition number สูง ประการที่สอง target return เข้าสูตรแบบเชิงเส้น ทำให้ frontier portfolios ทั้งหมดอยู่บน affine subspace ที่มีมิติต่ำกว่าพื้นที่น้ำหนักเดิม ซึ่งเป็นพื้นฐานของ two-fund theorem ในหัวข้อถัดไป

พิสูจน์. เงื่อนไขอันดับหนึ่งให้รูปของ w ด้านบน และ constraints ให้ระบบเชิงเส้นสำหรับ λ, γ เมื่อ $\Delta > 0$ ระบบมีคำตอบเอกลักษณ์

เนื่องจาก Σ positive definite ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\frac{1}{2}\mathsf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathsf{w}$$

เป็น strictly convex ขณะที่ constraints เป็น affine ดังนั้น feasible stationary point เป็น global minimizer ที่มีเอกลักษณ์ □

7.4 เหตุใด $\Delta \geq 0$

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า Σ positive definite แล้ว

$$\Delta = AC - B^2 \geq 0$$

และ $\Delta > 0$ ถ้า μ ไม่เป็นสัดส่วนกับ $\mathbf{1}$

พิสูจน์. กำหนด

$$\mathbf{x} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{1}$$

และ

$$\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}\mu$$

จะได้

$$A = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$$

$$B = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$$

และ

$$C = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$$

จาก Cauchy–Schwarz inequality

$$B^2 \leq AC$$

จึงได้

$$\Delta \geq 0$$

และ equality เกิดเมื่อ $\mathbf{x}$ กับ $\mathbf{y}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งเทียบเท่ากับ μ เป็นสัดส่วนกับ $\mathbf{1}$ □

กรณี $\Delta = 0$ ภายใต้ Σ positive definite เทียบเท่ากับ $\mu = c\mathbf{1}$ สำหรับค่าคงที่ c กล่าวคือ expected return ของสินทรัพย์ทุกตัวเท่ากัน ดังนั้นพอร์ต fully invested ทุกพอร์ตมี expected return เท่ากับ c หากกำหนด $\mu_0 = c$ ข้อจำกัดด้านผลตอบแทนจะซ้ำกับ budget constraint ในเชิงข้อมูล และหากกำหนด $\mu_0 \neq c$ ปัญหาจะไม่มี feasible solution ประเด็นนี้อธิบายว่าทำไมสูตร frontier แบบปิดรูปจึงต้องสมมติ $\Delta > 0$

7.5 Global Minimum Variance Portfolio

หากไม่กำหนด target return ปัญหาคือ

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

ภายใต้

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1$$

ทฤษฎีบท 7.3

Global Minimum Variance Portfolio คือ

$$\boxed{\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{A}} \tag{7.3}$$

โดย

$$\boxed{\mu_{\text{GMV}} = \frac{B}{A} \qquad \sigma^2_{\text{GMV}} = \frac{1}{A}} \tag{7.4}$$

พิสูจน์. Lagrangian คือ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} - 1)$$

จึงได้

$$\Sigma\mathbf{w} = \lambda\mathbf{1}$$

หรือ

$$\mathbf{w} = \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

ใช้ budget constraint

$$1 = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = \lambda A$$

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{1}{A}$$

และได้สูตรน้ำหนัก GMV จากนั้น

$$\mu_{\text{GMV}} = \mu^{\mathsf{T}} \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{A} = \frac{B}{A}$$

ส่วน variance คือ

$$\sigma^2_{\text{GMV}} = \frac{\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{A^2} = \frac{1}{A}$$

□

ข้อสังเกตสำคัญคือ $\mathbf{w}_{\text{GMV}}$ ขึ้นกับ Σ แต่ไม่ขึ้นกับ μ โดยตรง จึงมักมีความเสถียรกว่าพอร์ตที่ไล่ตาม target return หรือ expected-return forecasts เมื่อการประมาณค่า mean มี noise สูง อย่างไรก็ดี GMV ยังไวต่อ covariance estimation และอาจมีน้ำหนักสุดโต่งได้หากอนุญาต short-selling โดยไม่มีข้อจำกัด

7.5.1 กรณีสองสินทรัพย์

ถ้า w เป็นน้ำหนักสินทรัพย์ 1

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}$$

หาอนุพันธ์เทียบ w จะได้

Two-Asset GMV

$$w_1^{\text{GMV}} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}},$$
$$w_2^{\text{GMV}} = 1 - w_1^{\text{GMV}}$$

ตัวส่วน $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} = \text{Var}(R_1 - R_2)$ จึงสะท้อนความเสี่ยงของผลตอบแทนส่วนต่างระหว่างสองสินทรัพย์ หากส่วนต่างแทบไม่ผันผวน สินทรัพย์ทั้งสองให้ข้อมูลด้าน diversification ที่ใกล้เคียงกันมาก และสูตรน้ำหนักจะไวต่อค่าประมาณ covariance มากขึ้น

7.6 Minimum-Variance Frontier

จาก optimality condition

$$\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{1} + \gamma \mu$$

จึงมี

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathbf{w} = \lambda + \gamma \mu_0$$

แทนค่า λ และ γ

ทฤษฎีบท 7.4

Minimum-variance frontier ของ risky assets ภายใต้ unconstrained short-selling คือ

$$\boxed{\sigma^2(\mu) = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta}} \tag{7.5}$$

และสามารถเขียนรอบ GMV เป็น

$$\boxed{\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta}\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2} \tag{7.6}$$

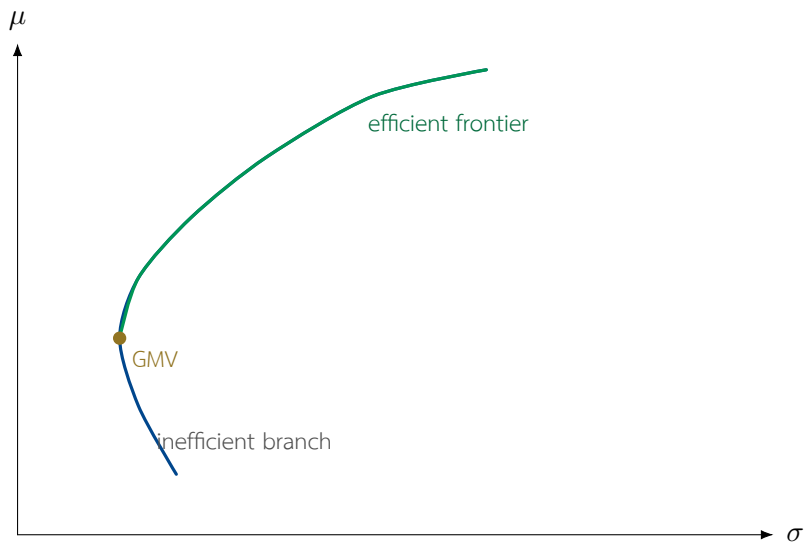
สมการหลังทำให้เห็นทันทีว่า variance ต่ำสุดเกิดเมื่อ

$$\mu = \frac{B}{A} = \mu_{\text{GMV}}$$

และ

$$\sigma^2 = \frac{1}{A}$$

ในระนาบ (μ, σ^2) สมการเป็นพาราโบลา ส่วนในระนาบ (σ, μ) สมการเต็มเป็นไฮเพอร์โบลา แต่ในทางการเงินพิจารณาเฉพาะครึ่งระนาบ $\sigma \geq 0$ จึงเห็นแขนบนและแขนล่างที่มาบรรจบกัน ณ GMV แขนบนเป็นส่วนที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าสำหรับความเสี่ยงระดับเดียวกัน



รูปที่ 7.2: Minimum-variance frontier และ efficient branch

บทนิยาม 7.2

ส่วนของ minimum-variance frontier ที่

$$\mu \geq \mu_{\text{GMV}}$$

คือ efficient frontier

ส่วนที่

$$\mu < \mu_{\text{GMV}}$$

เป็น inefficient branch เพราะสำหรับทุกจุดบนแขนล่าง มีพอร์ตบนแขนบนที่มี variance เท่ากันแต่ expected return สูงกว่า

การแบ่ง efficient/inefficient จึงไม่ใช่เรื่องของ “ความเสี่ยงต่ำหรือสูง” เพียงอย่างเดียว แต่เป็นเรื่องของ dominance ตัวอย่างเช่น พอร์ตที่มีความเสี่ยงสูงกว่า GMV อาจยังมีประสิทธิภาพ หากไม่มีพอร์ตอื่นที่ให้ expected return อย่างน้อยเท่ากันด้วยความเสี่ยงที่ต่ำกว่า

7.7 ตัวอย่างเชิงตัวเลขสามสินทรัพย์

พิจารณา

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.10 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

และ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.00192 & 0.00144 \\ 0.00192 & 0.0144 & 0.00756 \\ 0.00144 & 0.00756 & 0.0324 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้สอดคล้องกับ volatilities $8\%, 12\%, 18\%$ และ pairwise correlations $0.20, 0.10, 0.35$ จากการคำนวณได้ประมาณ

$$A = 197.7324, \qquad B = 14.7551, \qquad C = 1.29864, \qquad \Delta = 39.0718$$

สำหรับ target return

$$\mu_0 = 10\%$$

ได้

$$\mathsf{w}(0.10) \approx \begin{bmatrix} 0.3149 \\ 0.3703 \\ 0.3149 \end{bmatrix}$$

และ

$$\sigma_p \approx 9.12\%$$

ส่วน GMV คือ

$$\mathsf{w}_{\text{GMV}} \approx \begin{bmatrix} 0.7082 \\ 0.2181 \\ 0.0737 \end{bmatrix}$$

โดย

$$\mu_{\text{GMV}} \approx 7.46\%$$

และ

$$\sigma_{\text{GMV}} \approx 7.11\%$$

ตารางที่ 7.1: ตัวอย่างจุดบน minimum-variance frontier

μ_0	w_1	w_2	w_3	σ_p
8%	0.6248	0.2503	0.1248	7.21%
10%	0.3149	0.3703	0.3149	9.12%
12%	0.0049	0.4902	0.5049	12.44%
14%	-0.3051	0.6102	0.6949	16.34%

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าเมื่อ target return สูงขึ้น optimizer ค่อย ๆ ลดน้ำหนักสินทรัพย์ที่มี expected return ต่ำและเพิ่มน้ำหนักสินทรัพย์ที่มี expected return สูง เมื่อ target เท่ากับ 14% ซึ่งเป็น expected return สูงสุดของสินทรัพย์ทั้งสาม พอร์ต long-only ในตัวอย่างนี้ต้องเป็น $\mathbf{w} = (0, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ จึงมี volatility 18% แต่ unconstrained optimizer สามารถใช้ short position ในสินทรัพย์ที่ 1 เพื่อจัด covariance structure ใหม่และลด volatility ลงเหลือประมาณ 16.34% จึงไม่ควรนำสูตรปิดรูปไปใช้กับ long-only mandate โดยไม่แก้ constrained problem ใหม่

7.8 Two-Fund Theorem สำหรับสินทรัพย์เสี่ยง

จากสมการ (7.2) สามารถจัดรูปเป็น

$$\mathbf{w}(\mu) = \mathbf{g} + \mu \mathbf{h}$$

โดย

$$\mathbf{g} = \frac{C\Sigma^{-1}\mathbf{1} - B\Sigma^{-1}\mu}{\Delta}$$

และ

$$\mathbf{h} = \frac{A\Sigma^{-1}\mu - B\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\Delta}$$

ดังนั้น frontier portfolios อยู่บน affine line ใน weight space

ทฤษฎีบท 7.5

เลือกพอร์ตบน minimum-variance frontier สองพอร์ต $\mathsf{w}^{(1)}$ และ $\mathsf{w}^{(2)}$ ที่มี expected returns $\mu_1 \neq \mu_2$ แล้ว frontier portfolio ที่มี target return μ_0 สามารถเขียนเป็น

$$\boxed{\mathsf{w}(\mu_0) = \alpha \mathsf{w}^{(1)} + (1-\alpha)\mathsf{w}^{(2)}}$$

เมื่อ

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

คำว่า combination ในทฤษฎีบทนี้เป็น *affine combination* กล่าวคือ α ไม่จำเป็นต้องอยู่ในช่วง $[0,1]$ หาก target return อยู่นอกช่วงระหว่าง μ_1 และ μ_2 จะได้ $\alpha < 0$ หรือ $\alpha > 1$ ซึ่งตีความเป็นการ extrapolate ด้วย long–short positions ไม่ใช่การผสมแบบ long-only ธรรมดา

พิสูจน์. เพราะ

$$\mathsf{w}(\mu) = \mathsf{g} + \mu \mathsf{h}$$

จึงมี

$$\begin{aligned} \alpha \mathsf{w}(\mu_1) + (1-\alpha)\mathsf{w}(\mu_2) &= \mathsf{g} + \left[\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2\right]\mathsf{h} \\ &= \mathsf{g} + \mu_0 \mathsf{h} \\ &= \mathsf{w}(\mu_0) \end{aligned}$$

□

ประเด็นที่ต้องระวัง

Two-fund theorem ในส่วนนี้กล่าวถึงการสร้าง frontier จาก risky frontier portfolios สองพอร์ต ไม่ใช่ mutual-fund separation ที่เกิดหลังเพิ่ม risk-free asset ซึ่งจะพัฒนาในบทที่ 8

7.9 Utility และการเลือกพอร์ตของนักลงทุน

Efficient frontier ระบุชุดพอร์ตที่ไม่ถูกครอบงำ แต่ยังไม่ระบุว่าผู้ลงทุนควรเลือกจุดใด จำเป็นต้องเพิ่ม preference หรือ objective

พิจารณา mean–variance utility

$$U(\mathsf{w}) = \mu^{\mathsf{T}}\mathsf{w} - \frac{a}{2}\mathsf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathsf{w} \qquad a > 0 \tag{7.7}$$

โดย a เป็น risk-aversion coefficient

ทฤษฎีบท 7.6

ภายใต้ budget constraint

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathsf{w} = 1$$

คำตอบของ

$$\max_{\mathsf{w}} \left\{ \mu^{\mathsf{T}}\mathsf{w} - \frac{a}{2}\mathsf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathsf{w} \right\}$$

คือ

$$\boxed{\mathsf{w}_a = \mathsf{w}_{\text{GMV}} + \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\left(\mu - \mu_{\text{GMV}}\mathbf{1}\right)} \tag{7.8}$$

พิสูจน์. FOC คือ

$$\mu - a\Sigma\mathsf{w} - \lambda\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

จึงได้

$$\mathsf{w} = \frac{1}{a}\Sigma^{-1}(\mu - \lambda\mathbf{1})$$

จาก budget constraint

$$1 = \frac{1}{a}(B - \lambda A)$$

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{B - a}{A} = \mu_{\text{GMV}} - \frac{a}{A}$$

แทนกลับและจัดรูปจะได้สมการ (7.8) □

นอกจากนี้

$$\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \frac{\Delta}{aA}$$

และ

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{A} + \frac{\Delta}{a^2 A}$$

ดังนั้นเมื่อ a เพิ่ม พอร์ตที่เลือกจะเข้าใกล้ GMV และเมื่อ $a \to \infty$ จะได้ $\mathbf{w}_a \to \mathbf{w}_{\text{GMV}}$ โดยตรง ในทางกลับกัน เมื่อ a ลดลง นักลงทุนให้น้ำหนักกับ expected return มากขึ้น ทำให้พอร์ตเคลื่อนออกจาก GMV ไปตาม efficient frontier และโดยทั่วไปมีความไวต่อ estimation error ของ μ มากขึ้น

สังเกตว่าเมื่อ $a > 0$ และ $\Delta > 0$ จะมี $\mu_a > \mu_{\text{GMV}}$ ดังนั้นคำตอบของ utility problem อยู่บน efficient branch ไม่ใช่แขนล่าง และสมการ variance ที่ถูกต้องคือ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2 A)$ ซึ่งสอดคล้องกับการแทน μ_a ลงในสมการ frontier โดยตรง

ข้อสังเกต

Utility parameter ไม่ควรถูกเลือกเพียงเพื่อทำให้ผลย้อนหลังดูดี ค่า a ควรสะท้อน mandate, risk budget หรือ preference ที่กำหนดก่อนประเมินผลลัพธ์

7.10 No Short-Selling และ Quadratic Programming

เมื่อไม่อนุญาต short-selling เพิ่มข้อจำกัด

$$w_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

ปัญหากลายเป็น

Long-Only Mean–Variance Problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1, \qquad \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = \mu_0, \qquad \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ในกรณี long-only และ fully invested ค่า μ_0 ต้องอยู่ใน convex hull ของ expected returns ของสินทรัพย์ กล่าวง่าย ๆ คือสำหรับสินทรัพย์รายตัวและไม่มีข้อจำกัดอื่น ต้องมี $\min_i \mu_i \leq \mu_0 \leq \max_i \mu_i$ จึงจะมี feasible portfolio เงื่อนไขนี้ต่างจาก unconstrained case ที่ short-selling ทำให้ช่วง target return ขยายออกไปได้มาก

สูตร inverse แบบ unconstrained ไม่สามารถใช้ได้ตลอด frontier เพราะ active set เปลี่ยนเมื่อ target return เปลี่ยน

7.10.1 KKT Conditions

เขียน inequality เป็น

$$-w_i \leq 0$$

และให้ $\nu_i \geq 0$ เป็น multipliers

เงื่อนไข KKT คือ

$$\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} - \gamma \mu - \nu &= \mathbf{0} \\
\mathbf{1}^{\mathsf{T}} \mathbf{w} &= 1 \\
\mu^{\mathsf{T}} \mathbf{w} &= \mu_0 \\
\mathbf{w} &\geq \mathbf{0} \\
\nu &\geq \mathbf{0} \\
\nu_i w_i &= 0
\end{aligned}$$

บทนิยาม 7.3

สินทรัพย์ที่มี $w_i = 0$ อยู่บน boundary ของ feasible set ในภาษา active-set optimization ข้อจำกัด $w_i \geq 0$ ของสินทรัพย์นั้นเป็น *active constraint* ขณะที่สินทรัพย์มักถูกเรียกว่า inactive asset เพราะไม่ได้ถูกถือในพอร์ต หาก $w_i > 0$ complementary slackness บังคับให้ $\nu_i = 0$
จุดที่ active set เปลี่ยนทำให้ frontier แบบ constrained มีโครงสร้างเป็นชิ้น ๆ และเกิด corner portfolios จึงไม่ควรคาดหวังว่าน้ำหนักจะเปลี่ยนอย่างเรียบตลอดทุก target return

ประเด็นที่ต้องระวัง

หาก unconstrained solution มีน้ำหนักติดลบ การแทนน้ำหนักเหล่านั้นด้วยศูนย์แล้ว normalize ใหม่ไม่ใช่คำตอบ long-only optimizer โดยทั่วไป เพราะการเปลี่ยนน้ำหนักหนึ่งตัวเปลี่ยนทั้ง budget, target return และ covariance interactions

7.11 ข้อจำกัดเชิงปฏิบัติที่เปลี่ยน Efficient Frontier

การลงทุนจริงอาจมี constraints เช่น

$$\ell_i \leq w_i \leq u_i$$

sector limits

$$L_g \leq \sum_{i \in g} w_i \leq U_g$$

gross leverage limit

$$\sum_i |w_i| \leq G_{\max}$$

และ turnover constraint

$$\sum_i |w_i - w_i^{\text{old}}| \leq \tau$$

เมื่อเพิ่ม constraints feasible set จะหดตัว ดังนั้น frontier ที่เป็นไปได้ภายใต้ constraints ใหม่ไม่สามารถครอบงำ unconstrained frontier ในเชิง mathematical opportunity set ได้

ทฤษฎีบท 7.7

ถ้า feasible sets สองชุดมีความสัมพันธ์

$$\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$$

แล้ว minimum variance ที่ target return เดียวกันภายใต้ $\mathcal{W}_2$ ไม่น้อยกว่าภายใต้ $\mathcal{W}_1$

พิสูจน์. การ minimize ฟังก์ชันเดียวกันบนเซตที่เล็กกว่าไม่สามารถให้ค่าต่ำกว่าค่าต่ำสุดบนเซตที่ใหญ่กว่าซึ่งครอบคลุมเซตนั้น □

อย่างไรก็ตาม constraints อาจช่วยให้ realized out-of-sample performance ดีขึ้น เพราะลด estimation-error amplification, concentration และ turnover แม้ in-sample frontier จะดูด้อยลง นี่เป็นตัวอย่างสำคัญของความแตกต่างระหว่าง *optimization efficiency* กับ *investment robustness*: การยอมเสียประสิทธิภาพเชิงแบบจำลองเล็กน้อยอาจแลกกับพอร์ตที่ดำเนินการได้จริงและเสถียรกว่า

7.12 Estimation Error และความไม่เสถียรของ Optimal Weights

สูตรปิดรูปทำให้เห็นว่าคำตอบขึ้นกับ

$$\Sigma^{-1}$$

อย่างมาก ถ้า covariance matrix มี eigenvalue เล็ก การกลับเมทริกซ์จะขยาย noise ในทิศดังกล่าว ให้ eigendecomposition

$$\Sigma = Q\Lambda Q^{\mathsf{T}}$$

โดย

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

แล้ว

$$\Sigma^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{\mathsf{T}}$$

ถ้า λ_j เล็กมาก ค่า $1/\lambda_j$ จะมีค่ามาก ทำให้ perturbation เล็กในข้อมูลสร้างการเปลี่ยนแปลงของน้ำหนักได้มาก ปัญหานี้มักสรุปด้วย condition number

$$\kappa(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

เมื่อ $\kappa(\Sigma)$ สูงมาก การคำนวณ inverse แม้ทำได้ในเชิงตัวเลขก็อาจไม่เสถียร ในกรณีที่ sample covariance เป็น singular เช่น จำนวนสินทรัพย์มากเมื่อเทียบกับจำนวนข้อมูล การใช้ pseudoinverse เพียงอย่างเดียวไม่แก้ estimation risk โดยอัตโนมัติ จึงควรพิจารณา shrinkage, factor structure หรือ regularization ร่วมด้วย

ประเด็นที่ต้องระวัง

Efficient frontier ที่ดูดีมากใน sample อาจเป็นผลของ estimation noise โดยเฉพาะเมื่อ expected-return estimates แตกต่างกันเพียงเล็กน้อยแต่ optimizer ใช้ leverage หรือ short positions เพื่อแสวงหาความแตกต่างนั้น

7.13 Sensitivity ของ Optimal Weights

ให้ θ แทน input parameter เช่น expected return, volatility หรือ correlation และให้

$$\mathbf{w}^*(\theta)$$

เป็น optimal weights

การตรวจ sensitivity สามารถใช้ finite difference

$$\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \theta} \approx \frac{\mathbf{w}^*(\theta + h) - \mathbf{w}^*(\theta - h)}{2h}$$

สำหรับ unconstrained problem ที่คำตอบเปลี่ยนอย่างเรียบ finite difference ให้การประมาณ local sensitivity ที่มีความหมาย แต่ใน constrained optimization คำตอบอาจไม่ differentiable ณ จุดที่ active set เปลี่ยน ดังนั้นควรดูทั้งอนุพันธ์เชิงตัวเลขและการเปลี่ยนแปลงของ active constraints ควบคู่กัน

ในทางปฏิบัติไม่จำเป็นต้องรายงานอนุพันธ์ทุกตัว แต่ควรตรวจอย่างน้อย

1. expected-return perturbation
2. volatility perturbation
3. correlation stress
4. estimation-window shift
5. universe inclusion/exclusion
6. constraint tightening/relaxation

Weight Stability Diagnostics

ตัวชี้วัดง่ายที่ใช้เปรียบเทียบพอร์ตฐานกับพอร์ตหลัง perturbation ได้แก่

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_1$$

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_2$$

และ maximum absolute weight change

$$\max_i |w_i^{(1)} - w_i^{(0)}|$$

หาก input เปลี่ยนเล็กน้อยแต่น้ำหนักเปลี่ยนมาก ควรตีความคำตอบ optimizer ด้วยความระมัดระวัง

7.14 แนวทางเพิ่ม Robustness

แนวทางสำคัญประกอบด้วย

ตารางที่ 7.2: แนวทางลดความเปราะบางของ Mean–Variance Portfolio

แนวทาง	หลักการ	ข้อแลกเปลี่ยน
Covariance shrinkage	ดึง sample covariance เข้าหา structured target	เพิ่ม bias เพื่อแลกกับ estimation stability
Expected-return shrinkage	ลด dispersion ของ $\widehat{\mu}$	ลด extreme active bets
Weight bounds	จำกัด w_i	frontier ใน sample แคบลง
Long-only	ตัด short positions	ลด leverage แต่เสีย flexibility
Turnover penalty	ลงโทษการเปลี่ยนน้ำหนัก	ลด trading cost แต่ตอบสนองช้าลง
Resampling	สร้าง หลาย samples/ parameter scenarios	ใช้ computation มากขึ้นและขึ้นกับ resampling design
Factor structure	ลดมิติของ covariance estimation	มี factor-model risk
Rolling validation	ประเมินผลข้ามเวลา	ลด sample สำหรับแต่ละ window

แนวคิด shrinkage ของ covariance เชื่อมกับบทที่ 6 และงานของ Ledoit และ Wolf [30] จุดสำคัญคือ robustness ไม่ได้หมายถึงการใช้วิธีที่ซับซ้อนที่สุด แต่หมายถึงการลดความไวของผลลัพธ์ต่อ noise และ assumptions โดยยังรักษาเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์และความสามารถในการตรวจสอบย้อนกลับ

7.15 In-Sample Frontier กับ Out-of-Sample Portfolio

การสร้าง frontier และการประเมินผลต้องแยกช่วงข้อมูลอย่างชัดเจน

$$\text{Estimation Window} \longrightarrow (\widehat{\mu}_t, \widehat{\Sigma}_t) \longrightarrow \mathbf{w}_t^* \longrightarrow \text{Future Holding Period}$$

ผลตอบแทน realized ของพอร์ตในช่วงถัดไปคือ

$$R_{p,t+1} = (\mathsf{w}_t^*)^\mathsf{T} \mathsf{R}_{t+1}$$

ไม่ใช่

$$(\mathsf{w}_t^*)^\mathsf{T} \hat{\mu}_t$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

การใช้ข้อมูลอนาคตในการประมาณ $\hat{\mu}$ หรือ $\widehat{\Sigma}$ ก่อนสร้างน้ำหนักเป็น look-ahead bias การรายงาน efficient frontier ที่ใช้ข้อมูลทั้ง sample จึงไม่ใช่หลักฐานของ out-of-sample investment performance

สำหรับ rolling experiment ควรบันทึก estimation date, rebalance date, holding period, transaction-cost assumption และ benchmark ทุกครั้ง หากมีการซื้อขายจริง realized portfolio return ควรหักต้นทุนจาก turnover ที่เกิดขึ้นด้วย มิฉะนั้นอาจเกิดกรณีที่ optimizer ดูเหนือกว่า benchmark ในเชิง gross return แต่ด้อยกว่าเมื่อพิจารณา net return

7.16 กรณีศึกษางานวิจัยของผู้เขียน

งานของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาการใช้ correlation, beta และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50 ในข้อมูลย้อนหลัง โดยแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์และข้อกำหนด long–short สามารถเปลี่ยน feasible investment strategies ได้ [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Correlation Structure กับ Feasible Strategy

บทเรียนสำหรับทฤษฎีพอร์ตไม่ใช่การนำคู่หลักทรัพย์จาก sample period เดิมมาใช้ในปัจจุบัน แต่คือกระบวนการ

$$\text{return data} \longrightarrow \text{dependence estimation} \longrightarrow \text{feasible-set design}$$
$$\longrightarrow \text{portfolio rule} \longrightarrow \text{out-of-sample evaluation}$$

เมื่ออนุญาต short-selling feasible set เปลี่ยนอย่างมีสาระ และต้องเพิ่มข้อจำกัดด้าน borrowability, leverage, liquidity และ transaction cost ในการใช้งานจริง

งานของ Kesamoon และ Witayakiattilerd ใช้ fuzzy analytical hierarchy process เพื่อรวมข้อมูลเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพในการคัดเลือกหลักทรัพย์ [28]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Security Selection กับ Portfolio Weighting เป็นคนละชั้น

การคัดเลือก universe สามารถทำก่อน mean–variance optimization

$$\text{fundamentals / qualitative information} \longrightarrow \text{screening or score}$$
$$\longrightarrow \text{candidate universe} \longrightarrow (\hat{\mu}, \widehat{\Sigma}) \longrightarrow \text{portfolio weights}$$

วิธี screening ไม่ได้แทน Markowitz optimizer และ Markowitz optimizer ไม่ได้ตอบคำถามว่าควรนำสินทรัพย์ใดเข้าสู่ universe ตั้งแต่ต้น

7.17 สะพานสู่สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ CAPM

frontier ในบทนี้สร้างจาก risky assets เท่านั้น บทที่ 8 จะเพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงที่ให้ผลตอบแทน R_f

เมื่อผสม risk-free asset กับ risky portfolio P ด้วยน้ำหนัก y โดยน้ำหนักในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ $1 - y$

$$\mu_C = R_f + y(\mu_P - R_f)$$

และ

$$\sigma_C = |y|\sigma_P$$

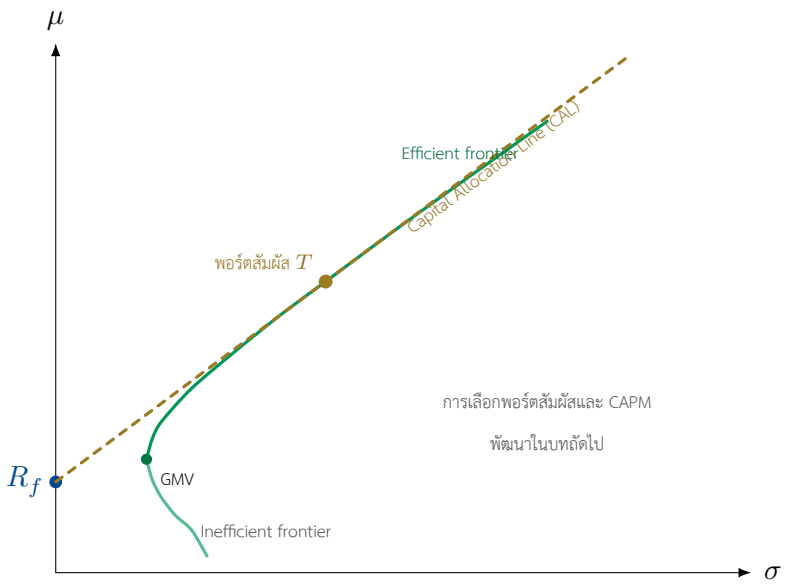
ดังนั้นพอร์ตผสมอยู่บนเส้นตรงในระนาบ σ–μ เมื่อพิจารณาด้าน $y \geq 0$ และหากอนุญาต $y > 1$ หมายถึงการกู้ที่อัตรา R_f เพื่อเพิ่ม leverage ส่วน $0 < y < 1$ หมายถึงถือทั้ง risk-free asset และ risky portfolio

ผลเส้นตรงนี้ตั้งอยู่บนสมมติฐานว่าการให้กู้และกู้ยืมทำได้ที่อัตรา risk-free เดียวกันและไม่มีข้อจำกัดเพิ่มเติม ซึ่งเป็น idealization ที่จะต้องระวังเมื่อนำไปใช้จริง

คำถามสำคัญจึงเปลี่ยนเป็นว่า risky portfolio ใดทำให้เส้นที่เริ่มจาก R_f มีความชันสูงที่สุด

$$\frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}$$

ซึ่งนำไปสู่ tangency portfolio, Capital Allocation Line, Capital Market Line และ CAPM



รูปที่ 7.3: การเพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงทำให้เส้นจัดสรรเงินทุน (Capital Allocation Line: CAL) สัมผัสเส้นขอบเขตประสิทธิภาพของสินทรัพย์เสี่ยง

7.18 Data Lineage และ Model Governance

ตารางที่ 7.3: Checklist สำหรับ Mean–Variance Portfolio Model

องค์ประกอบ	ต้องระบุ	ความเสี่ยงหากละเลย
Universe	inclusion/exclusion rule	survivorship และ selection bias
Expected returns	estimator, horizon, annualization	optimizer ไล่ตาม noise
Covariance	estimator, window, shrinkage	unstable inverse matrix
Constraints	long-only, bounds, leverage, sectors	theoretical weights ใช้งานจริงไม่ได้
Rebalancing	frequency, trigger	turnover สูงหรือ drift มากเกินไป
Transaction costs	commissions, spread, impact	paper frontier สูงเกินจริง
Validation	train/holdout/rolling	look-ahead และ overfitting
Benchmark	equal weight, market, policy portfolio	ไม่รู้ว่า complexity เพิ่มคุณค่าหรือไม่
Stress tests	mean, vol, correlation, liquidity	ไม่เห็น fragility ของ solution
Versioning	data/model/parameter version	ทำซ้ำผลไม่ได้

7.19 Investment Lab: Efficient Frontier และ Robustness

Investment Lab: Excel: Closed-Form Efficient Frontier

สร้าง workbook อย่างน้อย 6 ชีต

1. **Prices** สำหรับ adjusted price data
2. **Returns** สำหรับ simple returns ที่จัดวันตรงกัน
3. **Inputs** สำหรับ $\hat{\mu}$, $\widehat{\Sigma}$ และ constraints
4. **ClosedForm** สำหรับ A, B, C, Δ, GMV และ target-return portfolios
5. **Frontier** สำหรับ target-return grid อย่างน้อย 30 จุด
6. **Checks** สำหรับ budget, target-return, variance และ weight diagnostics

วาดกราฟ σ–μ ทำเครื่องหมาย GMV และแยก efficient กับ inefficient branch จากนั้นเปรียบเทียบ unconstrained frontier กับ long-only frontier

Investment Lab: Python: Markowitz Solver Validation

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `frontier_constants(mu, cov)`
- `gmv_weights(cov)`
- `target_return_weights(mu, cov, target)`
- `frontier_variance(mu, cov, target)`
- `utility_optimal_weights(mu, cov, risk_aversion)`
- `long_only_minvar(mu, cov, target)`
- `weight_stability(base, perturbed)`
- `rolling_frontier_experiment(...)`

unit tests ควรตรวจ budget constraint, target-return constraint, GMV minimum property, closed-form versus numerical solver, two-fund identity และ KKT residuals โดยกำหนด numerical tolerance อย่างชัดเจน ไม่ควรตรวจ floating-point equality แบบตรงตัว

7.20 ข้อจำกัดและการตีความอย่างรับผิดชอบ

ตารางที่ 7.4: ข้อจำกัดสำคัญของ Mean–Variance Portfolio Selection

ประเด็น	ผลกระทบ	แนวทางลดปัญหา
Expected-return error	น้ำหนักไวและอาจสุดโต่ง	shrinkage, views, bounds, scenarios
Covariance instability	inverse matrix ขยาย noise	shrinkage, factor model, eigenvalue checks
Non-normal returns	variance ไม่ เห็น tail/ asymmetry ทั้งหมด	downside risk, ES, stress tests
Transaction costs	theoretical optimum อาจ turnover สูง	turnover/cost constraints
Liquidity	น้ำหนักที่คำนวณได้อาจซื้อขายไม่ได้	liquidity caps, market-impact model
Shortability	short weights อาจดำเนินการไม่ได้	borrow constraints, long-only model
Regime change	frontier จากอดีตเคลื่อนที่	rolling/regime/stress estimation
Model risk	in-sample efficiency ไม่เท่ากับ realized success	benchmark และ out-of-sample validation

บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนาการวิเคราะห์จากการคำนวณ risk–return ของพอร์ตไปสู่การเลือกพอร์ตที่มีประสิทธิภาพภายใต้กรอบ mean–variance

สำหรับ target return μ_0 และ covariance matrix ที่ positive definite คำตอบ unconstrained คือ

$$\mathbf{w}(\mu_0) = \Sigma^{-1}\left[\frac{C - B\mu_0}{\Delta}\mathbf{1} + \frac{A\mu_0 - B}{\Delta}\mu\right]$$

โดย

$$A = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}, \qquad B = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mu, \qquad C = \mu^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mu, \qquad \Delta = AC - B^2$$

GMV มีน้ำหนัก

$$\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{A}$$

พร้อม

$$\mu_{\text{GMV}} = \frac{B}{A}, \qquad \sigma^2_{\text{GMV}} = \frac{1}{A}$$

minimum-variance frontier มีสมการ

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta}\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2$$

และแขนที่อยู่เหนือ GMV คือ efficient frontier

two-fund theorem แสดงว่า frontier portfolio ใด ๆ สามารถสร้างจาก affine combination ของ frontier portfolios สองพอร์ตที่มี expected returns ต่างกัน

เมื่อเพิ่ม preference นักลงทุนสามารถเลือกพอร์ตด้วย mean–variance utility โดยสำหรับ risk-aversion coefficient $a > 0$ คำตอบมี $\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \Delta/(aA)$ และ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2A)$ ส่วนเมื่อเพิ่ม no-short, weight bounds, leverage หรือ turnover constraints ปัญหาจะเปลี่ยนเป็น constrained quadratic program และอาจเกิด corner portfolios

ข้อสรุปเชิงปฏิบัติที่สำคัญคือ efficient frontier ขึ้นกับ estimated inputs อย่างมาก การใช้งานจึงต้องตรวจ estimation risk, weight stability, constraints, transaction costs และ out-of-sample performance ไม่ใช่พิจารณาเฉพาะ in-sample frontier

บทถัดไปจะเพิ่ม risk-free asset และพัฒนาจาก Markowitz frontier ไปสู่ tangency portfolio, Capital Allocation Line, Capital Market Line และแบบจำลองการกำหนดราคาสินทรัพย์

คำศัพท์สำคัญ

- Feasible set
- Opportunity set
- Dominance
- Mean–variance efficiency
- Efficient portfolio
- Minimum-variance frontier
- Efficient frontier
- Global Minimum Variance Portfolio
- Lagrange multiplier
- Quadratic programming
- Positive definite matrix
- Frontier constants
- Two-fund theorem
- Mean–variance utility
- Risk aversion
- No short-selling
- KKT conditions
- Complementary slackness
- Active set
- Corner portfolio
- Weight stability
- Estimation error
- Shrinkage
- Resampling
- Out-of-sample validation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง feasible set, opportunity set, minimum-variance frontier และ efficient frontier
2. ให้พอร์ต P_1 มี $(\sigma, \mu) = (10\%, 8\%)$ และ P_2 มี $(9\%, 9\%)$ จงพิจารณา dominance
3. ตั้ง Lagrangian ของ target-return minimum-variance problem และหา first-order conditions
4. พิสูจน์สูตร closed-form ของ $\mathbf{w}(\mu_0)$
5. พิสูจน์ว่า $\Delta = AC - B^2 \geq 0$ ด้วย Cauchy–Schwarz inequality
6. อธิบายความหมายทางเศรษฐศาสตร์ของกรณี $\Delta = 0$
7. พิสูจน์สูตร GMV และ $\sigma^2_{\text{GMV}} = 1/A$
8. หา GMV ของพอร์ตสองสินทรัพย์จากการหาอนุพันธ์โดยตรง
9. พิสูจน์สมการ minimum-variance frontier

$$\sigma^2(\mu) = \frac{1}{A} + \frac{A}{\Delta}\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2$$

10. อธิบายเหตุผลที่แขนล่างของ minimum-variance frontier ไม่มีประสิทธิภาพ
11. ใช้ข้อมูลตัวอย่างสามสินทรัพย์ในบทคำนวณพอร์ตที่ target returns $8\%, 10\%, 12\%, 14\%$
12. ตรวจว่าพอร์ต target 14% ในตัวอย่างต้องมี short position หรือไม่

13. พิสูจน์ two-fund theorem สำหรับ risky frontier portfolios
14. แก้ mean–variance utility problem และพิสูจน์สูตร $\mathbf{w}_a$
15. แสดงว่า $\mu_a = \mu_{\text{GMV}} + \Delta/(aA)$ และ $\sigma_a^2 = 1/A + \Delta/(a^2 A)$ พร้อมพิสูจน์ว่าเมื่อ $a \to \infty$ จะมี $\mathbf{w}_a \to \mathbf{w}_{\text{GMV}}$
16. เขียน KKT conditions สำหรับ long-only target-return problem
17. อธิบาย complementary slackness ในความหมายของสินทรัพย์ที่มีน้ำหนักศูนย์
18. แสดงด้วยตัวอย่างว่าการตัด negative weights เป็นศูนย์แล้ว normalize ไม่จำเป็นต้องเป็น long-only optimum
19. พิสูจน์ว่าเมื่อ feasible set ถูกทำให้เล็กลง minimum variance ที่ target เดิมไม่สามารถลดลง
20. อธิบายด้วย eigendecomposition ว่าเหตุใด covariance matrix ที่ ill-conditioned ทำให้น้ำหนัก optimizer ไม่เสถียร
21. ออกแบบ sensitivity experiment โดย perturb expected return ของสินทรัพย์หนึ่งตัว ± 50 bp
22. เปรียบเทียบ sample covariance กับ shrinkage covariance ในแง่ frontier และ weight stability
23. ออกแบบ rolling out-of-sample experiment ที่ไม่มี look-ahead bias
24. อธิบายความแตกต่างระหว่าง in-sample efficient portfolio กับ realized best portfolio
25. อธิบายว่าเหตุใดการเพิ่ม risk-free asset ในบทถัดไปทำให้ปัญหา efficient portfolio เปลี่ยนจากเส้นโค้งไปสู่การหาเส้นสัมผัส

คำถามชวนคิด

1. พอร์ตที่อยู่บน efficient frontier จำเป็นต้องเป็นพอร์ตที่ดีสำหรับนักลงทุนทุกคนหรือไม่
2. เหตุใด expected-return estimation error จึงสร้างน้ำหนักสุดโต่งได้ง่าย
3. constraints ที่ทำให้ in-sample frontier แย่ลงอาจทำให้ผลจริงดีขึ้นได้อย่างไร
4. หาก covariance matrix มีความแม่นยำสูงแต่ expected returns แทบพยากรณ์ไม่ได้ ควรออกแบบพอร์ตอย่างไร
5. การใช้ historical efficient frontier เพื่อสื่อสารกับนักลงทุนควรมีคำเตือนหรือ uncertainty information แบบใด
6. Markowitz theory ควรถูกมองเป็น “คำตอบสุดท้าย” หรือเป็น mathematical benchmark สำหรับการพัฒนาระบบบริหารพอร์ตที่ซับซ้อนขึ้น

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 7

[28] C. Kesamoon and W. Witayakiattilerd. “Hierarchy Analysis Process under Fuzzy Environment: A Positive Way of Selecting Stocks into Portfolio under Ambiguity in Stock Information”. In: *Science & Technology Asia* 25.4 (2020), pp. 1–11. DOI: 10.14456/scitechasia.2019.24.

[30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

บทที่ 8 ทฤษฎี ตลาด ทุน และ แบบ จำลอง การ กำหนด ราคา สินทรัพย์

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

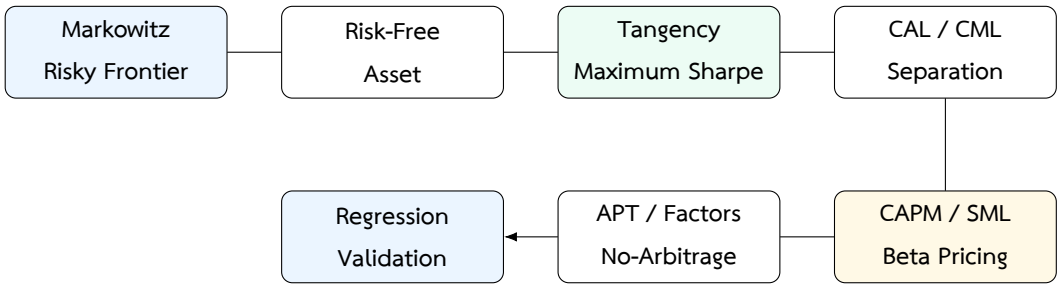
1. แยก ความ หมาย ของ market competition, market efficiency และ asset-pricing equilibrium ได้
2. สร้าง Capital Allocation Line จากสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและพอร์ตเสี่ยง
3. พิสูจน์สูตร tangency portfolio และ maximum Sharpe ratio
4. อธิบาย two-fund separation, market portfolio และ Capital Market Line ได้อย่างถูกต้อง
5. พิสูจน์ CAPM จากเงื่อนไข tangency ของ market portfolio และตีความ beta เป็น systematic-risk exposure
6. แยก Capital Market Line ออกจาก Security Market Line และอธิบายว่าเหตุใด CML ใช้ total risk แต่ SML ใช้ beta
7. ประมาณ beta และ Jensen's alpha ด้วย regression พร้อม ประเมิน uncertainty และ parameter stability
8. ใช้ CAPM เป็น required-return benchmark ในการประเมินมูลค่าโดยไม่ตีความ pricing gap เป็น arbitrage โดยอัตโนมัติ
9. อธิบาย APT และ multi-factor pricing ด้วย factor exposures และหลัก no-arbitrage
10. เปรียบเทียบ CAPM, market model, APT และ empirical factor models โดยแยกสมมติฐานและวัตถุประสงค์
11. ออกแบบ asset-pricing model validation แบบ out-of-sample ที่หลีกเลี่ยง look-ahead และ multiple-testing bias

8.1 บทนำ: จาก Portfolio Choice สู่ Asset Pricing

บทที่ 7 ศึกษาการเลือกพอร์ตจาก risky assets โดยใช้ expected-return vector μ และ covariance matrix Σ บทนี้เพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงที่ให้ผลตอบแทน R_f แล้วพัฒนาจากคำถามว่า “นักลงทุนควรเลือกพอร์ตใด” ไปสู่คำถามเชิงดุลยภาพว่า “เมื่อผู้ลงทุนจำนวนมากตัดสินใจพร้อมกัน ความเสี่ยงชนิดใดควรได้รับค่าชดเชยใน expected return”

ประเด็นสำคัญคือการแยกสามระดับของการวิเคราะห์ให้ชัดเจน ได้แก่ *opportunity set* ซึ่งบอกว่าพอร์ตใดสร้างได้ *portfolio choice* ซึ่งบอกว่านักลงทุนเลือกจุดใดตามความชอบต่อความเสี่ยง และ *equilibrium pricing* ซึ่งเชื่อมการตัดสินใจของนักลงทุนกับราคาสินทรัพย์ในตลาด หากสามระดับนี้ถูกสับสน จะเกิดความเข้าใจผิดได้ง่าย เช่น การนำ CML ไปใช้กับหลักทรัพย์รายตัว หรือการตีความ regression beta ว่าเป็นผลพิสูจน์ CAPM โดยตรง

Markowitz Frontier $\longrightarrow$ R_f $\longrightarrow$ Tangency Portfolio
$\longrightarrow$ CAL/CML $\longrightarrow$ CAPM/SML $\longrightarrow$ Factor Pricing



รูปที่ 8.1: แผนที่ของบทจาก portfolio choice ไปสู่ equilibrium asset pricing

ข้อสังเกต

CAPM เป็น benchmark model ที่เชื่อม expected return กับ systematic risk ภายใต้สมมติฐานเฉพาะ ไม่ใช่กฎที่รับประกัน realized return และไม่ใช่แบบจำลองเดียวที่ใช้วิเคราะห์ expected returns ได้

8.2 ข้อสมมติของทฤษฎีตลาดทุนและ Efficient Market Hypothesis

8.2.1 ข้อสมมติแบบคลาสสิกของ Capital Market Theory

เพื่อให้ได้ผลเชิงดุลยภาพแบบปิดรูป กรอบคลาสสิกมักสมมติว่า

1. นักลงทุนใช้ investment horizon เดียวกัน
2. การตัดสินใจอาศัย expected return และ variance
3. นักลงทุนมี homogeneous expectations เกี่ยวกับ μ และ Σ
4. สินทรัพย์แบ่งหน่วยได้และซื้อขายได้โดยไม่มี market frictions ที่มีนัยสำคัญ
5. ไม่มีภาษีและ transaction costs ในแบบจำลองพื้นฐาน
6. short-selling และการปรับน้ำหนักสามารถทำได้ตามสมมติฐาน
7. นักลงทุนสามารถให้กู้และกู้ยืมที่ R_f เดียวกัน
8. นักลงทุนแต่ละรายเป็น price taker

ประเด็นที่ต้องระวัง

ข้อสมมติเหล่านี้ใช้สร้าง theoretical benchmark การกู้และให้กู้ที่อัตราเดียวกัน unlimited leverage ไม่มีต้นทุนธุรกรรม และ homogeneous expectations ไม่ใช่คุณสมบัติที่ต้องเป็นจริงในตลาดจริง

ในเชิงกลไก homogeneous expectations ร่วมกับ risk-free rate เดียวกันทำให้นักลงทุนมองเห็น tangency portfolio เดียวกัน ขณะที่ market clearing ทำให้พอร์ตเสี่ยงที่ทุกคนต้องการถือโดยรวมตรงกับอุปทานของสินทรัพย์เสี่ยงในตลาด จึงเชื่อม “พอร์ตที่เหมาะสมที่สุด” เข้ากับ “market portfolio” ได้ หากผ่อนคลายสมมติฐานเรื่อง borrowing rate, constraints, taxes หรือข้อมูลที่นักลงทุนใช้ร่วมกัน ผลลัพธ์เชิงดุลยภาพอาจเปลี่ยนรูปและไม่จำเป็นต้องได้ CAPM แบบเส้นตรงในรูปพื้นฐาน

8.2.2 Efficient Market Hypothesis

กรอบของ Fama แบ่ง market efficiency ตาม information set ที่ราคาสะท้อน [19]

ตารางที่ 8.1: รูปแบบของ Efficient Market Hypothesis

รูปแบบ	**Information set**	**นัยเชิงการทดสอบ**
Weak form	ราคาและข้อมูลตลาดในอดีต	กลยุทธ์ จาก ข้อมูล ตลาด อดีต ไม่ ควร สร้าง abnormal performance อย่าง สม่ำเสมอ หลัง ต้นทุน หาก สมมติฐาน ถูก ต้อง
Semi-strong form	ข้อมูลสาธารณะทั้งหมด	public information ควร ถูก สะท้อน ใน ราคา อย่าง รวดเร็ว ตาม กรอบ สมมติฐาน
Strong form	ข้อมูลทั้งหมดในนิยามเชิงทฤษฎี	เป็น ข้อ เสนอ ที่ เข้ม ที่สุด และ ไม่ ควร ถูก สับสน กับ กฎระเบียบ เรื่อง ข้อมูล ภายใน

ข้อสังเกต

EMH กับ CAPM เป็นคนละข้อเสนอ EMH กล่าวถึงการสะท้อนข้อมูลในราคา ส่วน CAPM กล่าวถึงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระหว่าง expected return กับ systematic risk ความล้มเหลวของแบบจำลองหนึ่งจึงไม่ได้พิสูจน์อีกแบบจำลองหนึ่งโดยอัตโนมัติ

ในงานเชิงประจักษ์ยังมี *joint-hypothesis problem*: การบอกว่า return ใดเป็น “abnormal” ต้องอาศัยแบบจำลอง expected return เป็น benchmark ดังนั้นการพบ abnormal return อาจสะท้อน market inefficiency, แบบจำลอง benchmark ที่ไม่สมบูรณ์ หรือทั้งสองอย่าง การทดสอบประสิทธิภาพตลาดจึงไม่สามารถแยกออกจากสมมติฐานเกี่ยวกับแบบจำลองการกำหนดราคาที่ใช้วัด abnormal performance ได้อย่างสมบูรณ์

8.3 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ Capital Allocation Line

บทนิยาม 8.1

สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงในกรอบหนึ่งงวดคือสินทรัพย์ที่ terminal return ถูกกำหนดแน่นอนใน horizon และ currency เดียวกับที่ใช้วิเคราะห์พอร์ต ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(R_f) = 0, \qquad \mathrm{Cov}(R_f, R_i) = 0$$

สำหรับ risky asset i ทุกตัวในกรอบเดียวกัน คำว่า “risk-free” จึงเป็นแนวคิดที่ขึ้นกับ horizon และ currency ไม่ใช่คุณสมบัติสัมบูรณ์ของตราสารทุกสถานการณ์

ให้ P เป็น risky portfolio ที่มี $\mu_P = \mathbb{E}(R_P)$ และ $\sigma_P > 0$ และให้ y เป็นสัดส่วนใน P ส่วน $1-y$ อยู่ใน risk-free asset จะได้

$$R_C = (1-y)R_f + yR_P, \qquad \mu_C = R_f + y(\mu_P - R_f), \qquad \sigma_C = |y|\sigma_P$$

เมื่อ $0 \le y \le 1$ นักลงทุนแบ่งเงินระหว่าง risk-free asset กับ P เมื่อ $y > 1$ จะมี $1-y < 0$ ซึ่งแทน borrowing หรือ leverage ภายใต้สมมติฐานของแบบจำลอง ส่วน $y < 0$ หมายถึงการ short risky portfolio และถือ risk-free asset มากกว่า 100% ซึ่งไม่ใช่ส่วนของ upper efficient CAL ในกรณีปกติที่ $\mu_P > R_f$

สำหรับ $y \ge 0$ สามารถกำจัด y ออกจากสองสมการหลังและเขียนความสัมพันธ์ในระนาบ (σ, μ) ได้เป็นเส้นตรง

Capital Allocation Line

$$\boxed{\mu_C = R_f + \frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}\sigma_C}$$

ความชันของ CAL คือ

$$\frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}$$

ซึ่งเป็น ex ante Sharpe ratio ของ risky portfolio P ดังนั้นการหา efficient CAL จึงเท่ากับการหาพอร์ตเสี่ยงที่ให้ excess expected return ต่อหนึ่งหน่วย volatility สูงที่สุด เส้นที่ชันกว่าจะครอบงำเส้นที่ชันน้อยกว่าในเชิง mean–variance สำหรับระดับความเสี่ยงเดียวกัน

ตัวอย่าง 8.1. ให้ $R_f = 4\%$, $\mu_P = 12\%$ และ $\sigma_P = 16\%$ จะได้ Sharpe ratio เท่ากับ $(12\% - 4\%)/16\% = 0.50$ ถ้า $y = 0.60$

$$\mu_C = 4\% + 0.60(12\% - 4\%) = 8.8\%, \qquad \sigma_C = 0.60(16\%) = 9.6\%$$

ตัวอย่างนี้แสดงว่าเมื่อเลื่อนไปตาม CAL ทั้ง excess expected return และ volatility ถูกปรับด้วยสัดส่วน y เดียวกัน จึงทำให้ Sharpe ratio ของ complete portfolio คงเดิมตราบใดที่ใช้ risk-free rate เดียวกันและไม่มี frictions

8.4 Tangency Portfolio และ Maximum Sharpe Ratio

กำหนด excess-return vector

$$\mathbf{q} = \mu - R_f \mathbf{1}$$

สำหรับ risky portfolio $\mathbf{w}$ ที่มีความแปรปรวนเป็นบวก Sharpe ratio คือ

$$S(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{q}}{\sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}}$$

ทฤษฎีบท 8.1

สมมติ $\Sigma \succ 0$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ และ

$$h \equiv \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{q} > 0$$

แล้ว tangency portfolio ที่ normalize ให้ $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_T = 1$ คือ

$$\boxed{\mathbf{w}_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})}}$$

เงื่อนไข $h > 0$ ทำให้พอร์ตที่ normalize แล้วอยู่ในทิศทางของ maximum positive Sharpe ratio ภายใต้กรอบมาตรฐาน

พิสูจน์. พิจารณาเวกเตอร์ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ โดยยังไม่ normalize budget constraint เนื่องจาก Sharpe ratio ไม่เปลี่ยนเมื่อคูณ $\mathbf{x}$ ด้วยสเกลาร์บวก กำหนด

$$\mathbf{z} = \Sigma^{1/2}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{a} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{q}$$

แล้วจาก Cauchy–Schwarz

$$\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{q}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{z}^\top \mathbf{a}}{\|\mathbf{z}\|} \leq \|\mathbf{a}\|$$

equality เกิดเมื่อ $\mathbf{z} = c\mathbf{a}$ สำหรับ $c > 0$ ดังนั้น

$$\mathbf{x} \propto \Sigma^{-1}\mathbf{q}$$

และเมื่อ $h > 0$ สามารถ normalize ด้วย h เพื่อให้ $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_T = 1$ โดยไม่กลับทิศทางของ Sharpe ratio □

ทฤษฎีบท 8.2

ภายใต้เงื่อนไขข้างต้น maximum positive Sharpe ratio ของทิศทางพอร์ตเสี่ยงคือ

$$\boxed{S_T = \sqrt{(\mu - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1} (\mu - R_f \mathbf{1})}}$$

เพราะ $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{q}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{q}$

ข้อสังเกต

กรณี $\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{q} = 0$ ทิศทาง $\Sigma^{-1}\mathbf{q}$ ไม่สามารถ normalize ให้ผลรวมน้ำหนักเท่ากับ 1 ด้วยสูตรข้างต้น ส่วนกรณีที่ค่าดังกล่าวติดลบ การ normalize แบบเต็มเงินลงทุนจะกลับทิศทางและทำให้ Sharpe ratio ติดลบ จึงต้องตรวจเงื่อนไขก่อนใช้สูตรเชิงปิด ไม่ควรใช้สูตรโดยไม่ตรวจ denominator

ประเด็นที่ต้องระวัง

สูตรนี้เป็น unconstrained solution หากมี long-only, leverage, liquidity, turnover หรือ transaction-cost constraints ต้องแก้ constrained optimization ใหม่ ไม่ควรตัด negative weights แล้ว normalize โดยถือว่าเป็น maximum-Sharpe solution

8.5 Two-Fund Separation และการเลือก Complete Portfolio

เมื่อ tangency portfolio T ถูกกำหนดแล้ว complete portfolio เขียนได้เป็น

$$R_C = (1-y)R_f + yR_T, \qquad \mu_C = R_f + y(\mu_T - R_f), \qquad \sigma_C^2 = y^2\sigma_T^2$$

การเขียนด้วย variance ทำให้เห็นชัดว่า y สามารถเป็นจำนวนจริงภายใต้กรอบที่อนุญาตทั้ง borrowing และ short positions ส่วน $\sigma_C = |y|\sigma_T$ เป็นผลที่ตามมา

ทฤษฎีบท 8.3

ภายใต้สมมติฐาน frictionless borrowing/lending ที่ R_f เดียวกัน efficient complete portfolios สามารถสร้างจากสองกองทุน ได้แก่ risk-free asset และ tangency portfolio

ความแตกต่างด้าน risk preference ของนักลงทุนสะท้อนผ่าน y มากกว่าการเลือก risky portfolio คนละชุด

ถ้าใช้ mean–variance utility โดย $a > 0$

$$U = \mu_C - \frac{a}{2}\sigma_C^2$$

จะได้สำหรับ $y \in \mathbb{R}$

$$U(y) = R_f + y(\mu_T - R_f) - \frac{a}{2}y^2\sigma_T^2$$

เนื่องจาก $d^2U/dy^2 = -a\sigma_T^2 < 0$ เงื่อนไขอันดับหนึ่งจึงให้จุดสูงสุดเพียงจุดเดียว

Optimal Allocation to Tangency Portfolio

$$\boxed{y^* = \frac{\mu_T - R_f}{a\sigma_T^2}}$$

ดังนั้น risk aversion a มีผลต่อสัดส่วนระหว่าง risk-free asset กับ T แต่ภายใต้ separation theorem ไม่เปลี่ยนองค์ประกอบภายใน T หาก $0 < y^* < 1$ นักลงทุนทั้งให้กู้และถือพอร์ตเสี่ยง ถ้า $y^* > 1$ จะต้องกู้ที่ R_f ตามแบบจำลอง และถ้ามี borrowing/leverage constraints คำตอบจะถูกตัดด้วยข้อจำกัดและไม่จำเป็นต้องเท่ากับสูตรแบบไม่จำกัด

8.6 Market Portfolio และ Capital Market Line

ภายใต้ equilibrium assumptions ถ้านักลงทุนทุกคนมองเห็น risky tangency portfolio เดียวกัน การรวม demand ของนักลงทุนต้องสอดคล้องกับ aggregate supply ของ risky assets ใน market clearing ดังนั้นพอร์ตเสี่ยงที่ถือโดยรวมต้องมีองค์ประกอบตามมูลค่าตลาดของสินทรัพย์ที่มีอยู่ และจึงระบุ tangency portfolio กับ theoretical market portfolio M [48]

ถ้า V_i เป็นมูลค่าตลาดของ risky asset i

$$w_i^M = \frac{V_i}{\sum_{j=1}^{n} V_j}$$

ข้อสังเกต

Theoretical market portfolio ควรรวมสินทรัพย์เสี่ยงที่ลงทุนได้ทั้งหมดตามกรอบทฤษฎี ไม่ใช่เฉพาะหุ้นจดทะเบียน การใช้ดัชนีหุ้น เช่น SET, SET50 หรือดัชนีตลาดอื่น เป็น market proxy จึงทำให้เกิด

market-proxy problem และทำให้ beta กับ alpha ขึ้นกับ benchmark ที่เลือก ประเด็นนี้มีผลโดยตรงต่อการทดสอบ CAPM เพราะ “market portfolio ที่แท้จริง” ไม่สามารถสังเกตได้ครบถ้วน

เมื่อ $T = M$ เส้น CAL ที่มีความชันสูงสุดเรียกว่า Capital Market Line

Capital Market Line

$$\boxed{\mathbb{E}(R_C) = R_f + \frac{\mathbb{E}(R_M) - R_f}{\sigma_M}\sigma_C}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

CML ใช้กับ efficient complete portfolios ที่เป็นการผสม risk-free asset กับ market portfolio ไม่ใช่สมการ required return ของหลักทรัพย์รายตัวทุกตัว หลักทรัพย์รายตัวที่ไม่มีประสิทธิภาพอาจอยู่ใต้ CML ในระนาบ (σ, μ) ได้โดยไม่ขัดกับ CAPM เพราะ total volatility ของหลักทรัพย์มี idiosyncratic risk ที่ไม่ได้รับค่าชดเชยในดุลยภาพ

8.7 จาก Tangency Condition สู่ CAPM

เพราะ market portfolio เป็น tangency portfolio จึงมีสเกลาร์ $k > 0$ ที่ทำให้

$$\mathbf{w}_M = k\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu - R_f\mathbf{1} = \frac{1}{k}\Sigma\mathbf{w}_M$$

สมการนี้เป็นแกนของ CAPM เพราะด้านซ้ายคือ expected excess returns ส่วนด้านขวาคือ covariance ของสินทรัพย์กับพอร์ตตลาดคูณด้วยค่าคงที่ร่วมกัน

สมาชิกที่ i ของ $\Sigma\mathbf{w}_M$ คือ $(\Sigma\mathbf{w}_M)_i = \mathrm{Cov}(R_i, R_M)$ ดังนั้น

$$\mu_i - R_f = \lambda\,\mathrm{Cov}(R_i, R_M), \qquad \lambda \equiv \frac{1}{k}$$

สำหรับ market portfolio เอง

$$\mu_M - R_f = \lambda\sigma_M^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

กำหนด

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$$

จะได้

ทฤษฎีบท 8.4

ภายใต้ CAPM

$$\boxed{\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i \left[\mathbb{E}(R_M) - R_f\right]}$$

โดย

$$\boxed{\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \rho_{iM}\frac{\sigma_i}{\sigma_M}}$$

สมการนี้แสดงว่า expected-return premium ถูกกำหนดโดย covariance กับ market portfolio ไม่ใช่ total variance ของสินทรัพย์รายตัว โดย $\beta_M = 1$ และสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงมี $\beta_f = 0$ ในกรอบพื้นฐาน สำหรับพอร์ต P ที่มีน้ำหนัก w_i ยังได้

$$\beta_P = \frac{\mathrm{Cov}(R_P, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \sum_i w_i \beta_i$$

จึงทำให้ CAPM เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นที่ใช้ได้ทั้งกับหลักทรัพย์รายตัวและพอร์ตเมื่อเงื่อนไขของแบบจำลองถือ

8.8 Systematic Risk และ Idiosyncratic Risk

พิจารณา single-index representation โดยกำหนด excess returns

$$X_i \equiv R_i - R_f, \qquad X_M \equiv R_M - R_f$$

และเขียน

$$X_i = \alpha_i + \beta_i X_M + \varepsilon_i, \qquad \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, X_M) = 0$$

จะได้ variance decomposition

$$\mathrm{Var}(X_i) = \beta_i^2 \,\mathrm{Var}(X_M) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$$

ถ้า R_f เป็นค่าคงที่ในหนึ่งงวด จะมี $\text{Var}(X_i) = \text{Var}(R_i)$ และ $\text{Var}(X_M) = \sigma_M^2$ ดังนั้น $\beta_i^2\sigma_M^2$ เป็น market-related systematic variance ภายใน single-index representation ส่วน $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ เป็น residual หรือ idiosyncratic variance

การแยกนี้ช่วยอธิบายว่าทำไมหลักทรัพย์ที่มี volatility สูงไม่จำเป็นต้องมี expected return สูงตาม CAPM หาก volatility ส่วนใหญ่เกิดจาก residual risk ที่สามารถลดลงได้ด้วย diversification

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า systematic risk ขึ้นกับแบบจำลองที่ใช้ ใน CAPM หมายถึง market beta risk แต่ใน multi-factor model อาจมี systematic exposures หลายมิติ เช่น size, value, profitability หรือ macro factors

8.9 Capital Market Line กับ Security Market Line

ความแตกต่างระหว่าง CML และ SML เป็นจุดที่ต้องแยกอย่างเคร่งครัด

ตารางที่ 8.2: เปรียบเทียบ Capital Market Line และ Security Market Line

	CML	SML
แกนนอน	total risk σ	systematic exposure β
ใช้กับ	efficient complete portfolios	หลัก ทรัพย์ หรือ พอร์ต ใด ๆ ภาย ใต้ CAPM
จุดตัดแกน	R_f	R_f
ความชัน	$(\mu_M - R_f)/\sigma_M$	$\mu_M - R_f$
แกนความคิด	portfolio efficiency	equilibrium pricing of beta risk

ใน เชิง เรขาคณิต จุด market portfolio M เป็น จุด เชื่อม ของ สอง แนวคิด: บน CML จุด M มี พิกัด (σ_M, μ_M) และบน SML จุดเดียวกันมีพิกัด $(\beta_M = 1, \mu_M)$ แต่หลักทรัพย์รายตัวทั่วไปไม่จำเป็นต้องอยู่บน CML แม้ภายใต้ CAPM ขณะที่ expected return ของหลักทรัพย์ที่ correctly priced ต้องอยู่บน SML

Security Market Line คือ

Security Market Line

$$\boxed{\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i \left[\mathbb{E}(R_M) - R_f\right]}$$

ตัวอย่าง 8.2. ถ้า $R_f = 3\%$, $\mathbb{E}(R_M) = 9\%$ และ $\beta_i = 1.25$ จะได้ market risk premium เท่ากับ 6% และ CAPM required return คือ

$$3\% + 1.25(9\% - 3\%) = 10.5\%$$

ค่า 10.5% เป็น model-implied expected-return benchmark ไม่ใช่คำพยากรณ์ว่า realized return ในงวดถัดไปต้องเท่ากับ 10.5%

8.10 Market Model, Characteristic Line และการประมาณ Beta

สำหรับข้อมูลตามเวลา สามารถประมาณ regression

$$\boxed{R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha_i + \beta_i(R_{M,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{i,t}} \tag{8.1}$$

ภายใต้ OLS ที่มี intercept

$$\hat{\beta}_i = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(R_i - R_f, R_M - R_f)}{\widehat{\mathrm{Var}}(R_M - R_f)}$$

เมื่อ R_f เป็นค่าคงที่ใน sample สูตรนี้ลดรูปเป็น

$$\hat{\beta}_i = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(R_i, R_M)}{\widehat{\mathrm{Var}}(R_M)}$$

แต่หาก $R_{f,t}$ เปลี่ยนตามเวลา ไม่ควรสลับระหว่าง raw-return beta กับ excess-return beta โดยไม่ตรวจสอบ เพราะ covariance terms ที่เกี่ยวกับ $R_{f,t}$ อาจไม่หายไป

Beta เป็นค่าที่ไม่มีหน่วยและไม่ต้อง annualize แต่ $\hat{\alpha}$ มีหน่วยตามความถี่ของข้อมูล เช่น รายวันหรือรายเดือน การเปรียบเทียบ alpha ข้ามความถี่จึงต้องใช้วิธีแปลงหน่วยที่สอดคล้องกับนิยาม return

ขั้นตอนประมาณ Beta ที่ตรวจสอบซ้ำได้

1. กำหนด market proxy, risk-free proxy, horizon และ currency
2. ใช้ราคาที่ปรับ corporate actions และจัด trading dates ให้ตรงกัน
3. แปลง risk-free rate ให้เป็นหน่วยเวลาเดียวกับ asset returns
4. สร้าง asset และ market excess returns
5. ประมาณ $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, standard errors, confidence intervals และ R^2
6. ตรวจ residuals, influential observations, heteroskedasticity และ autocorrelation ตามความเหมาะสม
7. ตรวจ rolling beta และ structural breaks
8. ทดสอบความไวต่อ market proxy และ estimation window

ข้อสังเกต

Time-series regression ของหลักทรัพย์หนึ่งตัวช่วยตรวจว่า excess return เคลื่อนไหวร่วมกับ market proxy อย่างไร และ ช่วย ประมาณ α_i, β_i แต่ CAPM เป็น ข้อ เสนอ เชิง cross-sectional เกี่ยว กับ expected returns ของสินทรัพย์หลายตัว ดังนั้นการพบว่า regression ของสินทรัพย์หนึ่งตัวมี R^2 สูง หรือ β มีนัยสำคัญ ไม่ใช่การทดสอบ CAPM อย่างครบถ้วนด้วยตัวมันเอง

ประเด็นที่ต้องระวัง

การรายงานเพียง $\widehat{\beta}$ โดยไม่มี standard error, confidence interval, sample period และ market proxy ทำให้ผลประมาณตีความได้ไม่ครบถ้วน Beta เป็น estimated parameter ไม่ใช่ค่าคงที่ที่ทราบแน่นอน และ standard errors ควรสอดคล้องกับลักษณะ residual เช่น heteroskedasticity หรือ serial dependence เมื่อมีเหตุผลเชิงข้อมูลรองรับ

8.11 Jensen's Alpha และความหมายของ Regression Intercept

ใน regression (8.1) ค่า population intercept คือ

$$\alpha_i = \mathbb{E}(R_i - R_f) - \beta_i \mathbb{E}(R_M - R_f)$$

ในกรอบหนึ่งงวดที่ R_f เป็นค่าคงที่ สามารถเขียนเทียบกับ CAPM benchmark ได้เป็น

Jensen's Alpha

$$\boxed{\alpha_i = \mathbb{E}(R_i) - \{R_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - R_f]\}}$$

ภายใต้ CAPM ที่ถืออย่างสมบูรณ์ในประชากรและใช้ market portfolio ที่ถูกต้อง จะมี $\alpha_i = 0$ แต่ในข้อมูลจริง $\hat{\alpha}_i \neq 0$ อาจเกิดจาก sampling error, omitted factors, benchmark misspecification, changing beta, transaction costs หรือ genuine abnormal performance ดังนั้น alpha เป็นผลร่วมของ "performance" และ "model specification" ไม่ใช่มาตรวัด skill ที่บริสุทธิ์โดยอัตโนมัติ

ประเด็นที่ต้องระวัง

Positive estimated alpha ไม่เท่ากับหลักฐาน arbitrage และไม่ควรถูกสรุปว่าเป็น skill โดยไม่ตรวจ statistical significance, economic significance, multiple testing และ out-of-sample persistence

8.12 CAPM Required Return และการประเมินมูลค่า

CAPM สามารถใช้สร้าง required return ของส่วนผู้ถือหุ้น

$$k_e = R_f + \beta_e[\mathbb{E}(R_M) - R_f]$$

แล้วใช้เป็น discount rate ใน equity valuation โดยต้องให้ horizon, currency, nominal/real convention และความเสี่ยงของ cash flows สอดคล้องกัน ตัวอย่างเช่น constant-growth dividend model

$$P_0 = \frac{D_1}{k_e - g}, \qquad k_e > g$$

เงื่อนไข $k_e > g$ ไม่ใช่เพียงเงื่อนไขทางพีชคณิต แต่ทำให้ present value ของกระแสเงินปันผลที่เติบโตถาวรลู่เข้า และเมื่อ $k_e - g$ มีค่าน้อย มูลค่าจะไวต่อ estimation error ของทั้ง k_e และ g มาก

ประเด็นที่ต้องระวัง

ถ้า intrinsic value ที่ได้จาก valuation model ต่างจากราคาตลาด ความแตกต่างดังกล่าวไม่ใช่ arbitrage โดยอัตโนมัติ เพราะ valuation ขึ้นกับประมาณการ cash flows, growth, beta, market premium และ model assumptions และยังมีความเสี่ยงที่ราคาอาจไม่ converge ตามที่คาด

8.13 Arbitrage Pricing Theory และ Factor Pricing

CAPM ใช้ market factor เดียว APT เปิดทางให้ expected returns เชื่อมกับ systematic factors หลายตัวภายใต้หลัก no-arbitrage [42]

สมมติ factor model

$$R_i = a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} F_k + \varepsilon_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{R} = \mathsf{a} + B\mathsf{F} + \varepsilon$$

โดย B เป็น matrix ของ factor loadings และ b_{ik} วัด sensitivity ของสินทรัพย์ i ต่อ factor k ภายใต้ normalization ที่เลือก

ถ้า idiosyncratic components สามารถกระจายออกได้เพียงพอ มีสินทรัพย์จำนวนมาก และไม่มี arbitrage แล้ว expected returns ต้องสอดคล้องกับ factor exposures ในรูปเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขของ APT

Linear Factor Pricing Relation

$$\boxed{\mathbb{E}(R_i) = R_f + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} \lambda_k}$$

เมื่อ λ_k คือ factor risk premium หรือราคาค่าชดเชยต่อหนึ่งหน่วย factor exposure ของ factor k ภายใต้ normalization ที่กำหนด หาก factor เป็น traded excess-return portfolio บางการกำหนดอาจทำให้ λ_k เชื่อมโดยตรงกับ expected factor return แต่สำหรับ non-traded factors ไม่ควรตีความ λ_k ว่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ factor โดยอัตโนมัติ

8.13.1 แนวคิด No-Arbitrage ด้วย Factor-Neutral Portfolio

พิจารณาพอร์ต x ที่

$$\mathsf{1}^{\mathsf{T}}\mathsf{x} = 0$$

และ

$$B^{\mathsf{T}}\mathsf{x} = \mathsf{0}$$

กล่าวคือเป็น zero-net-investment portfolio และไม่มี factor exposure

ถ้า idiosyncratic risk ของพอร์ตลักษณะนี้ถูกกระจายจนมีขนาดเล็ก แต่

$$x^{\mathsf{T}}\mathbb{E}(R) \neq 0$$

จะเกิด pricing inconsistency ที่สามารถสร้างลำดับพอร์ตซึ่งมีความเสี่ยงลดลงแต่ยังคง expected payoff ไม่เป็นศูนย์ใน asymptotic APT argument ดังนั้น expected returns ต้องอยู่ใกล้ affine span ของ factor loadings ภายใต้เงื่อนไขของทฤษฎี

ประเด็นที่ต้องระวัง

APT เป็นผล no-arbitrage เชิง asymptotic ภายใต้เงื่อนไขเกี่ยวกับจำนวนสินทรัพย์และการกระจาย idiosyncratic risk การที่พอร์ต finite-sample มี factor exposure ใกล้ศูนย์และมีค่าเฉลี่ยผลตอบแทนไม่เป็นศูนย์จึงยังไม่เพียงพอที่จะประกาศว่าเป็น “riskless arbitrage” โดยไม่ตรวจ residual risk, estimation error และ trading frictions

ข้อสังเกต

APT ไม่ได้ระบุโดยตัวทฤษฎีเองว่า factors ต้องเป็นตัวใด การเลือก factors จึงเป็นทั้ง economic-modeling problem และ empirical-validation problem

8.14 CAPM, Market Model, APT และ Empirical Factor Models

ตารางที่ 8.3: เปรียบเทียบแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับผลตอบแทนและปัจจัยเสี่ยง

แบบจำลอง	แกนหลัก	สิ่งที่อธิบาย	ข้อควรระวัง
CAPM	market beta	equilibrium expected return	strong assumptions และ market-proxy problem
Market model	statistical market regression	return co-movement	ไม่ใช่ equilibrium pricing model โดยตัวมันเอง
APT	multiple systematic factors + no-arbitrage	linear expected-return relation	factor identification ไม่ได้กำหนดตายตัว
Empirical factor model	observed factor portfolios/signals	cross-sectional/ time-series return structure	data mining, factor proliferation, instability

งาน empirical asset pricing มักใช้ factor models ที่ขยายจาก market factor เช่น Fama–French three-factor model [20] แบบจำลองเชิงประจักษ์ลักษณะนี้อาจใช้เพื่ออธิบายหรือวัด exposures ของผลตอบแทน แต่ไม่ควรถูกเรียกว่า APT โดยอัตโนมัติเพียงเพราะมีหลาย factors เพราะ APT เป็นทฤษฎี pricing จาก no-arbitrage ขณะที่ empirical factor regression เป็น specification ที่ต้องได้รับการตรวจสอบด้วยข้อมูล

ตัวอย่าง representation คือ

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha_i + \beta_{iM} MKT_t + \beta_{iS} SMB_t + \beta_{iH} HML_t + \varepsilon_{i,t}$$

โดยทั่วไป MKT_t แทน market excess return ส่วน SMB_t และ HML_t เป็น factor returns ที่สร้างจากพอร์ตตามนิยามของแบบจำลอง

ประเด็นที่ต้องระวัง

การเพิ่ม factors แล้ว R^2 สูงขึ้นไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าแบบจำลองดีกว่า ต้องตรวจ economic rationale, parameter uncertainty, factor correlation, multiple testing และ out-of-sample performance นอกจากนี้ factor ที่มีนัยสำคัญเชิง time series ไม่ได้แปลว่าจะมี risk premium เชิง cross section ที่เสถียรเสมอไป

8.15 กรณีศึกษางานวิจัย: Beta และ Correlation ในหลักทรัพย์ SET50

งานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะใช้ข้อมูลหลักทรัพย์ในกลุ่ม SET50 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง beta, correlation และการสร้างกลยุทธ์พอร์ต [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Beta เป็น Sensitivity Estimate ไม่ใช่ Ranking Score

บทเรียนเชิงวิธีวิทยาที่สำคัญคือ beta ต้องถูกอ่านเป็น sensitivity ต่อ market proxy ภายใน sample และ specification ที่กำหนด

$$\text{aligned returns} \longrightarrow \text{market proxy} \longrightarrow \hat{\beta}$$
$$\longrightarrow \text{stability diagnostics} \longrightarrow \text{portfolio use}$$

ค่าประมาณจาก historical sample ไม่ใช่ beta ปัจจุบันโดยอัตโนมัติ และ beta สูงหรือต่ำไม่ใช่การจัดอันดับว่าหลักทรัพย์ดีหรือไม่ดี ในการนำไปสร้างพอร์ต beta จึงควรถูกใช้ร่วมกับ correlation/covariance structure, estimation window และวัตถุประสงค์ของพอร์ต ไม่ควรใช้เป็น ranking score เพียงมิติเดียว

8.16 Model Validation สำหรับ Asset Pricing

แบบจำลอง asset pricing ควรถูกประเมินมากกว่าการดู coefficient และ R^2 โดยต้องเริ่มจากคำถามก่อนว่าใช้โมเดลเพื่อ pricing, performance attribution, risk exposure หรือ prediction เพราะเกณฑ์การประเมินแต่ละวัตถุประสงค์ไม่เหมือนกัน

ตารางที่ 8.4: Asset-Pricing Model Validation Checklist

องค์ประกอบ	คำถามตรวจสอบ	ความเสี่ยงหากละเลย
Question	ต้องการ required return, attribution หรือ prediction	ใช้โมเดลผิดวัตถุประสงค์
Market proxy	proxy แทน theoretical market ได้เพียงใด	beta/alpha เปลี่ยนตาม benchmark
Risk-free rate	tenor, frequency, currency ตรงหรือไม่	excess return ผิดหน่วย
Return data	total/price return และ corporate actions	coefficient biased จากข้อมูลผิด
Window	sample period และ frequency	parameter instability
Inference	SE, CI, robust errors ตามความเหมาะสม	มั่นใจใน coefficient มากเกินไป
Breaks	regime หรือ structural change	full-sample beta ปิดบัง dynamics
Factors	economic rationale และ redundancy	factor proliferation
Multiple tests	จำนวน hypotheses ที่ลอง	false discoveries
Out-of-sample	ผลยังคงอยู่หลัง estimation period หรือไม่	in-sample overfit
Economic significance	หลัง costs ยังมีความหมายหรือไม่	statistical significance ที่ใช้จริงไม่ได้

Validation Loop

กระบวนการที่ตรวจสอบซ้ำได้ควรเป็น

$$\text{Question} \longrightarrow \text{Proxy/Factors} \longrightarrow \text{Estimate} \longrightarrow \text{Diagnostics} \longrightarrow \text{Sensitivity} \longrightarrow \text{Out-of-Sample} \longrightarrow \text{Decision/Revision}$$

พร้อมบันทึก data lineage, transformations, parameter choices และ model version และต้องแยกให้ชัดระหว่าง *time-series fit* ซึ่งตรวจ exposures/alpha กับ *cross-sectional pricing* ซึ่งตรวจว่าความแตกต่างของ expected returns ระหว่างสินทรัพย์สัมพันธ์กับ priced exposures ตามทฤษฎีหรือ

ไม่

8.17 Investment Lab: CAPM และ Factor Model

Investment Lab: Excel: Beta, SML และ Rolling Stability

เลือกหลักทรัพย์อย่างน้อย 5 รายการ พร้อม market proxy และ risk-free series แล้วสร้าง

1. adjusted-return matrix ที่จัดวันตรงกัน
2. asset และ market excess returns
3. beta จาก covariance/variance
4. beta และ alpha จาก regression
5. standard error และ R^2
6. CAPM required return
7. Security Market Line
8. rolling beta อย่างน้อย 3 window lengths
9. sensitivity ต่อ market proxy

อธิบายความแตกต่างระหว่าง realized average return, CAPM required return และ regression alpha โดยไม่ใช้คำว่า arbitrage เว้นแต่พิสูจน์เงื่อนไข arbitrage ได้จริง

Investment Lab: Python: Asset-Pricing Validation

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `tangency_weights(mu, cov, rf)`
- `capm_required_return(beta, rf, market_premium)`
- `estimate_capm(asset, market, rf)`
- `rolling_beta(asset, market, rf, window)`
- `factor_regression(excess, factors)`
- `parameter_stability(...)`
- `out_of_sample_pricing_test(...)`

unit tests ควรตรวจ tangency normalization, maximum-Sharpe direction, beta covariance identity, CAPM pricing identity ใน simulated equilibrium data และ consistency ของ periodic

units

8.18 ข้อจำกัดของ CAPM และ Factor Models

1. theoretical market portfolio ไม่สามารถสังเกตได้โดยสมบูรณ์
2. beta เป็นค่าประมาณและอาจเปลี่ยนตามเวลา
3. expected market premium ไม่ได้ทราบแน่นอน
4. borrowing rate และ lending rate ในโลกจริงอาจต่างกัน
5. taxes, transaction costs, liquidity และ leverage constraints เปลี่ยน feasible set
6. returns อาจมี nonlinear dependence, asymmetry และ tail risk
7. empirical factors อาจเกิดจาก risk compensation, behavioral effects หรือ data mining
8. statistical fit ไม่รับประกัน economic validity

ข้อจำกัดเหล่านี้ทำให้ asset-pricing model ควรถูกใช้เป็น benchmark และ diagnostic framework พร้อม uncertainty analysis มากกว่าถูกใช้เป็นสูตรพยากรณ์แบบกำหนดแน่นอน โดยเฉพาะ CAPM ซึ่งเป็น equilibrium statement เกี่ยวกับ expected returns ไม่ใช่ short-horizon forecasting equation ของ realized returns

8.19 สะพานสู่ Portfolio Optimization

บทนี้ให้โครงสร้างเชิงทฤษฎีของ tangency portfolio

$$\mathbf{w}_T \propto \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})$$

แต่การลงทุนจริงต้องเผชิญ constraints และ costs เช่น

$$\mathbf{w}_i \geq 0, \qquad \ell_i \leq w_i \leq u_i, \qquad \sum_i |w_i - w_i^{\text{old}}| \leq \tau$$

รวมถึง transaction costs, liquidity limits และ estimation uncertainty ซึ่งทำให้ closed-form tangency solution เป็นจุดอ้างอิงมากกว่าคำตอบที่นำไปซื้อขายได้ทันที

บทที่ 9 จึงเปลี่ยน maximum-Sharpe และ risk-based portfolio construction ให้เป็น numerical optimization problems ที่สามารถรองรับข้อจำกัดจริง

บทสรุปท้ายบท

การเพิ่ม risk-free asset เปลี่ยน Markowitz problem จากการเลือกจุดบน risky efficient frontier ไปสู่การเลือก risky portfolio ที่สร้าง CAL ชันที่สุด

สำหรับ risky portfolio P

$$\mu_C = R_f + \frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}\sigma_C$$

และ tangency portfolio คือ

$$\mathbf{w}_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1})}$$

ภายใต้ equilibrium assumptions tangency portfolio ตรงกับ market portfolio และได้ CML

$$\mathbb{E}(R_C) = R_f + \frac{\mathbb{E}(R_M) - R_f}{\sigma_M}\sigma_C$$

CAPM เปลี่ยนจาก total-risk relation ของ efficient portfolios ไปสู่ beta-pricing relation สำหรับหลักทรัพย์และพอร์ต

$$\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i[\mathbb{E}(R_M) - R_f]$$

โดย

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$$

CML จึงใช้ σ ขณะที่ SML ใช้ β และทั้งสองเส้นไม่ควรถูกใช้แทนกัน

Regression ของ excess returns ช่วยประมาณ beta และ Jensen's alpha แต่ coefficient ต้องรายงานพร้อม uncertainty, sample period, market proxy และ stability diagnostics และต้องไม่สับสนระหว่าง time-series market model กับข้อเสนอเชิง cross-sectional ของ CAPM

APT และ factor models ขยาย systematic-risk representation จาก market factor เดียวไปสู่

หลาย factors แต่การเพิ่ม factors ต้องมี economic rationale และผ่าน out-of-sample validation โดย no-arbitrage relation ของ APT ไม่เท่ากับการรับรองว่า empirical factor ใด ๆ เป็น priced factor โดยอัตโนมัติ

สาระสำคัญของบทนี้จึงไม่ใช่เพียงการจำสูตร CAPM แต่คือการเข้าใจลำดับ

$$\text{portfolio geometry} \longrightarrow \text{equilibrium} \longrightarrow \text{risk pricing}$$
$$\longrightarrow \text{empirical estimation} \longrightarrow \text{model validation}$$

คำศัพท์สำคัญ

- Risk-free asset
- Capital Allocation Line
- Tangency portfolio
- Maximum Sharpe ratio
- Two-fund separation
- Market portfolio
- Capital Market Line
- Capital Asset Pricing Model
- Security Market Line
- Market risk premium
- Beta
- Systematic risk
- Idiosyncratic risk
- Market model
- Characteristic line
- Jensen's alpha
- Required return
- Arbitrage Pricing Theory
- Factor loading
- Factor risk premium
- Market-proxy problem
- Rolling beta
- Structural break
- Model validation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง market efficiency กับ CAPM equilibrium
2. ให้ $R_f = 3\%, \mu_P = 11\%, \sigma_P = 15\%$ จงเขียนสมการ CAL และหา Sharpe ratio
3. ถ้า $y = 0.75$ ในข้อก่อน จงหา μ_C และ σ_C
4. ถ้า $y = 1.30$ จงตีความน้ำหนักของ risk-free asset
5. พิสูจน์ tangency-portfolio formula ด้วย Cauchy–Schwarz inequality

6. พิสูจน์สูตร maximum Sharpe ratio
7. อธิบายเหตุผลที่ tangency formula แบบ unconstrained ใช้กับ long-only problem โดยตรงไม่ได้
8. ใช้ mean–variance utility พิสูจน์ว่า $y^* = (\mu_T - R_f)/(a\sigma_T^2)$
9. อธิบาย two-fund separation และระบุสมมติฐานสำคัญที่ทำให้ผลนี้เกิดขึ้น
10. อธิบาย market-proxy problem และผลต่อ estimated beta
11. พิสูจน์ CAPM จาก tangency condition ของ market portfolio
12. แสดงว่า $\beta_i = \rho_{iM}\sigma_i/\sigma_M$
13. หลักทรัพย์มี $\beta = 1.20$, $R_f = 2.5\%$ และ expected market return 8.5% จงหา CAPM required return
14. เปรียบเทียบ CML กับ SML ในด้านแกนนอนและขอบเขตของพอร์ตที่ใช้ได้
15. พิสูจน์ variance decomposition ใน single-index model ภายใต้ $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, R_M) = 0$
16. อธิบายว่าทำไม beta ไม่ใช่มาตรวัด total risk
17. เขียน CAPM excess-return regression และอธิบายความหมายของ α, β และ ε
18. อธิบายว่าทำไม $\hat{\alpha} > 0$ ไม่ได้พิสูจน์ arbitrage
19. ออกแบบ rolling-beta experiment โดยไม่ใช้ข้อมูลอนาคต
20. อธิบายผลของการเปลี่ยน market proxy ต่อ beta และ alpha
21. ใช้ CAPM หา k_e แล้วเขียน constant-growth dividend valuation formula พร้อมระบุเงื่อนไข
22. อธิบายความแตกต่างระหว่าง CAPM กับ market model
23. เขียน multi-factor return model ในรูปเวกเตอร์–เมทริกซ์
24. อธิบาย intuition ของ APT ผ่าน zero-investment factor-neutral portfolio
25. เปรียบเทียบ CAPM, APT และ empirical factor models
26. อธิบายว่าทำไมการเพิ่ม factors เพื่อเพิ่ม R^2 อย่างเดียวอาจนำไปสู่ overfitting
27. ออกแบบ asset-pricing validation pipeline ที่มี estimation, diagnostics, sensitivity และ out-of-sample stages
28. อธิบาย joint-hypothesis problem ในการทดสอบ market efficiency และยกตัวอย่างว่าความผิดพลาดของ expected-return benchmark ทำให้ตีความ abnormal return ผิดได้อย่างไร
29. สมมติว่า $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mu - R_f\mathbf{1}) \leq 0$ จงอธิบายว่าเหตุใดต้องตรวจเงื่อนไขก่อนใช้สูตร tangency portfolio แบบ normalize เต็มเงินลงทุน

คำถามชวนคิด

1. ถ้าไม่มีสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงจริงใน horizon ที่ศึกษา ควรตีความ R_f อย่างไร
2. หาก borrowing rate สูงกว่า lending rate อย่างมาก two-fund separation จะเปลี่ยนไปอย่างไร
3. หาก theoretical market portfolio สังเกตไม่ได้ เราสามารถทดสอบ CAPM อย่างเด็ดขาดได้หรือไม่
4. Positive alpha ที่คงอยู่หลายปีอาจเกิดจาก skill, omitted factor หรือ benchmark error ได้อย่างไร
5. Factor premium ที่เคยเป็นบวกในอดีตควรถูกถือว่าเป็น expected premium ในอนาคตหรือไม่
6. CAPM มีคุณค่าอย่างไรแม้ empirical evidence จะไม่สนับสนุนสมมติฐานทุกข้ออย่างสมบูรณ์
7. หากหลักทรัพย์รายตัวมี volatility สูงแต่ beta ต่ำ เหตุใดหลักทรัพย์นั้นอาจอยู่ต่ำกว่า CML แต่ยังสอดคล้องกับ SML ภายใต้ CAPM ได้

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 8

[19] Eugene F. Fama. “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work”. In: *The Journal of Finance* 25.2 (1970), pp. 383–417. DOI: 10.2307/2325486.

[20] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds”. In: *Journal of Financial Economics* 33.1 (1993), pp. 3–56.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[42] Stephen A. Ross. “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”. In: *Journal of Economic Theory* 13.3 (1976), pp. 341–360.

[48] William F. Sharpe. “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”. In: *The Journal of Finance* 19.3 (1964), pp. 425–442.

[68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

Part IV

การสร้างและบริหารพอร์ตจริง

บทที่ 9 การหาพอร์ตการลงทุนที่เหมาะสมที่สุด

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. แปลงปัญหาการลงทุนให้อยู่ในรูป decision variables, objective function, constraints และ data inputs
2. จำแนก convex optimization, quadratic programming และปัญหาที่ไม่เป็น convex ซึ่งพบบ่อยในการบริหารพอร์ต
3. สร้าง Minimum-Variance และ Target-Return Portfolio ภายใต้ข้อจำกัดจริง
4. ใช้เงื่อนไข Karush–Kuhn–Tucker เพื่ออธิบาย optimality และ shadow prices
5. สร้าง Maximum-Sharpe Portfolio ภาย ใต้ ข้อ จำกัด โดย ไม่ ใช้ สูตร tangency แบบ unconstrained อย่างผิดเงื่อนไข
6. อธิบาย Maximum Diversification, Marginal Risk Contribution, Component Risk Contribution และ Risk Parity
7. ใส่ข้อจำกัดด้านน้ำหนัก กลุ่มอุตสาหกรรม leverage turnover liquidity และ transaction costs ลงใน optimizer
8. วิเคราะห์ estimation risk, covariance shrinkage, conditioning และความไม่เสถียรของน้ำหนัก
9. อธิบายหลักของ Black–Litterman และ robust optimization ในฐานะเครื่องมือจัดการ input uncertainty
10. ตรวจ feasibility, solver status, KKT residuals และ numerical tolerances ก่อนนำคำตอบไปใช้
11. ออกแบบ rolling out-of-sample experiment ที่เปรียบเทียบ optimizer กับ benchmark อย่างเป็นธรรม

9.1 บทนำ: จากทฤษฎีพอร์ตสู่การตัดสินใจเชิงคำนวณ

บทที่ 6 สร้างคณิตศาสตร์ของผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต บทที่ 7 พัฒนา minimum-variance frontier และ efficient frontier ส่วนบทที่ 8 เพิ่มสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ tangency portfolio

บทนี้เปลี่ยนจากคำถามว่า “พอร์ตที่มีประสิทธิภาพมีสมบัติอย่างไร” ไปสู่คำถามว่า “เมื่อมีข้อจำกัดจริง เราจะคำนวณน้ำหนักที่นำไปใช้ได้อย่างไร”

ให้สัญลักษณ์พื้นฐานของปัญหาเป็น

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\mathsf{T}, \qquad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\mathsf{T}, \qquad \Sigma = \mathrm{Cov}(\mathbf{R})$$

จึงมีผลตอบแทนคาดหมายและความแปรปรวนของพอร์ต

$$\mu_p = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mu, \qquad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}$$

ในทางปฏิบัติ การหาค่า $\mathbf{w}^*$ ไม่ใช่เพียงการส่ง $\hat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ เข้า solver แต่เป็นกระบวนการตัดสินใจที่เชื่อมข้อมูล การประมาณค่า วัตถุประสงค์ ข้อจำกัด ต้นทุน และการตรวจสอบนอกตัวอย่างเข้าด้วยกัน ความผิดพลาดจึงเกิดได้อย่างน้อยสามระดับ ได้แก่ *input risk* จากค่าประมาณที่คลาดเคลื่อน *model risk* จาก objective หรือ constraints ที่ไม่ตรงกับงานจริง และ *implementation risk* จากต้นทุน สภาพคล่อง และข้อจำกัดในการส่งคำสั่งซื้อขาย

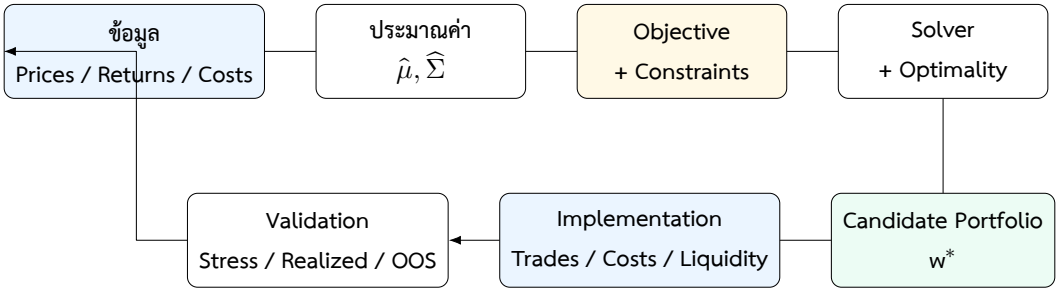
ทุกพจน์ใน objective ต้องใช้หน่วยและช่วงเวลาเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ถ้า μ เป็นผลตอบแทนคาดหมายรายปี Σ ก็ควรเป็น covariance รายปี และ transaction-cost term ที่นำมาหักต้องถูกแปลงให้อยู่ในหน่วยผลตอบแทนที่สอดคล้องกัน

บทนิยาม 9.1

ปัญหาการหาพอร์ตที่เหมาะสมที่สุดคือการเลือกเวกเตอร์น้ำหนัก $\mathbf{w}$ เพื่อทำให้ objective function ดีที่สุดภายใต้ feasible set $\mathcal{F}$

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}} f(\mathbf{w}) \qquad \text{หรือ} \qquad \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}} g(\mathbf{w})$$

คำว่า “เหมาะสมที่สุด” จึงมีความหมายเฉพาะเมื่อ objective, inputs และ constraints ถูกระบุอย่างครบถ้วน



รูปที่ 9.1: วงจร Portfolio Optimization ตั้งแต่ข้อมูล การประมาณค่า การสร้างพอร์ต การนำไปใช้ และการตรวจสอบนอกตัวอย่าง

ประเด็นที่ต้องระวัง

Solver สามารถหาคำตอบของปัญหาที่กำหนดได้อย่างแม่นยำ แต่ไม่สามารถแก้ปัญหา input ที่ไม่เหมาะสม objective ที่ไม่ตรงกับเป้าหมาย หรือ constraints ที่ไม่สะท้อนการซื้อขายจริงได้

9.2 โครงสร้างของ Portfolio Optimization Problem

ปัญหาหนึ่งควรถูกแยกเป็นสี่องค์ประกอบ

1. **Decision variables** เช่น น้ำหนัก w_i หรือ trade vector $\Delta \mathbf{w}$
2. **Objective function** เช่น variance, utility, tracking error, transaction cost หรือ risk concentration
3. **Constraints** เช่น budget, long-only, position limits, sector limits, leverage, turnover และ liquidity
4. **Inputs** เช่น $\hat{\mu}$, $\widehat{\Sigma}$, benchmark weights, current holdings และ cost estimates

9.2.1 Convexity และเหตุใดจึงสำคัญ

บทนิยาม 9.2

เซต $\mathcal{F}$ เป็น convex set ถ้าสำหรับ $\mathsf{w}^{(1)}, \mathsf{w}^{(2)} \in \mathcal{F}$ และ $\theta \in [0,1]$

$$\theta \mathsf{w}^{(1)} + (1-\theta)\mathsf{w}^{(2)} \in \mathcal{F}$$

ฟังก์ชัน f เป็น convex ถ้า

$$f\big(\theta \mathsf{w}^{(1)} + (1-\theta)\mathsf{w}^{(2)}\big) \leq \theta f(\mathsf{w}^{(1)}) + (1-\theta) f(\mathsf{w}^{(2)})$$

ถ้า objective เป็น convex และ feasible set เป็น convex จุดต่ำสุดเฉพาะที่ใด ๆ ที่มีอยู่จะเป็นจุดต่ำสุดทั่วทั้งเซต นี่คือเหตุผลสำคัญที่ปัญหา minimum variance พร้อมข้อจำกัดเชิงเส้นได้รับความนิยม เพราะสามารถตรวจ optimality ได้อย่างเป็นระบบและไม่ต้องกังวลกับ local minima หลายจุดแบบปัญหา non-convex

ทฤษฎีบท 9.1

ถ้า $\Sigma \succeq 0$ แล้ว

$$f(\mathsf{w}) = \mathsf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathsf{w}$$

เป็น convex function

พิสูจน์. เพราะ Σ symmetric

$$\nabla f(\mathsf{w}) = 2\Sigma \mathsf{w}$$

และ

$$\nabla^2 f(\mathsf{w}) = 2\Sigma$$

เมื่อ $\Sigma \succeq 0$ Hessian เป็น positive semidefinite จึงได้ว่า f เป็น convex □

ถ้า $\Sigma \succ 0$ ฟังก์ชันเป็น strictly convex ดังนั้นถ้า optimum มีอยู่บน convex feasible set คำตอบจะมี

เอกลักษณ์ สำหรับ long-only fully invested portfolio feasible set เป็น simplex ที่ปิดและมีขอบเขต จึงรับประกันการมี minimum เมื่อ objective ต่อเนื่อง ส่วนปัญหาที่มี leverage หรือ short selling แบบไม่มีขอบเขต ต้องตรวจ existence และ boundedness แยกต่างหาก

9.3 Minimum-Variance Portfolio ภายใต้ข้อจำกัด

ปัญหา long-only minimum variance คือ

Long-Only Minimum Variance

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ตัวคูณ $1/2$ ไม่เปลี่ยนคำตอบ แต่ทำให้ gradient เท่ากับ $\Sigma\mathbf{w}$

ถ้าไม่มี long-only constraint และ $\Sigma \succ 0$ จะกลับไปสู่คำตอบ GMV ในบทที่ 7

$$\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$$

แต่เมื่อมี inequalities สูตรปิดรูปนี้อาจไม่ใช่ feasible solution หากน้ำหนักบางตัวติดลบหรือเกิน position limits ต้องแก้ constrained problem ใหม่ จุดสำคัญคือ “ข้อจำกัด” ไม่ได้เป็นขั้นตอนแก้ไขน้ำหนักหลัง optimization แต่เป็นส่วนหนึ่งของนิยามปัญหาตั้งแต่ต้น การตัดน้ำหนักติดลบให้เป็นศูนย์แล้ว normalize ใหม่โดยไม่ re-optimize โดยทั่วไปไม่ให้คำตอบ minimum variance ภายใต้ข้อจำกัดใหม่

9.4 KKT Conditions และความหมายของ Active Constraints

สำหรับ long-only minimum variance กำหนด Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} - 1) - \boldsymbol{\nu}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}$$

โดย

$$\nu \geq 0$$

เงื่อนไข KKT คือ

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} - \nu = 0, \qquad & \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \\ \mathbf{w} \geq 0, \qquad \nu \geq 0, \qquad & \nu_i w_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

โดยสมการแรกคือ stationarity สมการที่สองคือ primal feasibility เงื่อนไข $\nu \geq 0$ คือ dual feasibility และ $\nu_i w_i = 0$ คือ complementary slackness

บทนิยาม 9.3

ถ้า $w_i > 0$ complementary slackness บังคับให้

$$\nu_i = 0$$

ถ้า $w_i = 0$ constraint ของสินทรัพย์นั้นอาจ active และ ν_i สามารถเป็นบวกได้
การเปลี่ยน active set เมื่อ parameters หรือ target return เปลี่ยนเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ constrained frontier มี corner portfolios

ตัวคูณ Lagrange และ KKT multipliers ยังมีความหมายเชิงเศรษฐศาสตร์ในฐานะ *shadow prices* กล่าวคือ บอกการเปลี่ยนแปลงของค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยประมาณเมื่อผ่อนหรือทำให้ constraint เข้มขึ้นเล็กน้อย อย่างไรก็ดี เครื่องหมายของ shadow price ขึ้นกับรูปที่ใช้เขียน constraint และการตีความเชิงอนุพันธ์ใช้ได้ภายในช่วงที่ active set ไม่เปลี่ยน

ข้อสังเกต

ภายใต้ convexity และ constraint qualification ที่เหมาะสม KKT conditions เป็นเงื่อนไขที่ใช้ระบุ global optimum ได้ ไม่ใช่เพียงเงื่อนไขอันดับหนึ่งของ local optimum

9.5 Target-Return Portfolio และ Constrained Efficient Frontier

ให้ target return เท่ากับ μ_0

Target-Return Minimum Variance

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1 \\ & \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \geq \mu_0 \\ & \ell_i \leq w_i \leq u_i \end{aligned}$$

รูปแบบ $\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \geq \mu_0$ ควรตีความว่าเป็น *minimum required return* ถ้า μ_0 สูงกว่าผลตอบแทนของ constrained GMV portfolio และปัญหาเป็น convex ตามเงื่อนไขมาตรฐาน ข้อจำกัดผลตอบแทนจะ bind ที่คำตอบ จึงได้ $\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = \mu_0$ แต่ถ้า μ_0 ต่ำกว่าผลตอบแทนของ GMV constraint นี้จะไม่ active และ optimizer จะคืน GMV portfolio เดิม

ดังนั้นการสร้าง constrained efficient frontier สามารถทำได้โดยแก้ปัญหาซ้ำบนกริดของ μ_0 ที่เริ่มจากผลตอบแทนของ constrained GMV ขึ้นไป หรือใช้ equality $\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = \mu_0$ เมื่อประสงค์ให้พอร์ตมี expected return เท่ากับ target โดยตรง

ทฤษฎีบท 9.2

ถ้า

$$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$$

แล้วสำหรับ target return เดียวกัน

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}_2} \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \geq \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}_1} \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

เมื่อทั้งสองปัญหามี feasible solution

ผลนี้อธิบายว่า constraints ทำให้ in-sample opportunity set แคบลง แต่ไม่ได้หมายความว่า constraints ไม่มีประโยชน์ เพราะ constraints สามารถลด concentration, leverage, turnover และ estimation-error amplification

9.5.1 Feasibility ก่อน Optimization

สำหรับ long-only fully invested portfolio

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1$$

จะมี

$$\min_i \mu_i \leq \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \leq \max_i \mu_i$$

ดังนั้น target return ที่สูงกว่า $\max_i \mu_i$ เป็น infeasible ทันที

เมื่อมี upper bounds หรือ group constraints feasible return interval อาจแคบกว่านี้ วิธีที่ทั่วไปกว่าและตรวจสอบได้คือคำนวณ

$$\mu^{\mathcal{F}}_{\min} = \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}} \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w}, \qquad \mu^{\mathcal{F}}_{\max} = \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}} \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w}$$

ก่อนสร้าง target grid ถ้า $\mathcal{F}$ นิยามด้วยข้อจำกัดเชิงเส้น ปัญหาสองข้อนี้เป็น linear programs และช่วยแยก “target ที่เป็นไปไม่ได้” ออกจาก “solver ที่แก้ปัญหาไม่สำเร็จ” ได้อย่างชัดเจน

ประเด็นที่ต้องระวัง

สถานะ “infeasible” ไม่ได้หมายความว่า solver ล้มเหลวเสมอไป แต่อาจหมายถึงข้อกำหนดของผู้ใช้ขัดกันจริง เช่น target return สูงเกินไปพร้อมกับ position caps ที่เข้มเกินไป

9.6 Maximum-Sharpe Portfolio ภายใต้ข้อจำกัด

เมื่อมี risk-free rate R_f และ $\mathbf{w}$ แทนน้ำหนักของ risky assets ที่ fully invested นิยาม Sharpe ratio สำหรับพอร์ตที่มี $\sigma_p > 0$ เป็น

$$S(\mathbf{w}) = \frac{\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} - R_f}{\sqrt{\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}}}$$

ตัวเศษต้องใช้ผลตอบแทนและ R_f ที่มี horizon และ convention เดียวกัน เช่น nominal ต่อปีทั้งคู่

ในกรณี unconstrained บทที่ 8 ให้ tangency direction

$$\mathbf{w}_T \propto \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})$$

แต่เมื่อมี constraints ต้องแก้

$$\max_{\mathbf{w} \in \mathcal{F}} S(\mathbf{w})$$

ใหม่

ประเด็นที่ต้องระวัง

Sharpe ratio เป็น fractional objective จึงไม่ใช่ quadratic objective โดยตรง การใส่ Sharpe ratio เข้า quadratic-programming solver โดยไม่ reformulate เป็นข้อผิดพลาดเชิงแบบจำลอง

แนวทางเชิงคำนวณที่ใช้ได้ขึ้นกับข้อจำกัด เช่น nonlinear optimization หรือการแก้ target excess-return minimum-variance problems หลายระดับแล้วเลือกจุดที่มี Sharpe ratio สูงที่สุด วิธีหลังมีข้อดีเชิงการสอน เพราะสามารถตรวจ feasibility และ variance ของแต่ละจุดบน constrained frontier ได้โดยตรง

ถ้า expected excess return ของทุกพอร์ต feasible ไม่เป็นบวก ค่า maximum Sharpe อาจเป็นศูนย์หรือติดลบ และแนวคิด “เส้นสัมผัสจาก R_f” ต้องตีความด้วยความระมัดระวัง ไม่ควรบังคับใช้สูตร tangency โดยสมมติว่าพอร์ตที่มี Sharpe ratio บวกต้องมีอยู่เสมอ

9.7 Maximum Diversification Portfolio

ให้

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^\mathsf{T}$$

Diversification Ratio นิยามเป็น

$$DR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\mathsf{T}\sigma}{\sqrt{\mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w}}}$$

Maximum Diversification Portfolio แก้

$$\max_{\mathsf{w}\in\mathcal{F}} DR(\mathsf{w})$$

ข้อสังเกต

สำหรับ long-only fully invested portfolio ตัวเศษ $\mathsf{w}^\mathsf{T}\sigma$ คือ weighted average ของ standalone volatilities ส่วนตัวส่วนคือ volatility หลังรวม covariance จึงวัดประโยชน์จากโครงสร้างความสัมพันธ์มากกว่า จำนวน สินทรัพย์ เพียง อย่าง เดียว ถ้า สินทรัพย์ เคลื่อนไหว สัมพันธ์ กัน สมบูรณ์ ใน ทิศทาง เดียว Diversification Ratio จะไม่สร้างประโยชน์จาก correlation แต่เมื่อ correlation ต่ำลง อัตราส่วนนี้สามารถสูงกว่า 1 ได้

ภายใต้ long-only และ fully invested สามารถใช้ numerical optimization หรือ reformulation ที่เหมาะสมเพื่อแก้ปัญหา โดยต้องตรวจ normalization และ constraints ของ formulation ที่ใช้ หากอนุญาต short selling ตัวเศษอาจไม่ใช่ weighted average ที่มีความหมายเดิม จึงต้องระบุ domain และการตีความของ Diversification Ratio ให้ชัดเจน

งานเชิงประจักษ์ด้าน risk models และ diversification แสดงการใช้ minimum variance, maximum diversification และ risk parity กับ covariance estimators หลายรูปแบบ พร้อม upper bounds เพื่อควบคุม concentration

9.8 Risk Contribution และ Risk Parity

portfolio volatility คือ

$$\sigma_p = \sqrt{\mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}}$$

สำหรับ $\sigma_p > 0$ Marginal Risk Contribution ของสินทรัพย์ i คือ

$$MRC_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma\mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

Component Risk Contribution คือ

$$RC_i = w_i MRC_i = \frac{w_i(\Sigma\mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

จาก Euler's theorem

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} RC_i = \sigma_p}$$

กำหนด percentage risk contribution

$$PRC_i = \frac{RC_i}{\sigma_p}$$

จึงมี

$$\sum_{i=1}^{n} PRC_i = 1$$

บทนิยาม 9.4

Equal Risk Contribution Portfolio หรือ risk-parity portfolio ในรูปพื้นฐานต้องการ

$$RC_i = \frac{\sigma_p}{n}$$

สำหรับสินทรัพย์ที่อยู่ในพอร์ต

กรณีมี risk budgets $b_i > 0$ และ $\sum_i b_i = 1$ จะกำหนดเป้าหมาย

$$RC_i = b_i \sigma_p$$

หรือในรูปที่ไม่ต้องหารด้วย σ_p

$$w_i(\Sigma \mathbf{w})_i = b_i \, \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathbf{w}$$

แม้ $\sum_i RC_i = \sigma_p$ เสมอตาม Euler decomposition แต่ RC_i แต่ละตัวไม่จำเป็นต้องเป็นบวก ในพอร์ตที่อนุญาต short selling หรือมีสินทรัพย์ที่ทำหน้าที่ hedge อาจเกิด $MRC_i < 0$ และ $RC_i < 0$ ได้ ดังนั้นการสร้าง risk-budgeting portfolio แบบมาตรฐานมักกำหนด long-only และ positive risk budgets เพื่อให้การตีความ "ส่วนแบ่งความเสี่ยง" ตรงไปตรงมา

ประเด็นที่ต้องระวัง

Equal weight ไม่เท่ากับ equal risk contribution โดยทั่วไป และ inverse-volatility weights จะเท่ากับ risk parity เฉพาะภายใต้โครงสร้าง covariance บางกรณี ไม่ใช่เอกลักษณ์ทั่วไป

9.9 ข้อจำกัดที่พบในการบริหารพอร์ตจริง

9.9.1 Position Bounds

$$\ell_i \leq w_i \leq u_i$$

upper bounds ช่วยลด concentration และลดความไวของ optimizer ต่อ input errors

9.9.2 Group และ Sector Limits

ถ้า $\mathcal{G}_j$ เป็นกลุ่มสินทรัพย์

$$L_j \leq \sum_{i \in \mathcal{G}_j} w_i \leq U_j$$

9.9.3 Gross Exposure และ Leverage

สำหรับ long–short portfolio

$$\|\mathbf{w}\|_1 = \sum_i |w_i| \leq G_{\max}$$

ใน fully invested portfolio

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$$

net exposure กับ gross exposure จึงเป็นคนละแนวคิด ตัวอย่างเช่นพอร์ตที่มี long 150% และ short 50% มี net exposure 100% แต่ gross exposure 200% การควบคุมเพียง $\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$ จึงไม่เพียงพอสำหรับพอร์ต

long–short

9.9.4 Tracking Error Constraint

ให้ benchmark weights เป็น $\mathbf{w}_b$

$$TE(\mathbf{w}) = \sqrt{(\mathbf{w} - \mathbf{w}_b)^\top \Sigma (\mathbf{w} - \mathbf{w}_b)}$$

สามารถกำหนด

$$TE(\mathbf{w}) \leq TE_{\max}$$

โดย Σ ควรเป็น covariance ที่สอดคล้องกับ active returns และ horizon ของ mandate ถ้าพอร์ตและ benchmark fully invested ทั้งคู่ จะมี $\mathbf{1}^\top(\mathbf{w} - \mathbf{w}_b) = 0$ ทำให้ active risk มาจากการเบี่ยงน้ำหนักจาก benchmark ไม่ใช่จากการเพิ่มหรือลดเงินสดโดยไม่ตั้งใจ

9.9.5 Turnover Constraint

ให้ $\mathbf{w}^{\text{old}}$ เป็นน้ำหนักก่อน rebalance

$$TO(\mathbf{w}) = \sum_i |w_i - w_i^{\text{old}}|$$

และกำหนด

$$TO(\mathbf{w}) \leq \tau$$

ข้อสังเกต

บางสถาบันนิยาม one-way turnover เป็นครึ่งหนึ่งของผลรวม absolute trades

$$TO_{\text{oneway}} = \frac{1}{2} \sum_i |w_i - w_i^{\text{old}}|$$

จึงต้องระบุ convention ก่อนเปรียบเทียบตัวเลข turnover โดยเฉพาะเมื่อมี external cash flow เพราะ

เงื่อนไข “มูลค่าซื้อเท่ากับมูลค่าขาย” อาจไม่เป็นจริงในงวดนั้น

9.10 Transaction Costs และการตัดสินใจจาก Holdings เดิม

เมื่อมี current portfolio การตัดสินใจที่แท้จริงคือ trade vector

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\text{old}}$$

linear transaction-cost approximation คือ

$$C_{\text{lin}}(\Delta \mathbf{w}) = \sum_i c_i |\Delta w_i|$$

และแบบจำลองที่เพิ่ม market impact อาจใช้

$$C(\Delta \mathbf{w}) = \sum_i \left[c_i |\Delta w_i| + q_i (\Delta w_i)^2 \right]$$

โดย $c_i \geq 0$ และ $q_i \geq 0$ พจน์ $c_i|\Delta w_i|$ สามารถใช้แทนค่าธรรมเนียมและ bid–ask spread โดยประมาณ ส่วนพจน์กำลังสองใช้เป็น local approximation ของ market impact ต้นทุนจริงอาจไม่สมมาตรระหว่างซื้อกับขายและอาจไม่เป็น quadratic จึงควรประมาณค่าจากข้อมูลการซื้อขายที่เหมาะกับขนาดคำสั่ง

ปัญหา utility หลังต้นทุนสามารถเขียนเป็น

Return–Risk–Cost Optimization

$$\max_{\mathbf{w} \in \mathcal{F}} \left\{ \mu^{\mathsf{T}} \mathbf{w} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathbf{w} - C(\mathbf{w} - \mathbf{w}^{\text{old}}) \right\}$$

เมื่อ $\lambda > 0$ เป็น risk-aversion parameter และทุกพจน์ในวงเล็บถูกแปลงให้อยู่ในหน่วยผลตอบแทนของ horizon เดียวกัน หาก $\Sigma \succeq 0$ และ $C(\cdot)$ เป็น convex ฟังก์ชันที่ maximize ข้างต้นเป็น concave objective จึงยังอยู่ในกรอบ convex optimization เมื่อ feasible set เป็น convex

ข้อสังเกต

การมี transaction-cost penalty ทำให้ optimal target weights ขึ้นกับ current holdings ด้วย ดังนั้น นักลงทุนสองรายที่มี expectations เหมือนกันอาจมี optimal trades ต่างกันเพราะเริ่มจาก holdings คนละชุด

9.11 Liquidity Constraints

ถ้ามูลค่าพอร์ตเป็น V และสินทรัพย์ i มี Average Daily Value Traded เท่ากับ ADV_i อาจกำหนด trade limit

$$V|\Delta w_i| \leq \kappa_i ADV_i$$

เมื่อ κ_i เป็นสัดส่วน participation ที่ยอมรับได้

หรือเขียน

$$|\Delta w_i| \leq \frac{\kappa_i ADV_i}{V}$$

และสามารถตีความ “จำนวนวันโดยประมาณที่ต้องใช้ในการซื้อขาย” เป็น

$$\text{Days}_i = \frac{V|\Delta w_i|}{\kappa_i ADV_i}$$

ภายใต้สมมติฐานว่า ADV_i และ participation rate คงที่ระหว่างช่วงดำเนินการ

ประเด็นที่ต้องระวัง

Liquidity constraint ควรใช้กับ trade size ไม่ใช่เพียง target weight เพราะต้นทุนและความสามารถในการดำเนินการขึ้นกับขนาดการเปลี่ยน position จาก holdings เดิม

9.12 Covariance Estimation, Shrinkage และ Conditioning

sample covariance matrix คือ

$$S = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\mathsf{R}_t - \bar{\mathsf{R}})(\mathsf{R}_t - \bar{\mathsf{R}})^{\mathsf{T}}$$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่เทียบกับ T เมทริกซ์อาจประมาณได้ไม่เสถียร และถ้า $n \geq T$ sample covariance จะมี rank ไม่เกิน $T-1$ จึง singular

แนวทางหนึ่งคือ covariance shrinkage

$$\widehat{\Sigma}_\delta = (1-\delta)S + \delta F$$

เมื่อ

$$0 \leq \delta \leq 1$$

และ F เป็น structured target

ทฤษฎีบท 9.3

ถ้า $S \succeq 0$, $F \succeq 0$ และ $0 \leq \delta \leq 1$ แล้ว

$$\widehat{\Sigma}_\delta \succeq 0$$

พิสูจน์. สำหรับ x ใด ๆ

$$\mathsf{x}^{\mathsf{T}}\widehat{\Sigma}_\delta\mathsf{x} = (1-\delta)\mathsf{x}^{\mathsf{T}}S\mathsf{x} + \delta\mathsf{x}^{\mathsf{T}}F\mathsf{x} \geq 0$$

□

แนวคิด shrinkage ใช้เพื่อลด estimation variance โดยยอมรับ bias บางส่วน และมีบทบาทสำคัญใน high-dimensional portfolio optimization [30] ถ้า $F \succ 0$ และ $\delta > 0$ จะได้ $\widehat{\Sigma}_\delta \succ 0$ แม้ S จะ singular ซึ่งช่วยให้การแก้ระบบเชิงเส้นและ inverse-based calculations มีเสถียรภาพมากขึ้น อย่างไรก็ดี shrinkage intensity ที่มากเกินไปอาจลบโครงสร้าง covariance ที่มีสาระ จึงควรเลือกด้วยหลักสถิติหรือ validation ไม่ใช่เพื่อทำให้เมทริกซ์กลับด้านได้เพียงอย่างเดียว

9.12.1 Condition Number

ถ้า

$$0 < \lambda_{\min}(\Sigma) \leq \lambda_{\max}(\Sigma)$$

condition number แบบ spectral คือ

$$\kappa(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}(\Sigma)}{\lambda_{\min}(\Sigma)}$$

ค่า κ สูงบ่งชี้ว่า inverse-based optimizer อาจไวต่อ perturbations ถ้า Σ singular จะมี $\lambda_{\min} = 0$ และ condition number ในความหมายนี้เป็นอนันต์ จึงไม่ควรตีความ inverse โดยตรงก่อน regularization หรือการลดมิติ

9.13 Estimation Risk และ Error Maximization

mean–variance optimizer มีแนวโน้มให้น้ำหนักสูงกับสินทรัพย์ที่ estimated return สูง estimated risk ต่ำ หรือ estimated diversification benefit สูง

ถ้าค่าประมาณดังกล่าวเกิดจาก noise optimizer อาจขยาย estimation errors ไปเป็น extreme weights

$$\hat{\mu} = \mu + \varepsilon_{\mu}$$

และ

$$\widehat{\Sigma} = \Sigma + \mathcal{E}_{\Sigma}$$

จึงทำให้

$$\hat{\mathbf{w}}^{*} = g(\hat{\mu}, \widehat{\Sigma})$$

แตกต่างจาก

$$\mathbf{w}^* = g(\mu, \Sigma)$$

อย่างมากได้

Sensitivity Analysis

สำหรับ parameter θ สามารถตรวจ finite-difference sensitivity

$$\frac{\mathbf{w}^*(\theta + h) - \mathbf{w}^*(\theta - h)}{2h}$$

หรือเปรียบเทียบ

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_1$$

$$\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(0)}\|_2$$

และ

$$\max_i |w_i^{(1)} - w_i^{(0)}|$$

ภายใต้ mean, volatility, correlation และ estimation-window perturbations

สำหรับ constrained optimizer ต้องระวังว่า $\mathbf{w}^*(\theta)$ อาจไม่ differentiable ณ จุดที่ active set เปลี่ยน ดังนั้น finite-difference sensitivity ควรถูกตีความเป็น local diagnostic ไม่ใช่อนุพันธ์ที่มีอยู่ทุกจุด การรายงานทั้ง weight change, turnover และ objective deterioration มักให้ภาพความเปราะบางที่ครบกว่าดู gradient เพียงค่าเดียว

9.14 Black–Litterman: จาก Equilibrium สู่ Views

ปัญหาหนึ่งของ mean–variance optimization คือ expected returns ประมาณได้ยาก Black–Litterman framework เริ่มจาก equilibrium-implied returns แล้วผสมกับ views ที่มี uncertainty

ให้ market weights เป็น $\mathbf{w}_m$ และ risk-aversion parameter เป็น δ ภายใต้ reverse-optimization convention ของ Black–Litterman equilibrium-implied *excess* returns เขียนได้เป็น

$$\Pi = \delta \Sigma \mathbf{w}_m$$

ให้ views อยู่ในรูป

$$P\mu = q + \varepsilon$$

โดยในส่วนนี้ μ และ q ต้องใช้ convention เดียวกับ Π กล่าวคือถ้า Π เป็น excess returns views ก็ควรถูกเขียนบน excess-return scale เช่นกัน

โดย

$$\varepsilon \sim (\mathbf{0}, \Omega)$$

ภายใต้ Gaussian formulation ที่ใช้กันทั่วไป posterior mean สามารถเขียนเป็น

Black–Litterman Posterior Mean

$$\boxed{\mu_{\text{BL}} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\mathsf{T}}\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^{\mathsf{T}}\Omega^{-1}q\right]}$$

เมื่อ $\tau > 0$ ควบคุม uncertainty ของ prior mean และ Ω เป็น covariance ของ view errors สูตรนี้สมมติ Gaussian prior/view structure และเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องสามารถแก้ระบบเชิงเส้นได้ ในการคำนวณจริงควรใช้ linear solver หรือ factorization ที่เสถียรกว่าการสร้าง matrix inverse แบบตรง ๆ

μ_{BL} เป็น posterior mean ไม่ใช่ realized return ที่รับประกัน และตำรา หรือซอฟต์แวร์ บางชุดใช้ convention ต่างกันในการนำ posterior uncertainty ไปปรับ covariance ที่ใช้ใน optimization จึงต้องบันทึกให้ชัดว่า optimizer ใช้ Σ เดิมหรือ posterior-adjusted covariance

ประเด็นที่ต้องระวัง

Black–Litterman ไม่ได้กำจัด estimation risk แต่ทำให้ assumptions เกี่ยวกับ prior, views และ confidence ถูกเขียนอย่างชัดเจนขึ้น ผลลัพธ์ยังขึ้นกับ δ, τ, P, q และ Ω

9.15 Robust Optimization

แทนที่จะถือว่า μ และ Σ ทราบแน่นอน robust optimization กำหนด uncertainty set

$$\mu \in \mathcal{U}_\mu$$

และอาจมี

$$\Sigma \in \mathcal{U}_\Sigma$$

ตัวอย่าง robust mean–variance problem คือ

$$\max_{\mathsf{w}\in\mathcal{F}} \min_{\mu\in\mathcal{U}_\mu} \left\{ \mu^{\mathsf{T}}\mathsf{w} - \frac{\lambda}{2}\mathsf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathsf{w} \right\}$$

แนวคิดคือเลือกพอร์ตที่ยังยอมรับได้เมื่อ inputs เคลื่อนภายใน uncertainty set แทนการ optimize กับ point estimates เพียงชุดเดียว ตัวอย่างที่เห็นกลไกได้ชัดคือ ellipsoidal mean-uncertainty set

$$\mathcal{U}_\mu = \{\hat{\mu} + u : \; u^{\mathsf{T}}Q^{-1}u \le \rho^2\}, \qquad Q \succ 0$$

ซึ่งให้ worst-case expected return

$$\min_{\mu\in\mathcal{U}_\mu} \mu^{\mathsf{T}}\mathsf{w} = \hat{\mu}^{\mathsf{T}}\mathsf{w} - \rho\sqrt{\mathsf{w}^{\mathsf{T}}Q\mathsf{w}}$$

จึงเห็นว่า robustness ทำหน้าที่คล้าย penalty ต่อ exposure ที่ไวต่อความไม่แน่นอนของ expected-return estimates โดยตรง

ข้อสังเกต

Robustness ไม่ได้หมายถึงการทำให้พอร์ต conservative มากที่สุด แต่หมายถึงการกำหนด uncertainty อย่างสมเหตุผลแล้วหาคำตอบที่ไม่พึ่งค่าประมาณเฉพาะจุดมากเกินไป

9.16 Solver Validation และ Numerical Diagnostics

การได้เวกเตอร์น้ำหนักจาก software ไม่เพียงพอ ต้องตรวจคำตอบอย่างน้อยดังนี้

ตารางที่ 9.1: รายการตรวจสอบคำตอบของ Portfolio Optimizer

รายการ	สิ่งที่ตรวจ	การตีความ/เกณฑ์ตรวจสอบ
Solver status	status และ termination reason	ยอมรับเฉพาะสถานะที่เหมาะกับ solver; ไม่ใช้ weights โดยอัตโนมัติ
Primal feasibility	budget, target, bounds, group, leverage	residual/violation ต้องอยู่ภายใน tolerance ของปัญหา
Covariance	symmetry, PSD, condition number	negative eigenvalue ที่มีนัยหรือ near-singularity ต้องได้รับการวิเคราะห์/แก้ไข
Objective recompute	return, variance, Sharpe, TE, costs	คำนวณซ้ำจาก weights เพื่อจับ unit และ coding errors
KKT/dual	stationarity, dual feasibility, complementarity	ใช้ diagnostic ที่ตรงกับ convex/non-smooth formulation
Units/scaling	μ, Σ, R_f, costs	horizon, annualization และหน่วยต้องสอดคล้องกัน
Concentration	max weight, HHI, group/factor exposure	ต้องสอดคล้อง mandate และเหตุผลเชิงเศรษฐศาสตร์
Turnover/liquidity	$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{old}\|_1$, trade size, participation	ต้องอยู่ใน limits และดำเนินการได้จริง
Sensitivity	weights, active set, objective เมื่อ input เปลี่ยน	ระบุ unexplained jumps หรือความเปราะบางของคำตอบ

9.16.1 Numerical Tolerance

คอมพิวเตอร์อาจคืนค่าเช่น

$$w_i = -10^{-10}$$

ในปัญหา long-only ซึ่งอาจเป็น numerical tolerance ไม่ใช่ economically meaningful short position

การตัดสินใจว่าจะปัดค่าเป็นศูนย์ต้องอาศัย solver tolerance และ verification ไม่ใช่กฎตายตัว และหลังการปัดค่าต้องตรวจ budget, bounds และ objective อีกครั้ง เพราะการแก้ post-processing อาจทำให้คำตอบเดิมไม่ feasible หรือไม่ optimal

9.17 ตัวอย่างเชิงคำนวณแบบครบวงจร

พิจารณาสินทรัพย์ 4 ชนิด

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.10 \\ 0.13 \\ 0.09 \end{bmatrix}$$

volatility vector

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.14 \\ 0.20 \\ 0.11 \end{bmatrix}$$

และ correlation matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.10 & 0.20 \\ 0.25 & 1 & 0.45 & 0.30 \\ 0.10 & 0.45 & 1 & 0.35 \\ 0.20 & 0.30 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

สร้าง covariance matrix ด้วย

$$\Sigma = D_\sigma P D_\sigma, \qquad D_\sigma = \mathrm{diag}(\sigma)$$

จึงได้

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.00640 & 0.00280 & 0.00160 & 0.00176 \\ 0.00280 & 0.01960 & 0.01260 & 0.00462 \\ 0.00160 & 0.01260 & 0.04000 & 0.00770 \\ 0.00176 & 0.00462 & 0.00770 & 0.01210 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้เป็น positive definite สำหรับค่าที่กำหนด จึงทำให้ minimum-variance objective เป็น strictly convex

สำหรับ long-only minimum variance ผลเชิงตัวเลขจะให้น้ำหนักประมาณ

$$\mathbf{w}_{\mathrm{MV}} \approx \begin{bmatrix} 0.6394 \\ 0.0800 \\ 0.0190 \\ 0.2616 \end{bmatrix}$$

และมี

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_{\mathrm{MV}} = 1, \qquad \mu_p \approx 7.88\%, \qquad \sigma_p \approx 6.93\%$$

น้ำหนักทุกตัวเป็นบวก จึงหมายความว่า long-only constraints ยังไม่ active ในคำตอบนี้ และ constrained solution ตรงกับ unconstrained GMV solution สำหรับข้อมูลชุดนี้

ถ้ากำหนด target return

$$\mu_0 = 10\%$$

จะได้พอร์ต long-only target-return โดยประมาณ

$$\mathbf{w}_{10\%} \approx \begin{bmatrix} 0.1739 \\ 0.2156 \\ 0.2831 \\ 0.3274 \end{bmatrix}$$

พร้อม

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_{10\%} = 1, \qquad \mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_{10\%} \approx 10.00\%, \qquad \sigma_p \approx 9.90\%$$

เมื่อใช้ค่าที่ไม่ปัดเศษจะได้ $\sigma_p \approx 9.8955\%$ และน้ำหนักทั้งสี่ยังคงเป็นบวก ดังนั้น target-return constraint เป็นตัวกำหนดตำแหน่งบน frontier แต่ long-only constraints ยังไม่ bind ตัวอย่างนี้จึงเหมาะสำหรับฝึกตรวจ active constraints, budget identity และการคำนวณซ้ำทั้งใน spreadsheet และ numerical solver ไม่ใช่เพียงคัดลอก weights

9.18 กรณีศึกษางานวิจัยและการเชื่อมสู่การใช้งาน

งานเชิงประจักษ์เกี่ยวกับ quantitative portfolio construction แสดงการเปรียบเทียบ risk models และ diversification strategies เช่น minimum variance, maximum diversification และ risk parity พร้อม covariance shrinkage และ position upper bounds ในการทดสอบนอกตัวอย่าง

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: สิ่งที่ควรเรียนรู้จากงานเชิงประจักษ์

สาระสำคัญสำหรับตำราไม่ใช่การนำผลตอบแทนย้อนหลังของกลยุทธ์หนึ่งมาเป็นคำรับรองผลในอนาคต แต่คือการแยก

$$\text{risk model} \longrightarrow \text{optimization rule} \longrightarrow \text{constraints}$$
$$\longrightarrow \text{out-of-sample test} \longrightarrow \text{robustness}$$

ออกจากกันอย่างชัดเจน

เมื่อเปลี่ยน covariance estimator แม้ใช้ optimization objective เดิม น้ำหนักและ realized risk สามารถเปลี่ยนได้มาก

ข้อสรุปเชิงวิธีวิจัยคือ การเปรียบเทียบกลยุทธ์ต้องเปลี่ยนองค์ประกอบทีละส่วนให้ตรวจสอบได้ เช่น ตรึง objective แล้วเปลี่ยน covariance estimator หรือตรึง risk model แล้วเปลี่ยน constraints การเปลี่ยนหลายองค์ประกอบพร้อมกันทำให้ไม่สามารถระบุได้ว่าผลลัพธ์ที่ดีขึ้นหรือแย่ลงเกิดจากส่วนใดของกระบวนการ

9.19 Out-of-Sample Portfolio Optimization

กระบวนการที่เหมาะสมต้องรักษาลำดับเวลา

$$\mathcal{D}_t \to (\hat{\mu}_t, \widehat{\Sigma}_t) \to \mathsf{w}_t^* \to R_{p,t+1}$$

โดย $\mathcal{D}_t$ มีเฉพาะข้อมูลที่ทราบ ณ วันที่ตัดสินใจ

ถ้า rebalance ทุก h งวด

$$\mathsf{w}_t^* = g(\mathcal{D}_t)$$

และ realized gross portfolio return คือ

$$R^{\text{gross}}_{p,t+1:t+h}$$

จากข้อมูลหลังวันตัดสินใจ หากต้นทุนที่เกิด ณ เวลา rebalance ถูกแปลงเป็นสัดส่วนของมูลค่าพอร์ต สามารถรายงานผลตอบแทนสุทธิโดยประมาณเป็น

$$R^{\text{net}}_{p,t+1:t+h} = R^{\text{gross}}_{p,t+1:t+h} - C_t$$

โดย ต้อง ใช้ cost convention เดียวกัน ทุก กลยุทธ์ และ ถ้า ใช้ holding periods ที่ ทับ ซ้อน กัน ต้อง ระวัง dependence ของ observations เมื่อนำผลไปทดสอบเชิงสถิติ

Benchmark Ladder

ก่อนสรุปว่า optimizer เพิ่มคุณค่า ควรเปรียบเทียบอย่างน้อยกับ

1. equal weight
2. current portfolio หรือ policy portfolio
3. long-only minimum variance
4. simple inverse-volatility portfolio
5. strategy ที่ซับซ้อนขึ้นตามวัตถุประสงค์

ทุก กลยุทธ์ ต้อง ใช้ ข้อมูล ณ เวลา เดียวกัน rebalance schedule เดียวกัน และ transaction-cost assumptions เดียวกัน

9.20 Investment Lab: จาก Spreadsheet สู่ Reproducible Optimizer

Investment Lab: Excel Solver: Constrained Portfolio Optimization

สร้าง workbook อย่างน้อย 7 ชีต

1. **Prices** สำหรับ adjusted prices
2. **Returns** สำหรับ aligned returns
3. **Inputs** สำหรับ $\hat{\mu}$, $\widehat{\Sigma}$, R_f และ constraints
4. **Optimization** สำหรับ weights, return, variance, volatility และ Sharpe ratio
5. **Frontier** สำหรับ target-return grid
6. **Trading** สำหรับ current weights, trades, turnover และ costs

7. **Checks** สำหรับ PSD, budget, bounds, target return และ sensitivity

เปรียบเทียบ minimum variance, target return และ maximum Sharpe ภายใต้ long-only และ position caps จากนั้นเปลี่ยน estimation window แล้ววัด weight instability

Investment Lab: Python: Portfolio Optimization Validation

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `check_covariance(cov)`
- `minimum_variance(cov, constraints)`
- `target_return(mu, cov, target, constraints)`
- `maximum_sharpe(mu, cov, rf, constraints)`
- `risk_contributions(weights, cov)`
- `risk_parity(cov, budgets)`
- `transaction_cost(trade, parameters)`
- `solver_diagnostics(result)`
- `rolling_optimization(...)`

unit tests ควรตรวจ budget identity, PSD, target-return feasibility, KKT residuals, Euler risk decomposition, transaction-cost sign และ absence of look-ahead

9.21 ข้อจำกัดและหลักการตีความอย่างรับผิดชอบ

ตารางที่ 9.2: ความเสี่ยงของ Portfolio Optimization และแนวทางควบคุม

ความเสี่ยง	ผลที่อาจเกิด	แนวทางควบคุม
Mean estimation error	extreme weights, error maximization	shrinkage, views, bounds, robust sets
Covariance error	diversification/risk contribution ไม่เสถียร	shrinkage, factor risk model, stress tests
Ill-conditioning	perturbation เล็กถูกขยายผ่าน inverse	eigenvalue/condition diagnostics, regularization
Objective mismatch	optimum ทางคณิตศาสตร์ไม่ตรง mandate	ระบุ investment objective และ loss function ให้ชัด
Infeasible constraints	ไม่มีพอร์ตที่ทำตามเงื่อนไขพร้อมกัน	feasible-range check, constraint audit
Over-concentration	model risk กลายเป็น position risk	position/group/factor caps, concentration metrics
Turnover/cost error	gross alpha ถูกต้นทุนกิน	calibrated costs, turnover control, net test
Liquidity	target trade ดำเนินการไม่ได้ตามเวลา	trade-size, participation, days-to-liquidate limits
Nonstationarity	historical optimum เสื่อมเมื่อ regime เปลี่ยน	rolling estimation, stress/regime diagnostics
Look-ahead bias	backtest สูงเกินจริง	point-in-time data, decision clock, audit trail
Solver/formulation misuse	คำตอบผิดชนิดหรือ residual สูง	ตรวจ convexity, scaling, status, KKT/dual diagnostics

บทสรุปท้ายบท

Portfolio optimization เป็นขั้นตอนที่แปลงแบบจำลองผลตอบแทนและความเสี่ยงให้เป็นการตัดสินใจเชิงน้ำหนัก

minimum-variance problem พื้นฐานคือ

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

ภายใต้ constraints ที่กำหนด

เมื่อ $\Sigma \succeq 0$ และ constraints เป็น convex ปัญหา minimum variance เป็น convex optimization problem และ KKT conditions มีบทบาทสำคัญในการตรวจ optimality

target-return problem เพิ่ม $\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \geq \mu_0$ และต้องตรวจว่า target อยู่ใน feasible return interval ก่อนแก้ optimization

ขณะที่ maximum-Sharpe problem ใช้

$$\frac{\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} - R_f}{\sqrt{\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}}}$$

และต้องเลือก formulation ให้เหมาะกับ constraints

การกระจายความเสี่ยงสามารถมองผ่าน Diversification Ratio และ risk contributions

$$RC_i = \frac{w_i(\Sigma\mathbf{w})_i}{\sigma_p}$$

โดย

$$\sum_i RC_i = \sigma_p$$

พอร์ตที่ใช้จริงต้องเพิ่ม position limits, group limits, leverage, tracking error, turnover, transaction costs และ liquidity constraints

ความท้าทายสำคัญไม่ได้อยู่ที่ solver เพียงอย่างเดียว แต่อยู่ที่ estimation risk โดยเฉพาะ $\hat{\mu}$ และ $\widehat{\Sigma}$ การใช้ shrinkage, Black–Litterman, robust optimization, constraints และ sensitivity analysis ช่วยลดความเปราะบางของคำตอบได้ แต่ไม่สามารถกำจัด model risk ทั้งหมด

การประเมิน optimizer จึงต้องใช้ rolling out-of-sample design และ benchmark ที่เหมาะสม โดยรักษา point-in-time information และหักต้นทุนการซื้อขายอย่างสอดคล้อง

บทถัดไปจะนำพอร์ตที่ได้จาก optimization ไปสู่ปัญหาเชิงนโยบายการลงทุน ได้แก่ strategic/tactical asset allocation และ rebalancing

คำศัพท์สำคัญ

- Portfolio optimization
- Decision variable
- Objective function
- Feasible set
- Convex set
- Convex function
- Quadratic programming
- KKT conditions
- Active constraint
- Shadow price
- Minimum variance
- Target return
- Maximum Sharpe
- Diversification ratio
- Maximum diversification
- Marginal risk contribution
- Component risk contribution
- Risk parity
- Risk budget
- Position limit
- Gross exposure
- Tracking error
- Turnover
- Transaction cost
- Liquidity constraint
- Covariance shrinkage
- Condition number
- Estimation risk
- Black–Litterman
- Robust optimization
- Solver tolerance
- Out-of-sample validation

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. แยก decision variables, objective, constraints และ inputs ของ long-only minimum-variance problem
2. พิสูจน์ว่า $\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$ เป็น convex เมื่อ $\Sigma \succeq 0$
3. อธิบายความแตกต่างระหว่าง positive semidefinite กับ positive definite ในบริบทของ portfolio optimization
4. เขียน KKT conditions ของ long-only minimum-variance problem
5. อธิบาย complementary slackness สำหรับสินทรัพย์ที่มี $w_i = 0$
6. เขียน target-return minimum-variance problem ที่มี $0 \le w_i \le 0.30$
7. พิสูจน์ว่า long-only fully invested expected return อยู่ระหว่าง minimum และ maximum ของ asset expected returns
8. สร้างตัวอย่าง target return ที่ infeasible
9. อธิบายเหตุใด constrained frontier ไม่สามารถอยู่เหนือ unconstrained opportunity set ในความ

หมายของ minimum variance ที่ target เดียวกัน

10. อธิบายว่าเหตุใด maximum-Sharpe problem ไม่ใช่ quadratic program โดยตรง
11. เขียน Diversification Ratio และอธิบาย numerator กับ denominator
12. หา MRC_i, RC_i และ PRC_i ของพอร์ตที่กำหนด
13. พิสูจน์ Euler risk decomposition
14. อธิบายความแตกต่างระหว่าง equal weight, inverse volatility และ risk parity
15. เขียน portfolio problem ที่มี sector cap 25%
16. อธิบายความแตกต่างระหว่าง net exposure กับ gross exposure
17. เขียน tracking-error constraint เทียบ benchmark
18. เปรียบเทียบ two-way turnover กับ one-way turnover conventions
19. สร้าง objective ที่รวม expected return, variance และ linear transaction cost
20. อธิบายเหตุผลที่ liquidity constraint ควรผูกกับ trade vector
21. พิสูจน์ว่า shrinkage covariance ยังคง PSD เมื่อ matrices ต้นทางเป็น PSD
22. อธิบายเหตุผลที่ sample covariance singular เมื่อ $n \geq T$ ภายใต้ข้อมูลที่ demean แล้ว
23. อธิบายผลของ condition number สูงต่อ inverse-based portfolio weights
24. ออกแบบ sensitivity test ต่อ expected returns ± 50 basis points
25. อธิบายแนวคิด error maximization ของ mean–variance optimizer
26. คำนวณ equilibrium-implied returns $\Pi = \delta \Sigma \mathbf{w}_m$ จากข้อมูลที่กำหนด
27. อธิบายบทบาทของ P, q และ Ω ใน Black–Litterman
28. เขียน robust optimization problem เมื่อ expected returns อยู่ใน uncertainty set
29. ออกแบบ solver-validation checklist สำหรับ constrained portfolio
30. ออกแบบ rolling out-of-sample experiment เปรียบเทียบ equal weight, minimum variance และ maximum Sharpe หลัง transaction costs
31. อธิบายว่าเหตุใดข้อจำกัด $\mu^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \geq \mu_0$ อาจไม่ bind เมื่อ μ_0 ต่ำกว่าผลตอบแทนของ constrained GMV และเปรียบเทียบกับการใช้ equality
32. ยกตัวอย่างสถานการณ์ที่ $RC_i < 0$ แล้วอธิบายความหมายเชิง hedge และผลต่อการตีความ risk budget

คำถามชวนคิด

1. ถ้า optimizer ให้คำตอบที่มี Sharpe ratio สูงมากแต่เปลี่ยนน้ำหนักเกือบทั้งหมดเมื่อ expected returns เปลี่ยนเพียงเล็กน้อย ควรเชื่อคำตอบนั้นเพียงใด
2. การเพิ่ม constraints เป็นการทำลาย optimality หรือเป็นการนิยาม optimality ให้สอดคล้องกับโลกจริงมากขึ้น
3. หาก expected returns พยากรณ์ได้ไม่ดี แต่ covariance matrix ค่อนข้างเสถียร กลยุทธ์ใดควรใช้เป็น benchmark
4. Black–Litterman แก้ปัญหา estimation risk หรือเพียงจัดโครงสร้าง assumptions ให้ชัดขึ้น
5. เหตุใดพอร์ตที่ชนะใน sample จึงอาจแพ้ equal-weight portfolio นอก sample
6. ในยุคที่ optimization software ใช้งานง่าย ความรู้เรื่อง convexity, KKT และ numerical diagnostics ยังจำเป็นหรือไม่

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 9

[7] Fischer Black and Robert Litterman. “Global Portfolio Optimization”. In: *Financial Analysts Journal* 48.5 (1992), pp. 28–43.

[30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

บทที่ 10 การจัดสรรสินทรัพย์และการปรับสมดุลพอร์ต

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. แยก Asset Allocation, Security Selection และ Market Timing ได้อย่างถูกต้อง
2. อธิบาย Integrated, Strategic, Tactical, Dynamic และ Insured Asset Allocation
3. สร้าง strategic policy weights และ policy ranges จากวัตถุประสงค์และข้อจำกัดของผู้ลงทุน
4. เขียน tactical tilt และควบคุม active risk เทียบ strategic benchmark
5. วิเคราะห์ Buy-and-Hold, Constant Mix และ CPPI ด้วยสมการ wealth dynamics
6. ออกแบบ Calendar, Threshold และ Hybrid Rebalancing พร้อมวัด turnover และ transaction costs
7. อธิบาย no-trade region และ trade-off ระหว่าง policy drift กับต้นทุนการปรับพอร์ต
8. สร้าง Core–Satellite Portfolio และวัด active exposure ของ satellite
9. แปลง target weights เป็นมูลค่า จำนวนหน่วย และ trade ticket ที่นำไปใช้ได้จริง
10. ออกแบบ rolling simulation เพื่อเปรียบเทียบ allocation และ rebalancing rules อย่างเป็นธรรม

10.1 บทนำ: จาก Optimal Portfolio สู่ Policy Portfolio

บทที่ 9 ศึกษาวิธีคำนวณน้ำหนักที่เหมาะสมภายใต้ objective และ constraints แต่การบริหารพอร์ตจริงยังต้องตอบว่า asset classes ใดควรเป็นแกนหลัก น้ำหนักควรเบี่ยงจากเป้าหมายได้เท่าใด และเมื่อใดจึงควรซื้อขายกลับสู่ policy target

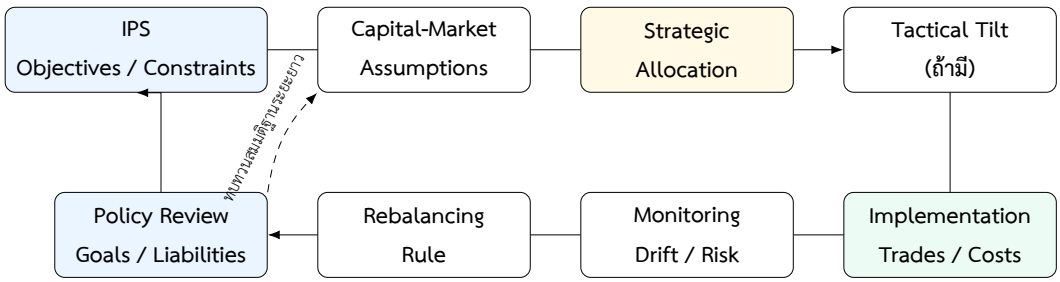
บทนิยาม 10.1

การจัดสรรสินทรัพย์ (Asset Allocation) คือการกำหนดสัดส่วนเงินลงทุนระหว่าง asset classes เพื่อให้พอร์ตสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ ผลตอบแทนที่ต้องการ ความเสี่ยงที่รับได้ ระยะเวลา สภาพคล่อง ภาระผูกพัน และข้อจำกัดในการลงทุน

เขียน policy portfolio เป็น

$$\mathbf{w}^S = (w_1^S, \dots, w_K^S)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{w}^S = 1, \qquad \ell_i \le w_i^S \le u_i$$

สำหรับ asset class แต่ละประเภท โดยทั่วไป policy portfolio ของนักลงทุนสถาบันหรือผู้ลงทุนระยะยาวมักกำหนดข้อจำกัด long-only หรือกรอบน้ำหนักที่ตีความได้เชิงนโยบาย แต่ในทางคณิตศาสตร์น้ำหนักติดลบหรือ leverage สามารถเกิดขึ้นได้หาก IPS และข้อกำกับอนุญาต ดังนั้นคำว่า “fully invested” หมายถึงผลรวมน้ำหนักเท่ากับหนึ่ง ไม่ได้แปลว่าไม่มี leverage เสมอไป



รูปที่ 10.1: วงจรการจัดสรรสินทรัพย์จาก IPS และสมมติฐานตลาดสู่การดำเนินการ การติดตาม การปรับสมดุล และการทบทวนนโยบาย

รูปที่ 10.1 แยก *rebalancing* ออกจาก *policy review* อย่างชัดเจน การปรับสมดุลเป็นการพาพอร์ตกลับเข้าสู่กรอบนโยบายเดิมหลังเกิด market drift ส่วน policy review เป็นการถามว่ากรอบเดิมยังเหมาะกับเป้าหมาย ภาระผูกพัน และสมมติฐานระยะยาวหรือไม่ การเปลี่ยน strategic weights เพราะมุมมองตลาดระยะสั้นจึงควรถูกจัดเป็น tactical decision มากกว่าการแก้ IPS โดยไม่มีเหตุผลเชิงนโยบาย

ประเด็นที่ต้องระวัง

Asset allocation ไม่ใช่การกำหนดสัดส่วนครั้งเดียวแล้วใช้ตลอดไป policy portfolio ต้องถูกทบทวนเมื่อเป้าหมาย ภาระผูกพัน risk capacity หรือ capital-market assumptions เปลี่ยนอย่างมีสาระสำคัญ

10.2 Asset Allocation, Security Selection และ Market Timing

การตัดสินใจลงทุนสามารถแยกเป็นสามชั้น

1. **Asset Allocation** เลือกน้ำหนักระดับ asset class

2. **Security Selection** เลือกหลักทรัพย์หรือเครื่องมือภายใน asset class
3. **Market Timing หรือ Tactical Timing** เปลี่ยน exposure ตามเวลา

การแยกสามชั้นนี้สำคัญต่อ performance attribution และ governance เพราะผลลัพธ์จากการเลือก asset class ไม่ควรถูกสับสนกับผลจาก security selection หรือ tactical bets

10.2.1 การตีความงาน Asset-Allocation Attribution

งานของ Brinson และคณะเป็นรากฐานสำคัญของการวิเคราะห์ policy allocation ขณะที่ Ibbotson และ Kaplan ชี้ว่าตัวเลขที่มักเรียกว่า “ประมาณ 90%” เปลี่ยนความหมายตามคำถามทางสถิติที่ใช้วัด [11, 12, 25]

ประเด็นที่ต้องระวัง

ไม่ควรสรุปว่า “ประมาณ 90% ของผลตอบแทนเกิดจาก Asset Allocation” เป็นกฎสากล ผลการศึกษาที่อ้างบ่อยเกี่ยวข้องกับการอธิบายความแปรปรวนของผลตอบแทนตามเวลาในตัวอย่างเฉพาะ และไม่เท่ากับการบอกว่า security selection หรือ active management สร้างผลตอบแทนได้เพียงส่วนที่เหลือ

10.3 Integrated Asset Allocation

Integrated Asset Allocation เชื่อมสถานะของตลาดกับสถานะของผู้ลงทุน [50]

ให้ z_t แทน capital-market state เช่น expected returns, covariance, yield curve และ valuation และให้ x_t แทน investor state เช่น wealth, liabilities, horizon และ risk capacity

กฎการจัดสรรเขียนเชิงนามธรรมได้เป็น

$$\boxed{\mathbf{w}_t = g(x_t, z_t; \theta)}$$

เมื่อ θ เป็น policy parameters

หลังเกิด realized returns และ cash flows สามารถมองวงจรเชิงสถานะได้เป็น

$$(x_t, z_t) \longrightarrow \mathbf{w}_t \longrightarrow R_{p,t+1} \longrightarrow (x_{t+1}, z_{t+1})$$

จึงเกิด feedback loop จุดสำคัญคือกฎ $g(\cdot)$ ควรกำหนดจากข้อมูลที่มีอยู่ ณ เวลาตัดสินใจ ไม่ใช่จาก realized

state ในอนาคต มิฉะนั้นการทดสอบย้อนหลังจะเกิด look-ahead bias

ข้อสังเกต

Integrated Asset Allocation ไม่ได้หมายความว่าต้องปรับพอร์ตบ่อย แต่หมายถึงการพิจารณา market state และ investor state พร้อมกันภายใต้กฎที่ตรวจสอบได้

10.4 Strategic Asset Allocation

Strategic Asset Allocation หรือ SAA คือ policy mix ระยะยาว

ตัวอย่าง formulation แบบ mean–variance คือ

Strategic Asset Allocation

$$\mathbf{w}^S = \arg\max_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}^S} \left\{ \mathbf{w}^\top \mu_{LR} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^\top \Sigma_{LR} \mathbf{w} \right\}$$

เมื่อ μ_{LR} และ Σ_{LR} เป็น long-run capital-market assumptions ที่ต้องใช้ horizon และหน่วยเวลาเดียวกัน และ Σ_{LR} ควรเป็น positive semidefinite เพื่อให้พจน์ความเสี่ยงมีความหมายและปัญหา optimization มีโครงสร้างที่เหมาะสม

สมการข้างต้นเป็น *policy design model* ไม่ใช่คำพยากรณ์ว่าน้ำหนักดังกล่าวจะดีที่สุดในอนาคต ความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยของ expected returns สามารถเปลี่ยนน้ำหนักที่เหมาะสมได้มาก จึงควรใช้ policy ranges, shrinkage, scenario analysis หรือ robustness ร่วมกับข้อจำกัดจาก IPS

แต่ SAA ไม่จำเป็นต้องมาจาก mean–variance optimization เพียงอย่างเดียว อาจสร้างจาก liability structure, risk budgets, regulatory limits หรือ policy governance

10.4.1 จาก IPS สู่ Strategic Policy

ก่อนกำหนด $\mathbf{w}^S$ ควรระบุอย่างน้อย

1. required return และ investment objective
2. risk capacity และ risk willingness (risk tolerance)
3. investment horizon

4. liquidity requirements
5. liabilities และ cash-flow needs
6. legal, tax และ policy constraints
7. permitted asset classes และ investment vehicles
8. rebalancing และ policy-review rules

10.4.2 Policy Range

แทนการกำหนด target เพียงจุดเดียว สามารถกำหนด

$$\ell_i \le w_{i,t} \le u_i$$

โดย target w_i^S อยู่ภายในช่วง $\ell_i \le w_i^S \le u_i$ สำหรับกรณีที่มีเพียง budget constraint และ box constraints ช่วงน้ำหนักจะมี feasible portfolio ได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_i \ell_i \le 1 \le \sum_i u_i$$

เงื่อนไขนี้เป็นจุดตรวจง่ายที่ควรทำก่อน optimization หากมีข้อจำกัดกลุ่มสินทรัพย์ สภาพคล่อง หรือ leverage เพิ่มเติม ต้องตรวจ feasibility ของข้อจำกัดทั้งหมดร่วมกันอีกครั้ง

ตัวอย่าง 10.1. สมมติ policy portfolio มี

$$\mathbf{w}^S = (0.45, 0.30, 0.10, 0.15)^\mathsf{T}$$

สำหรับหุ้น ตราสารหนี้ เงินสด และทองคำ

กำหนดช่วง

	หุ้น	ตราสารหนี้	เงินสด	ทองคำ
ℓ_i	0.35	0.25	0.05	0.05
u_i	0.55	0.40	0.15	0.20

policy ranges ทำหน้าที่ทั้งเป็น governance limits และพื้นที่สำหรับ market drift หรือ tactical tilts

10.5 Tactical Asset Allocation

Tactical Asset Allocation หรือ TAA คือการเบี่ยงน้ำหนักชั่วคราวจาก SAA

$$\boxed{\mathsf{w}_t = \mathsf{w}^S + \delta_t}, \qquad \mathbf{1}^\mathsf{T}\delta_t = 0$$

ถ้า w^S เป็น policy benchmark และทั้งพอร์ตกับ benchmark ใช้ชุดผลตอบแทนเดียวกัน active return ในหนึ่งงวดเขียนได้ตรง ๆ เป็น

$$R_{A,t} = R_{p,t} - R_{S,t} = \delta_t^\mathsf{T} R_t, \qquad \sigma_{A,t}^2 = \delta_t^\mathsf{T}\Sigma_t\delta_t$$

จึงกำหนด active-risk budget และ policy bounds ได้พร้อมกันเป็น

$$\delta_t^\mathsf{T}\Sigma_t\delta_t \le \sigma_A^2, \qquad \ell_i \le w_{i,t} \le u_i$$

ความหมายเชิงบริหารคือ tactical tilt ไม่ควรถูกประเมินจากทิศทางที่คาดเพียงอย่างเดียว แต่ต้องถามว่า “ใช้ active-risk budget ไปเท่าใดเพื่อคาดหวัง active return เท่าใด” และต้องติดตามว่าความสัมพันธ์ระหว่าง asset classes เปลี่ยนจนทำให้ active risk สูงกว่าที่ประมาณไว้หรือไม่

ตัวอย่าง 10.2. จาก $\mathsf{w}^S = (0.45, 0.30, 0.10, 0.15)^\mathsf{T}$ กำหนด tactical tilt

$$\delta_t = (0.05, -0.04, -0.01, 0)^\mathsf{T}, \qquad \mathsf{w}_t = \mathsf{w}^S + \delta_t = (0.50, 0.26, 0.09, 0.15)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{1}^\mathsf{T}\delta_t = 0$$

ดังนั้น tactical decision เปลี่ยน composition แต่ไม่สร้างเงินลงทุนเพิ่มในแบบจำลอง fully invested และยังอยู่ภายใต้ budget constraint เดิม

ประเด็นที่ต้องระวัง

Tactical view ต้องมี horizon, signal definition, active-risk budget และ exit rule ที่ระบุล่วงหน้า มิฉะนั้นการเปลี่ยนน้ำหนักหลังเห็นผลลัพธ์อาจกลายเป็น discretionary hindsight มากกว่ากระบวนการลงทุนที่ตรวจสอบได้

10.6 Dynamic และ Insured Asset Allocation

Dynamic Asset Allocation กำหนดน้ำหนักเป็นฟังก์ชันของ state variables

$$\mathbf{w}_t = f(s_t)$$

โดย s_t อาจประกอบด้วย wealth, volatility, drawdown, valuation, regime หรือ funding ratio

Insured Asset Allocation เน้นการควบคุม downside wealth ด้วย floor หรือ risk budget ที่เปลี่ยนตามเวลา ตัวอย่างสำคัญคือ CPPI

ตารางที่ 10.1: เปรียบเทียบกรอบ Asset Allocation

กรอบ	Anchor	เหตุผล ใน การ เปลี่ยน น้ำหนัก	ความเสี่ยงสำคัญ
Strategic	long-run policy	policy review	assumption drift
Tactical	strategic weights	relative views/signals	timing/model risk
Dynamic	state rule	state variables	regime/model risk
Insured	wealth floor	cushion/ downside rule	gap risk
Integrated	market + investor states	feedback process	model/ governance complexity

10.7 Model Portfolios และข้อจำกัดของ Risk Labels

ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้สามารถกำหนด asset mixes ที่รวมเป็น 100%

ตารางที่ 10.2: ตัวอย่าง normalized asset mix เพื่ออธิบายระดับความเสี่ยง

รูปแบบ	หุ้น	ตราสารหนี้	เงินสด	ทองคำ/ทางเลือก
Conservative	15%	55%	25%	5%
Income	25%	55%	15%	5%
Balanced	45%	35%	10%	10%
Growth	65%	20%	5%	10%
Aggressive	80%	10%	5%	5%

ประเด็นที่ต้องระวัง

คำว่า Conservative, Balanced และ Aggressive ไม่มีความหมายสากลหากไม่กำหนด horizon, liabilities, liquidity, drawdown tolerance และสินทรัพย์ที่ใช้จริง อายุของผู้ลงทุนเพียงตัวเดียวไม่เพียงพอสำหรับกำหนด policy portfolio เพราะอายุไม่ใช่ตัวแทนของ liquidity need, liability, risk capacity และ willingness to bear drawdown ทั้งหมด

10.8 Wealth Dynamics และน้ำหนักที่ Drift

ให้ $w_{i,t}$ เป็นน้ำหนักหลังการตัดสินใจ ณ เวลา t และ $R_{i,t+1}$ เป็นผลตอบแทนงวดถัดไป

ก่อน rebalancing ณ $t+1$

$$V_{i,t+1}^{-} = W_t w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$$

ดังนั้น

$$W_{t+1}^{-} = W_t \sum_{j=1}^{n} w_{j,t}(1 + R_{j,t+1})$$

และ drifted weight คือ

Drifted Weight

$$\widetilde{w}_{i,t+1} = \frac{w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})}{\sum_j w_{j,t}(1 + R_{j,t+1})}$$

สมการนี้เป็นหัวใจของ rebalancing เพราะแม้ไม่มีการซื้อขาย weights ก็เปลี่ยนตาม relative returns โดยสูตรสมมติว่าไม่มี external cash flow และไม่มีต้นทุนระหว่างช่วง t ถึง $t+1$ หากมีเงินฝากถอนหรือค่าธรรมเนียมต้องกำหนดลำดับเหตุการณ์ให้ชัดเจนก่อนคำนวณ drifted weights เพื่อไม่ให้เงินสดภายนอกถูกตีความเป็นผลตอบแทนของพอร์ต

10.9 Buy-and-Hold

Buy-and-Hold ไม่ปรับ weights กลับหลัง market drift [40]

$$w_{i,t+1} = \widetilde{w}_{i,t+1}$$

ตัวอย่าง 10.3. เริ่มพอร์ต 60% หุ้นและ 40% เงินสด มูลค่า 1,000,000 บาท

ถ้าหุ้นลดลง 20% และเงินสดไม่เปลี่ยน จะได้

$$V_E = 480{,}000, \qquad V_C = 400{,}000, \qquad W = 880{,}000, \qquad \widetilde{w}_E = \frac{480{,}000}{880{,}000} = 54.55\%$$

Buy-and-Hold ไม่ซื้อหุ้นเพิ่มเพื่อกลับไป 60%

10.10 Constant Mix

Constant Mix ปรับกลับสู่ target $\mathbf{w}^*$ เมื่อถึงเวลาหรือเงื่อนไขที่กำหนด

ถ้า wealth ก่อน trade คือ W_t^-

Rebalancing Trade

$$\boxed{\Delta V_{i,t} = W_t^- \left(w_i^* - \widetilde{w}_{i,t}\right)}$$

ถ้า $\Delta V_{i,t} > 0$ คือซื้อ และถ้า $\Delta V_{i,t} < 0$ คือขาย

ทฤษฎีบท 10.1

สำหรับพอร์ตสองสินทรัพย์ที่ target risky weight เท่ากับ $w^* \in (0,1)$ และผลตอบแทนของทั้งสองสินทรัพย์มากกว่า -100% Constant Mix ซื้อสินทรัพย์เสี่ยงเมื่อสินทรัพย์เสี่ยงให้ผลตอบแทนต่ำกว่าสินทรัพย์อีกประเภท และขายเมื่อให้ผลตอบแทนสูงกว่า

พิสูจน์. หลังหนึ่งงวด

$$\widetilde{w}_E = \frac{w^*(1+R_E)}{w^*(1+R_E)+(1-w^*)(1+R_f)}$$

จากการจัดรูป

$$\widetilde{w}_E < w^* \iff R_E < R_f$$

ดังนั้น

$$w^* - \widetilde{w}_E > 0$$

จึงต้องซื้อสินทรัพย์เสี่ยงกลับสู่ target □

ตัวอย่าง 10.4. จากพอร์ต 60/40 หลังหุ้นลด 20% wealth เท่ากับ 880,000 บาท

Constant Mix ต้องการหุ้น

$$0.60(880{,}000) = 528{,}000$$

จึงซื้อหุ้น

$$528{,}000 - 480{,}000 = 48{,}000 \text{ บาท}$$

และลดเงินสดเหลือ 352,000 บาท

ถ้างวดถัดไปหุ้นเพิ่ม 25% และเงินสดไม่เปลี่ยน wealth จะเป็น

$$528{,}000(1.25) + 352{,}000 = 1{,}012{,}000 \text{ บาท}$$

ขณะที่ Buy-and-Hold จะกลับเป็น 1,000,000 บาทในเส้นทางนี้

ข้อสังเกต

ตัวอย่างข้างต้นแสดง rebalancing premium ในเส้นทางที่ราคาสลับลงแล้วกลับขึ้น ไม่ได้พิสูจน์ว่า Constant Mix ให้ผลตอบแทนสูงกว่า Buy-and-Hold ในทุกตลาด ตลาดที่มีแนวโน้มต่อเนื่องอาจทำให้ Constant Mix ขายสินทรัพย์ที่กำลัง outperform เร็วเกินไป

10.11 Constant-Proportion Portfolio Insurance

CPPI กำหนด floor F_t และ cushion [8]

$$C_t = \max(W_t - F_t, 0), \qquad E_t^{\text{raw}} = mC_t, \qquad m > 0$$

ในทางปฏิบัติ F_t ต้องมีความหมายสอดคล้องกับเป้าหมาย หากต้องการคุ้มครองมูลค่าอนาคต ณ เวลา T floor ระหว่างทางควรสะท้อนมูลค่าปัจจุบันของเป้าหมายนั้นภายใต้อัตราของสินทรัพย์ปลอดภัย มิใช่เลือกตัวเลขคงที่โดยไม่มี convention ด้านเวลา

ถ้าห้าม leverage และไม่ให้สถานะสินทรัพย์ปลอดภัยติดลบ จะได้

CPPI Risky Exposure

$$\boxed{E_t = \min\{mC_t, W_t\}}, \qquad B_t = W_t - E_t$$

หาก mandate อนุญาต leverage เพดาน W_t ต้องแทนด้วย exposure limit ที่กำหนดจริง ดังนั้น multiplier เพียงตัวเดียวไม่เพียงพอสำหรับอธิบายความเสี่ยงของ CPPI ต้องระบุ leverage cap และความถี่ในการ rebalance

ควบคู่กัน

ตัวอย่าง 10.5. ให้ $W_0 = 1{,}000{,}000$, $F_0 = 800{,}000$ และ $m = 3$ จึงได้

$$C_0 = 200{,}000, \qquad E_0 = 600{,}000, \qquad B_0 = 400{,}000$$

ถ้าสินทรัพย์เสี่ยงเพิ่ม 10% และสินทรัพย์ปลอดภัยเพิ่ม 1%

$$W_1 = 600{,}000(1.10) + 400{,}000(1.01) = 1{,}064{,}000$$

ถ้า floor โต 1% จะได้

$$F_1 = 808{,}000, \qquad C_1 = 256{,}000, \qquad E_1 = 768{,}000$$

ตัวอย่างนี้แสดงพฤติกรรม procyclical ของ CPPI: เมื่อ wealth เพิ่มเร็วกว่า floor cushion จะเพิ่ม และกฎจะเพิ่ม risky exposure ในรอบถัดไป ตรงข้ามกับ Constant Mix ที่มักขาย risky asset หลังราคาปรับขึ้นเมื่อเทียบกับสินทรัพย์อีกประเภท

10.11.1 Gap Risk

CPPI ไม่รับประกัน floor ในตลาดที่ราคาเปลี่ยนแบบกระโดดหรือไม่สามารถ rebalance ได้ทัน ให้ risky exposure ก่อน shock เท่ากับ E_t และให้ risky asset ขาดทุนสัดส่วน $L \in [0, 1]$ โดยสมมติในช่วง shock ว่าสินทรัพย์ปลอดภัยและ floor ยังไม่เปลี่ยน จะได้โดยประมาณ

$$W_{t+1} = W_t - E_t L$$

เพื่อไม่ให้ wealth ต่ำกว่า $F_t = W_t - C_t$ ต้องมี

$$W_t - E_t L \geq W_t - C_t \quad \Longleftrightarrow \quad E_t L \leq C_t$$

ดังนั้น ถ้า $E_t > 0$ เงื่อนไข gap-loss ที่ไม่ทะลุ floor คือ

ทฤษฎีบท 10.2

$$\boxed{L \leq \frac{C_t}{E_t}}$$

และในช่วงที่ CPPI ไม่ติด exposure cap ซึ่ง $E_t = mC_t$ จะลดรูปเป็น

$$\boxed{L \leq \frac{1}{m}}$$

ถ้า exposure ถูก cap ที่ $E_t = W_t$ เงื่อนไขจะเป็น $L \leq C_t/W_t$ ซึ่งอาจแตกต่างจาก $1/m$ จึงไม่ควรใช้กฎ $1/m$ โดยไม่ตรวจว่าพอร์ตอยู่ในช่วง uncapped หรือไม่

ประเด็นที่ต้องระวัง

ผลข้างต้นเป็น local one-period condition ภายใต้สมมติฐานอย่างง่าย ไม่ใช่การรับประกันเงินต้นในโลกจริง เพราะยังมี overnight gaps, liquidity, execution delay, transaction costs, safe-asset risk และการเปลี่ยนแปลงของ floor ระหว่างเวลา

10.12 เปรียบเทียบ Buy-and-Hold, Constant Mix และ CPPI

ตารางที่ 10.3: โครงสร้างเชิงพฤติกรรมของ Dynamic Allocation Rules

กลยุทธ์	เมื่อ risky asset ขึ้น	เมื่อ risky asset ลง	ลักษณะ
Buy-and-Hold	risky weight เพิ่มเอง	risky weight ลดเอง	ปล่อย drift
Constant Mix	ขายกลับ target	ซื้อกลับ target	contrarian
CPPI	exposure มักเพิ่ม	exposure มักลด	procyclical; convex ภายใต้ ideal rebalancing

ไม่มี strategy ใด dominate ทุก price path ผลลัพธ์ขึ้นกับ trend, reversal, volatility, gaps, rebalancing frequency, safe-asset return และ costs ดังนั้น การเปรียบเทียบต้องใช้ price path และสมมติฐาน

implementation เดียวกัน

10.13 กฎการ Rebalancing

การปรับสมดุลพอร์ตคือการตัดสินใจว่า market drift มากเพียงใดจึงควรซื้อขายกลับ

10.13.1 Calendar Rebalancing

กำหนดวันตรวจและปรับล่วงหน้า เช่น รายเดือน รายไตรมาส หรือรายปี

ข้อดีคือเรียบง่ายและ audit ได้ง่าย แต่สามารถเกิด unnecessary trades เมื่อ weights ยังใกล้ target

10.13.2 Threshold Rebalancing

กำหนด tolerance band $b_i > 0$

$$\boxed{|\widetilde{w}_{i,t} - w_i^*| > b_i}$$

สำหรับอย่างน้อยหนึ่ง asset class จึง trigger การปรับพอร์ต

หรือใช้ relative band

$$\left|\frac{\widetilde{w}_{i,t} - w_i^*}{w_i^*}\right| > b_i^{rel}$$

10.13.3 Hybrid Rebalancing

Hybrid rule ตรวจพอร์ตตาม calendar แต่ trade เฉพาะเมื่อ breach threshold

$$I_t = \mathbf{1}\{t \in \mathcal{T}_{\text{review}}\}\,\mathbf{1}\left\{\max_i \frac{|\widetilde{w}_{i,t} - w_i^*|}{b_i} > 1\right\}, \qquad b_i > 0$$

เมื่อ $I_t = 1$ จึงดำเนินการ rebalance รูปนี้เทียบ deviation ของแต่ละสินทรัพย์กับ band ของตนเองอย่างถูกต้อง และเทียบเท่ากับเงื่อนไขว่า “มีอย่างน้อยหนึ่งสินทรัพย์ที่ breach band”

10.14 No-Trade Region และ Partial Rebalancing

เมื่อมี transaction costs การกลับสู่ target ทุกครั้งอาจไม่เหมาะสม

กำหนด no-trade region

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{w} : |w_i - w_i^*| \leq b_i \quad \forall i\}$$

ถ้า

$$\tilde{\mathbf{w}}_t \in \mathcal{N}$$

จะไม่ซื้อขาย

ถ้าออกนอก region สามารถเลือก

$$\mathbf{w}_t^{new} = \mathbf{w}^*$$

หรือ partial rebalance ไปยังจุดภายใน band

ข้อสังเกต

การ rebalance ถึง boundary แทนการกลับ target เต็มจำนวนสามารถลด turnover ได้ จึงควรมอง rebalancing เป็น optimization problem ระหว่าง policy deviation กับ trading cost มากกว่ากฎเชิงกลเพียงอย่างเดียว

10.15 Turnover และ Transaction Costs

ให้

$$\Delta \mathbf{w}_t = \mathbf{w}_t^{new} - \tilde{\mathbf{w}}_t$$

two-way turnover คือ

$$TO_t = \sum_i |\Delta w_{i,t}|$$

และ one-way turnover convention คือ

$$TO_t^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_i |\Delta w_{i,t}|$$

ตัวประกอบ $1/2$ มีความหมายตรงไปตรงมาเมื่อเป็นการปรับพอร์ตแบบ self-financing ที่ไม่มี external cash flow และผลรวมของการซื้อเท่ากับผลรวมของการขายก่อนต้นทุน หากมีเงินเข้าออกพอร์ต มีอนุพันธ์ที่วัด exposure ด้วย notional หรือมีการนิยาม turnover ที่ไม่รวมสินทรัพย์บางประเภท ต้องระบุ convention ให้ชัดเจน

linear transaction cost approximation คือ

$$TC_t \approx W_t^- \sum_i c_i |\Delta w_{i,t}|$$

โดย c_i เป็นต้นทุนต่อมูลค่าซื้อขายหนึ่งหน่วย สูตรนี้เป็น first-order approximation เพราะ transaction cost เองทำให้ post-trade wealth ลดลง หากต้นทุนมีขนาดมากหรือ target ต้องแม่นยำ ควรแก้ budget และ trades พร้อมกัน

ถ้ามี fixed cost หรือ nonlinear market impact สามารถขยายเป็น

$$TC_t = \sum_i \left[a_i \mathbf{1}_{\{\Delta w_{i,t} \neq 0\}} + b_i |\Delta V_{i,t}| + q_i (\Delta V_{i,t})^2 \right]$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

ถ้ามี fixed costs, minimum lot sizes หรือ integer units ปัญหา implementation อาจไม่เป็น convex และอาจต้องใช้ mixed-integer optimization หรือ heuristic ที่ตรวจสอบได้

10.16 Policy Deviation กับ Cost Trade-off

ให้

$$d_t = \mathbf{w}_t - \mathbf{w}^*$$

tracking-risk approximation เทียบ policy portfolio คือ

$$TE_t^2 = d_t^\top \Sigma_t d_t$$

rebalancing decision สามารถเขียนเป็น

Cost-Aware Rebalancing

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{w}^*)^\top \Sigma_t (\mathbf{w}-\mathbf{w}^*) + \lambda_C\, c(\mathbf{w}-\tilde{\mathbf{w}}_t) \right\}$$

โดย $c(\cdot)$ ควรนิยามเป็นต้นทุนในรูปสัดส่วนของ wealth เพื่อให้ scale ของ objective ตีความได้ง่าย หากใช้ต้นทุนเป็นจำนวนเงินจริง ต้องกำหนดหน่วยของ λ_C ให้สอดคล้อง พจน์แรกลงโทษ policy deviation ส่วนพจน์ที่สองลงโทษ trading cost

เมื่อ λ_C สูง optimal policy จะยอมให้ weights drift มากขึ้นก่อน trade

10.17 Core–Satellite Portfolio

Core–Satellite แบ่งพอร์ตเป็น core portfolio กับ satellite portfolio

ให้ $s \in [0,1]$ เป็นสัดส่วน satellite

$$\boxed{\mathbf{w} = (1-s)\mathbf{w}_C + s\mathbf{w}_S}$$

ถ้า core เป็น benchmark $\mathbf{w}_b = \mathbf{w}_C$

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}_b = s(\mathbf{w}_S - \mathbf{w}_C)$$

ดังนั้น active variance คือ

$$TE^2 = s^2(\mathbf{w}_S - \mathbf{w}_C)^\top \Sigma (\mathbf{w}_S - \mathbf{w}_C)$$

จึงได้

ทฤษฎีบท 10.3

ถ้า covariance matrix และ satellite composition คงที่ tracking error ของ Core–Satellite Portfolio แปรผันเชิงเส้นกับ satellite share

$$\boxed{TE = s\,TE_S}$$

สำหรับ $s \geq 0$

ผลนี้ช่วยกำหนดขนาด satellite จาก active-risk budget ได้โดยตรง

10.18 จาก Target Weights สู่จำนวนเงินจริง

การแปลงน้ำหนักเป็นคำสั่งซื้อขายต้องแยกกรณี *ก่อนต้นทุน* ออกจาก *หลังต้นทุน* หากยังไม่รวม transaction costs และมูลค่าพอร์ตก่อน trade คือ W^- target dollar holding คือ

$$V_i^* = w_i^* W^-, \qquad \Delta V_i = V_i^* - V_i^-$$

แต่หากต้องการให้ post-trade weights ตรงกับ target หลังหักต้นทุน ต้องใช้

$$W^+ = W^- - TC(\Delta \mathbf{v}), \qquad V_i^* = w_i^* W^+, \qquad \Delta V_i = V_i^* - V_i^-$$

ซึ่งเป็นระบบที่ TC ขึ้นกับ trades เอง จึงอาจต้องแก้พร้อมกันใน optimizer หรือทำ fixed-point iteration แทนการคำนวณ target values จาก W^- เพียงครั้งเดียว

ถ้าราคาต่อหน่วยคือ P_i จำนวนหน่วยเชิงทฤษฎีและจำนวนหน่วยหลังบังคับ lot size L_i คือ

$$q_i^* = \frac{V_i^*}{P_i}, \qquad \hat{q}_i = L_i \,\mathrm{round}\left(\frac{q_i^*}{L_i}\right)$$

หลัง rounding จะเกิด residual cash

$$C_{\text{res}} = W^{-} - \sum_i P_i \hat{q}_i - TC$$

ในระบบจริงอาจเลือก `floor`, `ceil` หรือ integer optimization แทน `round` ตามข้อจำกัดเงินสดและ lot size เพราะการปัดแบบอิสระทุกสินทรัพย์ไม่รับประกัน feasibility

ประเด็นที่ต้องระวัง

การ round ทุกสินทรัพย์อย่างอิสระ อาจทำให้ใช้เงินเกิน wealth หรือหลุด policy limits ขั้นตอน implementation จึงต้องตรวจ budget, lot size, cash residual, minimum trade size และ transaction costs หลัง rounding อีกครั้ง

10.19 Liability-Aware Asset Allocation

สำหรับผู้ลงทุนที่มีภาระผูกพัน การวิเคราะห์ wealth เพียงอย่างเดียวอาจไม่เพียงพอ

กำหนด surplus และ funding ratio เป็น

$$S_t = A_t - L_t, \qquad FR_t = \frac{A_t}{L_t} \quad (L_t > 0)$$

เมื่อ A_t คือ asset value และ L_t คือ present value ของ liabilities การจัดสรรที่เหมาะสมจึงขึ้นกับทั้งความเสี่ยงของสินทรัพย์และความไวของ liabilities ต่ออัตราดอกเบี้ย เงินเฟ้อ หรือปัจจัยอื่น หาก assets และ liabilities เคลื่อนไหวสัมพันธ์กัน การลด asset volatility เพียงอย่างเดียวอาจไม่ได้ลด surplus risk

เป้าหมายอาจเปลี่ยนจากการเพิ่ม

$$\mathbb{E}(R_A)$$

เป็นการควบคุม

$$\Pr(S_T < 0)$$

หรือ surplus volatility

$$\text{Var}(\Delta S)$$

ข้อสังเกต

Asset allocation สำหรับกองทุนบำนาญ บริษัทประกัน หรือผู้ลงทุนที่มี cash-flow commitments จึงควรพิจารณา liability characteristics ร่วมกับ asset risk ไม่ควรใช้ asset-only efficient frontier เป็นคำตอบสุดท้ายโดยอัตโนมัติ

10.20 Governance และ Policy Review

การเปลี่ยน strategic allocation ควรแยกจาก tactical rebalance

ตารางที่ 10.4: แยก Rebalancing ออกจาก Policy Review

	Rebalancing	Policy Review
คำถาม	กลับเข้า policy อย่างไร	policy เดิมยังเหมาะหรือไม่
Trigger	drift, calendar, risk limit	goal/liability/regime เปลี่ยน
Horizon	สั้นถึงกลาง	กลางถึงยาว
ผลลัพธ์	trade weights	อาจเปลี่ยน target และ ranges
Governance	execution rule	investment-policy decision

ตัวอย่าง policy-review triggers ได้แก่ liability change, large wealth change, liquidity requirement change, permitted-universe change และ material change in long-run assumptions ประเด็นเหล่านี้เป็นการเปลี่ยน *state ของผู้ลงทุนหรือนโยบาย* ไม่ใช่เพียง market drift จึงควรผ่านกระบวนการอนุมัติที่ต่างจากการ rebalance ปกติ

10.21 กรณีศึกษางานวิจัยและข้อควรระวัง

งานของ Witayakiattilerd และคณะศึกษาการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50 และตราสารหนี้คุณภาพสูงภายใต้กรอบ Modern Portfolio Theory [68]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: จากผลเชิงประจักษ์สู่ Policy Design

ข้อมูลเชิงประจักษ์สามารถใช้สาธิตกระบวนการ

$$\text{estimate inputs} \longrightarrow \text{construct feasible portfolios}$$
$$\longrightarrow \text{select policy} \longrightarrow \text{implement} \longrightarrow \text{rebalance}$$

แต่ optimal allocation จาก sample หนึ่งไม่ควรถูกตีความเป็น strategic allocation ปัจจุบันโดยอัตโนมัติ เพราะ expected returns, covariance, yields และ investment constraints เปลี่ยนตามเวลา

10.22 Investment Lab: Asset Allocation และ Rebalancing

Investment Lab: Excel: Policy Band และ Rebalancing Ticket

สร้างตารางอย่างน้อย 4 asset classes โดยมี

1. Target Weight
2. Lower Bound
3. Upper Bound
4. Current Value
5. Drifted Weight
6. Breach Indicator
7. Target Value
8. Trade Amount
9. Estimated Cost
10. Post-Trade Weight

ตรวจ budget identity, policy ranges, residual cash และ turnover หลัง trade

Investment Lab: Python: Dynamic Allocation Simulation

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `drift_weights(weights, returns)`
- `buy_and_hold(...)`
- `constant_mix(...)`
- `cppi(...)`
- `threshold_rebalance(...)`
- `hybrid_rebalance(...)`
- `turnover(...)`
- `transaction_cost(...)`
- `trade_ticket(...)`
- `rolling_allocation_backtest(...)`

unit tests ควรตรวจ wealth conservation ก่อนต้นทุน, weights sum to one, CPPI exposure cap, turnover convention, policy-band logic และ absence of look-ahead

10.23 การทดสอบแบบ Out-of-Sample

สำหรับ allocation rule $\mathcal{A}$

$$\mathsf{w}_t = \mathcal{A}(\mathcal{D}_t)$$

โดย $\mathcal{D}_t$ ต้องมีเฉพาะข้อมูลที่ทราบ ณ เวลา t

หลังตลาดเคลื่อน

$$\tilde{\mathsf{w}}_{t+1} = \mathcal{G}(\mathsf{w}_t, R_{t+1})$$

จากนั้น rebalancing rule $\mathcal{R}$ ให้

$$\mathsf{w}_{t+1} = \mathcal{R}(\tilde{\mathsf{w}}_{t+1}, \mathcal{I}_{t+1})$$

เมื่อ $\mathcal{I}_{t+1}$ เป็นข้อมูลที่มีอยู่จริง ณ เวลาตัดสินใจ ต้องกำหนด *decision clock* ให้ชัด เช่น ใช้ราคาปิดวันที่

$t+1$ เพื่อสร้างสัญญาณแล้วซื้อขายได้เร็วที่สุดเมื่อใด เพื่อป้องกันการใช้ราคาชุดเดียวกันทั้งสร้างสัญญาณและสมมติว่า execute ได้โดยไม่มี latency หรือ slippage

ถ้าคิดต้นทุนและกระแสเงินสดภายนอก ควรบันทึก wealth recursion แยกชั้น เช่น

$$W_{t+1} = W_{t+1}^{-} - TC_{t+1} + CF_{t+1}^{\text{ext}}$$

โดยต้องกำหนด convention ว่า external cash flow เกิดก่อนหรือหลังการ rebalance เพื่อให้ผลตอบแทนและ turnover คำนวณบนฐานเดียวกัน

ควรรายงานอย่างน้อย annualized return, annualized volatility, maximum drawdown, turnover, transaction cost และ policy deviation หรือ tracking error โดยควรรายงานทั้ง gross และ net performance เมื่อเป้าหมายคือการประเมิน implementability

ประเด็นที่ต้องระวัง

การเลือก threshold, calendar frequency หรือ CPPI multiplier หลังเห็นผล backtest ทั้งหมดทำให้เกิด data-snooping bias ควรแยก calibration period และ evaluation period หรือใช้ rolling design ที่กำหนดกฎล่วงหน้า

10.24 แผนที่จากบทนี้สู่บทที่ 11

บทนี้ตอบว่า “ควรกำหนด policy mix อย่างไรและจะปรับพอร์ตเมื่อใด” แต่ยังไม่ได้ตอบว่าเมื่อพอร์ตถูกนำไปใช้แล้วจะควบคุม tail loss, drawdown, scenario loss, VaR, ES และ hedge exposures อย่างไร

บทที่ 11 จะนำ risk measures จากบทที่ 3 มารวมกับ weights, exposures และ rebalancing dynamics เพื่อสร้างกรอบ Portfolio Risk Management

บทสรุปท้ายบท

Asset Allocation คือการกำหนดน้ำหนักระดับ asset class ให้สอดคล้องกับ IPS และไม่ควรถูกสับสนกับ Security Selection หรือ Market Timing

Strategic Asset Allocation กำหนด policy mix ระยะยาว ส่วน Tactical Asset Allocation เขียนได้เป็น

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}^S + \delta_t, \qquad \mathbf{1}^\top \delta_t = 0, \qquad \delta_t^\top \Sigma_t \delta_t \le \sigma_A^2$$

market returns ทำให้ weights drift ตาม

$$\widetilde{w}_{i,t+1} = \frac{w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})}{\sum_j w_{j,t}(1 + R_{j,t+1})}$$

Buy-and-Hold ปล่อย drift ขณะที่ Constant Mix ซื้อกลับเมื่อสินทรัพย์ underperform และขายเมื่อ outperform

CPPI ใช้

$$C_t = \max(W_t - F_t, 0), \qquad E_t = \min\{mC_t, W_t\}$$

เพื่อเชื่อม risky exposure กับ cushion แต่ยังมี gap risk โดยเงื่อนไข $L \le 1/m$ ใช้ได้ตรง ๆ เฉพาะช่วงที่ exposure ไม่ติด cap และสมมติฐาน one-period แบบง่ายเป็นจริง

Rebalancing สามารถเป็น calendar, threshold หรือ hybrid และควรพิจารณา no-trade region เมื่อมี transaction costs

Core–Satellite เขียนได้เป็น

$$\mathbf{w} = (1 - s)\mathbf{w}_C + s\mathbf{w}_S$$

และเมื่อ core เป็น benchmark tracking error แปรผันกับ satellite share ภายใต้ covariance และ compositions ที่กำหนด

ขั้นตอนสุดท้ายของ asset allocation คือการแปลง target weights เป็น trades ที่ปฏิบัติได้จริง โดยตรวจ lot size, liquidity, residual cash, turnover และ costs

การประเมิน allocation rule ต้องทำแบบ out-of-sample และแยก rebalancing decision ออกจาก strategic policy review

คำศัพท์สำคัญ

- Asset Allocation
- Strategic Asset Allocation
- Tactical Asset Allocation
- Dynamic Asset Allocation
- Integrated Asset Allocation
- Insured Asset Allocation
- Policy Portfolio
- Policy Range
- Tactical Tilt
- Active Risk
- Market Drift
- Buy-and-Hold
- Constant Mix
- CPPI
- Floor
- Cushion
- Multiplier
- Gap Risk
- Calendar Rebalancing
- Threshold Rebalancing
- Hybrid Rebalancing
- No-Trade Region
- Turnover
- Transaction Cost
- Core–Satellite
- Tracking Error
- Trade Ticket
- Residual Cash
- Liability-Aware Allocation
- Policy Review

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Asset Allocation, Security Selection และ Market Timing
2. อธิบายเหตุผลที่ตัวเลขประมาณ 90% จากงาน asset-allocation attribution ไม่ควรถูกตีความว่า 90% ของระดับผลตอบแทนเกิดจาก allocation
3. เขียน Integrated Asset Allocation เป็น state–decision–feedback system
4. สร้าง strategic policy weights 4 asset classes ที่รวมเป็นหนึ่งพร้อม policy ranges
5. อธิบายความแตกต่างระหว่าง risk capacity กับ risk willingness (risk tolerance)
6. ให้ $\mathbf{w}^S = (0.50, 0.30, 0.10, 0.10)^\mathsf{T}$ สร้าง tactical tilt ที่เพิ่มหุ้น 5 percentage points โดยรักษา fully invested constraint
7. พิสูจน์ว่า $\mathbf{1}^\mathsf{T}\delta_t = 0$ ทำให้ tactical portfolio ยังคง fully invested ถ้า strategic portfolio fully invested
8. เขียน active-risk constraint ของ tactical portfolio
9. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Tactical และ Dynamic Asset Allocation
10. อธิบายข้อจำกัดของการใช้คำว่า Conservative หรือ Aggressive โดยไม่มี IPS

11. พิสูจน์สูตร drifted weight หลังเกิด asset returns
12. คำนวณ drifted weights ของพอร์ต 60/40 เมื่อหุ้นลด 20% และสินทรัพย์ปลอดภัยไม่เปลี่ยน
13. คำนวณ trade amount เพื่อ rebalance พอร์ตดังกล่าวกลับ 60/40
14. พิสูจน์ว่า Constant Mix มีพฤติกรรม contrarian ในกรณีสองสินทรัพย์
15. เปรียบเทียบ Buy-and-Hold กับ Constant Mix ในตลาด trend และ oscillating market
16. ให้ $W = 2{,}000{,}000$, $F = 1{,}500{,}000$, $m = 2.5$ จงหา CPPI risky exposure
17. พิสูจน์ generalized CPPI gap condition $L \leq C_t/E_t$ และแสดงว่าเมื่อ $E_t = mC_t$ จะได้ $L \leq 1/m$
18. อธิบายว่า exposure cap เปลี่ยน gap condition ของ CPPI อย่างไร และเหตุใด CPPI ไม่รับประกัน floor เมื่อมี price gap
19. ออกแบบ calendar rebalancing policy รายไตรมาส
20. ออกแบบ absolute threshold bands สำหรับ policy 50/30/20
21. เขียน relative threshold trigger
22. อธิบาย Hybrid Rebalancing และเหตุผลที่อาจลด unnecessary trades
23. เปรียบเทียบ full rebalancing กับ partial rebalancing
24. คำนวณ two-way และ one-way turnover จาก trade vector ที่กำหนด
25. สร้าง linear transaction-cost model สำหรับพอร์ต 5 สินทรัพย์
26. อธิบายว่า fixed trading costs ทำให้ optimization structure เปลี่ยนอย่างไร
27. เขียน cost-aware rebalancing objective ที่รวม policy deviation กับ transaction cost
28. พิสูจน์ว่า tracking error ของ Core–Satellite Portfolio แปรผันกับ satellite share ภายใต้สมมติฐานในบท
29. แปลง target weights เป็น target values และจำนวนหน่วยภายใต้ lot size ที่กำหนด พร้อมอธิบายเหตุใด transaction cost ทำให้ post-trade wealth ต้องแก้พร้อมกับ trade ticket
30. ออกแบบ rolling out-of-sample experiment เปรียบเทียบ Buy-and-Hold, Constant Mix, threshold rebalancing และ CPPI หลัง transaction costs

คำถามชวนคิด

1. Strategic allocation ควรเปลี่ยนเมื่อราคาหุ้นลดลงมาก หรือควรเปลี่ยนเฉพาะเมื่อวัตถุประสงค์และ long-run assumptions เปลี่ยน
2. การไม่ rebalance เลยถือเป็นกลยุทธ์หนึ่งหรือเป็นการไม่มีนโยบาย

3. หาก transaction costs เป็นศูนย์ การ rebalance บ่อยที่สุดย่อมดีที่สุดหรือไม่
4. เหตุใด Constant Mix และ CPPI จึงตอบสนองต่อ price path ในทิศทางตรงข้ามกัน
5. Policy bands ควรกว้างเท่ากันทุก asset class หรือควรสัมพันธ์กับ volatility และ trading costs
6. สำหรับผู้ลงทุนที่มี liabilities ขนาดใหญ่ asset-only allocation มีข้อจำกัดอย่างไร

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 10

[8] Fischer Black and André F. Perold. “Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance”. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 16.3–4 (1992), pp. 403–426.

[11] Gary P. Brinson, L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower. “Determinants of Portfolio Performance”. In: *Financial Analysts Journal* 42.4 (1986), pp. 39–44.

[12] Gary P. Brinson, Brian D. Singer, and Gilbert L. Beebower. “Determinants of Portfolio Performance II: An Update”. In: *Financial Analysts Journal* 47.3 (1991), pp. 40–48.

[25] Roger G. Ibbotson and Paul D. Kaplan. “Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance?” In: *Financial Analysts Journal* 56.1 (2000), pp. 26–33.

[40] André F. Perold and William F. Sharpe. “Dynamic Strategies for Asset Allocation”. In: *Financial Analysts Journal* 44.1 (1988), pp. 16–27.

[50] William F. Sharpe. “Integrated Asset Allocation”. In: *Financial Analysts Journal* 43.5 (1987), pp. 25–32.

[68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

บทที่ 11 การบริหารความเสี่ยงของพอร์ต

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรสามารถ

1. สร้าง ตัวแปร ขาดทุน ของ พอร์ต คำนวณ Portfolio VaR และ Expected Shortfall ด้วย วิธี Parametric และ Historical Simulation และสร้าง conditional covariance ด้วย EWMA
2. แยกความเสี่ยงรวมด้วย Marginal VaR, Component VaR และ Euler decomposition
3. ตรวจ สอบ VaR model ด้วย exception rate, Violation Ratio, Kupiec test และ Christoffersen test
4. ออกแบบ historical, hypothetical และ reverse stress tests และเชื่อมผลลัพธ์กับ risk limits
5. ประเมิน concentration, liquidity, drawdown, factor และ basis risk ในระดับพอร์ต
6. ออกแบบ hedge ด้วย index futures, minimum-variance hedge ratio และ protective options
7. แยก ความ แตก ต่าง ระหว่าง risk measurement, risk limits, risk appetite และ risk governance
8. สร้าง risk dashboard ที่เชื่อม measurement, validation, stress, liquidity และ action
9. ออกแบบ rolling backtest โดยหลีกเลี่ยง look-ahead bias และตรวจ model deterioration

11.1 บทนำ: จากการวัดความเสี่ยงสู่การควบคุมความเสี่ยง

บทที่ 3 พัฒนามาตรวัดความเสี่ยงในระดับสินทรัพย์ บทที่ 6 รวมความเสี่ยงผ่าน covariance structure บทที่ 9 ใช้ความเสี่ยงเป็นส่วนหนึ่งของ objective และ constraints และบทที่ 10 เชื่อมพอร์ตกับ policy และ rebalancing บทนี้รวมองค์ประกอบเหล่านั้นเป็นวงจรการบริหารความเสี่ยงของพอร์ต

Positions → Measurement → Validation → Limits → Action → Review

บทนี้ครอบคลุม VaR/ES, Component VaR, backtesting, stress testing, liquidity, concentration และ hedging โดยจัดความสัมพันธ์ของเครื่องมือเหล่านี้ให้แยก *risk measurement* ออกจาก *risk management*

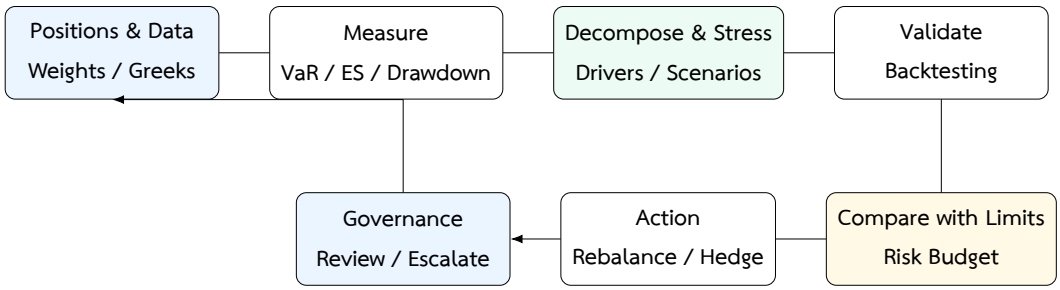
อย่างชัดเจน กล่าวคือ ตัวเลขความเสี่ยงมีหน้าที่บอกสถานะและความไม่แน่นอนของพอร์ต ส่วนการบริหารความเสี่ยงต้องนำตัวเลขนั้นไปเทียบกับความสามารถรับความเสียหาย ข้อจำกัด สภาพคล่อง และต้นทุนของการดำเนินการ ก่อนตัดสินใจว่าจะยอมรับ ลด โอน หรือหลีกเลี่ยงความเสี่ยง

บทนิยาม 11.1

ให้ $V_t > 0$ เป็นมูลค่าพอร์ตต้นงวด และ $R_{p,t+1}$ เป็นผลตอบแทนพอร์ตหนึ่งงวด นิยามขาดทุนเชิงมูลค่าเป็น

$$L_{t+1} = -V_t R_{p,t+1}$$

ดังนั้น $L_{t+1} > 0$ หมายถึงขาดทุน และ $L_{t+1} < 0$ หมายถึงกำไร



รูปที่ 11.1: วงจรการบริหารความเสี่ยงของพอร์ตจากข้อมูลและสถานะจริงไปสู่การวัด การตรวจสอบ การเทียบกับข้อจำกัด และการดำเนินการ

รูปที่ 11.1 เน้นว่าการวัดความเสี่ยงไม่ใช่ปลายทางของกระบวนการ ตัวเลขที่ได้ต้องย้อนตรวจกับข้อมูลและแบบจำลอง ผ่าน stress/backtest แล้วจึงนำไปเทียบกับ limit ก่อนเกิด action การจัดลำดับเช่นนี้ช่วยลดปัญหา “ตัวเลขถูกแต่การตัดสินใจผิด” เช่น VaR อยู่ในกรอบแต่พอร์ตมีสภาพคล่องไม่พอสำหรับการลดสถานะเมื่อเกิดวิกฤต

11.2 Risk Appetite, Risk Capacity และ Risk Limits

บทนิยาม 11.2

Risk capacity คือความสามารถทางเศรษฐกิจในการรับความเสียหายโดยไม่ทำให้เป้าหมายหรือภาระสำคัญเสียหาย

Risk tolerance คือระดับความไม่แน่นอนหรือการขาดทุนที่ผู้ลงทุนยอมรับได้ในทางพฤติกรรมและเชิงนโยบาย โดยในบริบทผู้ลงทุนรายบุคคลมีความหมายใกล้กับ risk willingness ที่ใช้ในบทต้นของตำรา

Risk appetite คือปริมาณและประเภทของความเสี่ยงที่องค์กรหรือผู้ลงทุนตั้งใจรับเพื่อบรรลุวัตถุประสงค์

Risk limit คือข้อจำกัดเชิงปฏิบัติที่แปลง risk appetite ไปเป็นตัวเลข กรอบ หรือ trigger ที่ตรวจสอบและบังคับใช้ได้

แนวคิดทั้งสี่อยู่คนละระดับ จึงไม่ควรใช้แทนกัน ตัวอย่างเช่น นักลงทุนอาจมี risk tolerance สูง แต่มี risk capacity ต่ำเพราะต้องใช้เงินในเวลาอันใกล้ ในกรณีนี้ limit ควรถูกกำหนดจากข้อจำกัดเชิงเศรษฐกิจที่เข้มกว่า ไม่ใช่จากความเต็มใจรับความผันผวนเพียงอย่างเดียว

ตารางที่ 11.1: ลำดับชั้นจากความสามารถรับความเสียหายสู่ข้อจำกัดที่ใช้ควบคุมพอร์ต

แนวคิด	คำถามหลัก	ตัวอย่างการนำไปใช้
Risk capacity	รับความเสียหายได้เท่าไร โดยไม่กระทบภาระหรือเป้าหมาย	liability, liquidity, drawdown budget
Risk tolerance	ยอมรับความผันผวนและการขาดทุนได้เพียงใด	suitability, behavioral constraint
Risk appetite	ตั้งใจรับความเสี่ยงใดเพื่อบรรลุวัตถุประสงค์	strategic risk budget
Risk limit	จุดควบคุมหรือ trigger ใดใช้บังคับพอร์ต	VaR/ES, beta, issuer, liquidity, leverage

ตัวอย่าง risk limits สามารถเขียนอย่างกระชับเป็น

$$\text{VaR}_{0.99,t} \le L_{\text{VaR}}, \qquad \text{ES}_{0.975,t} \le L_{\text{ES}}, \qquad TE_t \le L_{TE}, \qquad |\beta_t| \le L_{\beta}$$

รวมถึง position, sector, issuer, duration, FX, leverage, drawdown และ liquidity limits

ประเด็นที่ต้องระวัง

Risk limit ไม่ควรถูกเลือกจากค่าที่โมเดลปัจจุบันสามารถผ่านได้ง่าย แต่ควรเชื่อมกับ loss-bearing capacity, mandate, liquidity และ escalation process

11.3 Portfolio VaR

ให้ $\mathsf{R}_{t+1} \in \mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์ผลตอบแทน และ w_t เป็นน้ำหนักหรือ exposure weights ที่ทราบก่อนเกิดผลตอบแทนในงวดถัดไป จะได้

$$R_{p,t+1} = \mathsf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathsf{R}_{t+1}, \qquad \mathbb{E}_t(\mathsf{R}_{t+1}) = \mu_t, \qquad \mathrm{Var}_t(\mathsf{R}_{t+1}) = \Sigma_t$$

ดังนั้น

$$\mu_{p,t} = \mathsf{w}_t^{\mathsf{T}} \mu_t, \qquad \sigma_{p,t}^2 = \mathsf{w}_t^{\mathsf{T}} \Sigma_t \mathsf{w}_t$$

สูตรนี้ใช้ได้ทั้งพอร์ต long-only และพอร์ตที่มี short/leverage ตราบใดที่นิยาม w_t สอดคล้องกับมูลค่าฐาน V_t และ sign convention ของสถานะ

บทนิยาม 11.3

สำหรับ loss variable L และระดับความเชื่อมั่น $\alpha \in (0,1)$

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : \Pr(L \le \ell) \ge \alpha\}}$$

VaR เป็น quantile ของ loss distribution ไม่ใช่ maximum possible loss และไม่ได้บอกขนาดความเสียหายที่อยู่ลึกกว่าจุด quantile นั้น

ภายใต้ loss convention นี้ ค่า VaR ทางคณิตศาสตร์อาจเป็นลบได้หาก distribution ของผลตอบแทนอยู่ในแดนกำไรอย่างมาก การรายงานเชิงปฏิบัติจึงต้องระบุ convention ให้ชัด ไม่ควรบังคับให้ VaR เป็นศูนย์โดยไม่อธิบาย เพราะจะเปลี่ยนนิยามของตัววัด

11.3.1 Delta-Normal VaR

ถ้า

$$R_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$$

และนิยาม $L = -V_0 R_p$ จะได้

$$\mu_L = -V_0 \mu_p, \qquad \sigma_L = V_0 \sigma_p$$

ดังนั้น

Normal Portfolio VaR

$$\boxed{\text{VaR}_\alpha = V_0 \left(z_\alpha \sigma_p - \mu_p \right)}$$

เมื่อ

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$$

ตัวอย่าง 11.1. พอร์ตมูลค่า 10 ล้านบาท มี

$$\mu_p = 0.04\%$$

และ

$$\sigma_p = 1.20\%$$

ถ้า

$$z_{0.99} = 2.3263$$

จะได้

$$\text{VaR}_{0.99} = 10{,}000{,}000 \left[2.3263(0.012) - 0.0004 \right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\text{VaR}_{0.99} \approx 275{,}156 \text{ บาท}}$$

การตีความคือ ภายใต้ Normal model และ horizon 1 วัน quantile ของขาดทุนที่ระดับ 99% อยู่ประมาณ 275,156 บาท

ประเด็นที่ต้องระวัง

VaR ต้อง รายงาน พร้อม confidence level, horizon, currency, position date และ model specification ตัวเลข “VaR = 1 ล้านบาท” โดยไม่มีข้อมูลเหล่านี้ยังไม่สมบูรณ์ นอกจากนี้การแปลง one-day VaR เป็น h-day VaR ด้วยกฎ $\sqrt{h}$ ต้องอาศัยสมมติฐานเฉพาะ เช่น ความเป็นอิสระและความแปรปรวนคงที่ จึงไม่ควรใช้โดยอัตโนมัติในช่วงที่ volatility และ liquidity เปลี่ยนเร็ว

11.4 Expected Shortfall

บทนิยาม 11.4

Expected Shortfall ที่ระดับ α นิยามโดย

$$\boxed{\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L)\, \mathrm{d}u}$$

สำหรับ distribution ต่อเนื่องภายใต้เงื่อนไขปกติสามารถเขียนเป็น

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}\left[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\right]$$

ถ้า portfolio return เป็น Normal

Normal Expected Shortfall

$$\boxed{\text{ES}_\alpha = V_0\left[-\mu_p + \sigma_p \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha}\right]}$$

สำหรับตัวอย่างเดิม ที่ $\alpha = 0.99$

$$\frac{\phi(2.3263)}{0.01} \approx 2.6652$$

จึงได้

$$\text{ES}_{0.99} \approx 10{,}000{,}000\,[-0.0004 + 0.012(2.6652)]$$

หรือประมาณ

$$\boxed{315{,}824 \text{ บาท}}$$

ข้อสังเกต

VaR ตอบว่า tail เริ่มที่ใด ส่วน ES ตอบว่าหลังเข้าสู่ tail แล้วความเสียหายเฉลี่ยรุนแรงเพียงใด จากนิยามแบบอินทิกรัลและ monotonicity ของ quantile จะได้ $\text{ES}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ เมื่อค่าคาดหมายใน tail มีอยู่ ความสัมพันธ์นี้เป็น sanity check ที่สำคัญของ risk engine

Expected Shortfall มีบทบาทสำคัญใน tail-risk optimization และสามารถเขียนเป็น optimization problem ผ่าน auxiliary threshold ตามกรอบของ Rockafellar และ Uryasev [41] นอกจากนี้ ES มีคุณสมบัติ coherent risk measure ภายใต้เงื่อนไขมาตรฐาน ขณะที่ VaR อาจไม่เป็น subadditive สำหรับ distribution บางชนิด จึงควรเข้าใจว่าการเลือก VaR หรือ ES ไม่ใช่เพียงการเลือกระดับ confidence แต่เป็นการเลือกคุณสมบัติของ risk measure ด้วย [3]

11.5 Historical Simulation

Historical Simulation ใช้ empirical joint-return scenarios แทนการสมมติ distribution เฉพาะรูป จุดแข็งสำคัญคือการใช้เวกเตอร์ผลตอบแทนของวันเดียวกันทั้งชุด จึงรักษา dependence ที่เกิดขึ้นจริงระหว่างสินทรัพย์ในแต่ละ scenario ได้ดีกว่าการสุ่มแต่ละสินทรัพย์แยกจากกัน

ให้ historical return vectors เป็น

$$\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_T$$

ใช้ current weights กับทุก scenario

$$L_s = -V_0 \mathbf{w}^\top \mathbf{R}_s \qquad s = 1, \dots, T$$

จากนั้นเรียง losses

$$L_{(1)} \leq \cdots \leq L_{(T)}$$

และประมาณ quantile ที่ระดับ α

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha = \widehat{F}_L^{-1}(\alpha)$$

Historical ES คือค่าเฉลี่ยของ tail losses ตาม quantile convention ที่กำหนด ในตัวอย่างขนาดเล็ก quantile interpolation และการจัดการ observation ที่อยู่ตรง cutoff สามารถทำให้ VaR/ES ต่างกันได้ จึงควรบันทึก convention นี้ไว้ใน model specification

สำหรับพอร์ตเชิงเส้น การใช้ current weights กับ historical returns เป็นการ revalue ที่เพียงพอ แต่หากพอร์ตมี options หรือ payoff ไม่เชิงเส้น ควรนำ historical factor shocks ไป *full revaluation* หรือใช้ approximation ที่รวม gamma/vega มิฉะนั้น Historical Simulation อาจยังประเมิน tail ต่ำเกินจริงได้

ประเด็นที่ต้องระวัง

Historical Simulation ไม่สมมติ Normal distribution แต่ไม่ได้ปราศจากสมมติฐาน เพราะผลลัพธ์ขึ้นกับ sample window, stale prices, missing data, corporate actions, survivorship และความเป็นตัวแทนของ historical regimes

11.6 EWMA Covariance และ Conditional Risk

ในระดับพอร์ต EWMA สามารถอัปเดต covariance matrix เป็น

EWMA Covariance

$$\boxed{\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1-\lambda)\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}_{t-1}^{\mathsf{T}}}$$

โดย

$$0 < \lambda < 1$$

เมื่อ $\mathbf{u}_t$ เป็น return innovation ตาม mean convention ที่กำหนด

ทฤษฎีบท 11.1

ถ้า

$$\Sigma_{t-1} \succeq 0$$

และ

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

แล้ว

$$\Sigma_t \succeq 0$$

พิสูจน์. สำหรับ $\mathbf{a}$ ใด ๆ

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\Sigma_t\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\Sigma_{t-1}\mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_{t-1})^2 \geq 0$$

□

Conditional portfolio variance คือ

$$\sigma_{p,t}^2 = \mathbf{w}_t^{\mathsf{T}}\Sigma_t\mathbf{w}_t$$

น้ำหนักของ observation เก่าลดลงแบบเรขาคณิต ดังนั้น half-life โดยประมาณของน้ำหนักคือ

$$h_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\lambda)}$$

ค่า λ ที่สูงทำให้โมเดลมีความจำยาวและตอบสนองช้ากว่า ขณะที่ค่า λ ที่ต่ำตอบสนองต่อ shock ใหม่เร็วกว่า แต่มี estimation noise มากขึ้น

ข้อสังเกต

EWMA ทำให้ covariance ตอบสนองต่อข้อมูลใหม่ แต่ไม่ได้แก้ heavy tails หรือ nonlinear dependence โดยอัตโนมัติ covariance dynamics กับ distributional assumptions เป็นคนละชั้นของแบบจำลอง

11.7 Marginal VaR และ Component VaR

พิจารณา delta-normal VaR ที่ละ mean term เพื่อเน้น risk contribution โดยมอง $\mathbf{w}$ เป็น exposure vector ที่สามารถ perturb ได้เฉพาะที่ การตีความ derivative นี้จึงเป็น local sensitivity ไม่ใช่การบังคับให้ผลรวมของน้ำหนักคงที่ระหว่างการหาอนุพันธ์

$$\mathcal{V}(\mathbf{w}) = V_0 z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}$$

Marginal VaR คือ

$$\boxed{MVaR_i = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w_i} = V_0 z_\alpha \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p}}$$

Component VaR คือ

$$\boxed{CVaR_i^{\text{comp}} = w_i MVaR_i}$$

ทฤษฎีบท 11.2

ภายใต้ delta-normal homogeneous VaR

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} CVaR_i^{\text{comp}} = \mathcal{V}(\mathsf{w})}$$

พิสูจน์. จาก

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{(\Sigma \mathsf{w})_i}{\sigma_p}$$

จึงมี

$$\sum_i w_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w_i} = V_0 z_\alpha \frac{\mathsf{w}^\mathsf{T} \Sigma \mathsf{w}}{\sigma_p} = V_0 z_\alpha \sigma_p$$

□

เมื่อ $\mathcal{V}(\mathsf{w}) > 0$ สามารถนิยามสัดส่วนความเสี่ยงของสินทรัพย์ i เป็น

$$RC_i^{\text{VaR}} = \frac{CVaR_i^{\text{comp}}}{\mathcal{V}(\mathsf{w})}, \qquad \sum_i RC_i^{\text{VaR}} = 1$$

Component VaR บางตัวอาจติดลบได้หาก position นั้นช่วย hedge ความเสี่ยงรวมผ่าน covariance structure ดังนั้นเครื่องหมายลบไม่ได้แปลว่า position “ไม่มีความเสี่ยง” แต่แปลว่า ณ พอร์ตปัจจุบัน การเพิ่ม exposure เล็กน้อยช่วยลด VaR ในแบบจำลองนี้

ประเด็นที่ต้องระวัง

ตัวย่อ CVaR อาจหมายถึง Conditional Value at Risk ซึ่งมักใช้ในความหมายใกล้ Expected Shortfall ดังนั้นในบทนี้จะเขียน Component VaR เต็มคำเมื่อมีโอกาสสับสน

11.8 Factor Risk Decomposition

ให้ factor model เป็น

$$\mathsf{R} = B\mathsf{f} + \varepsilon$$

โดย

$$\text{Cov}(\mathsf{f}) = F, \qquad \text{Cov}(\varepsilon) = S, \qquad \text{Cov}(\mathsf{f}, \varepsilon) = 0$$

ภายใต้สมมติฐานว่า factor กับ idiosyncratic shocks ไม่สัมพันธ์กัน

$$\boxed{\Sigma = BFB^{\mathsf{T}} + S}$$

portfolio factor exposure คือ

$$\beta_p = B^{\mathsf{T}}\mathsf{w}$$

และ portfolio variance คือ

$$\sigma_p^2 = \mathsf{w}^{\mathsf{T}} BFB^{\mathsf{T}}\mathsf{w} + \mathsf{w}^{\mathsf{T}} S\mathsf{w}$$

หรือ

$$\boxed{\sigma_p^2 = \beta_p^{\mathsf{T}} F\beta_p + \mathsf{w}^{\mathsf{T}} S\mathsf{w}}$$

จึงแยก factor risk ออกจาก idiosyncratic risk ได้ ประโยชน์เชิงบริหารคือพอร์ตที่ดู diversified ตามจำนวนหลักทรัพย์อาจยังมี factor risk กระจุกตัว เช่น หุ้นหลายตัวอาจมี exposure ต่อ equity-market, duration หรือ FX factor ในทิศทางเดียวกัน

11.9 Concentration Risk

weight concentration สามารถวัดด้วย Herfindahl–Hirschman Index

$$HHI_w = \sum_{i=1}^{n} w_i^2$$

สำหรับ long-only fully invested portfolio

$$\frac{1}{n} \leq HHI_w \leq 1$$

และ effective number of positions คือ

$$\boxed{N_{\text{eff}} = \frac{1}{HHI_w}}$$

ทฤษฎีบท 11.3

สำหรับ long-only fully invested portfolio

$$HHI_w \geq \frac{1}{n}$$

พิสูจน์. จาก Cauchy–Schwarz

$$\left(\sum_i w_i\right)^2 \leq n \sum_i w_i^2$$

และ

$$\sum_i w_i = 1$$

จึงได้

$$1 \leq nHHI_w$$

□

ประเด็นที่ต้องระวัง

Weight concentration ไม่เท่ากับ risk concentration พอร์ตที่มีน้ำหนักกระจายเท่ากันอาจยังมี factor exposure กระจุกตัวสูงได้หากสินทรัพย์มีความสัมพันธ์กันมาก นอกจากนี้สูตร $1/n \le HHI_w \le 1$ และ $N_{\text{eff}} = 1/HHI_w$ มีความหมายตรงไปตรงมาสำหรับ long-only fully invested portfolio เท่านั้น สำหรับ long–short portfolio ควรพิจารณา gross exposure, factor concentration หรือ risk contributions เพิ่มเติม

11.10 Backtesting VaR

กำหนด exception indicator

$$\boxed{I_t = \mathbf{1}\{L_t > \text{VaR}_{\alpha,t}\}}$$

ถ้าแบบจำลอง calibrate ถูกต้องและนิยาม quantile/horizon สอดคล้องกัน

$$\mathbb{E}(I_t) \approx 1 - \alpha$$

สำหรับ distribution ต่อเนื่อง การใช้ $>$ หรือ $\ge$ แทบไม่ต่างกัน แต่ในข้อมูลไม่ต่อเนื่องหรือ historical quantile ที่มี ties ต้องกำหนด exception convention ให้ชัดเจน

11.10.1 Exception Rate และ Violation Ratio

ให้จำนวน exceptions เป็น

$$x = \sum_{t=1}^{N} I_t$$

exception rate และ Violation Ratio จึงเป็น

$$\hat{p} = \frac{x}{N}, \qquad \boxed{VR = \frac{x}{N(1-\alpha)}}$$

ค่าใกล้หนึ่งหมายถึงจำนวน exceptions ใกล้ค่าคาดหมาย แต่ VR ไม่ตรวจว่าการเกิด exceptions กระจุกตัวหรือไม่

11.10.2 Kupiec Unconditional Coverage Test

กำหนด

$$p_0 = 1 - \alpha$$

และ

$$\hat{p} = \frac{x}{N}$$

เมื่อ x คือจำนวน exceptions

Kupiec Test

$$\boxed{LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{(1-p_0)^{N-x} p_0^x}{(1-\hat{p})^{N-x} \hat{p}^x} \right]}$$

ภายใต้ H_0

$$LR_{uc} \overset{a}{\sim} \chi^2_1$$

Kupiec test ตรวจ unconditional coverage [29] ในการคำนวณจริงต้องจัดการกรณี $x = 0$ หรือ $x = N$ ด้วย log-likelihood โดยใช้ limit convention ที่เหมาะสม แทนการประเมินรูป 0^0 โดยตรง

11.10.3 Christoffersen Independence Test

ให้ n_{ij} เป็นจำนวน transition

$$I_{t-1} = i \to I_t = j$$

เมื่อ $i, j \in \{0, 1\}$

กำหนด transition probabilities

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \qquad \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \qquad \hat{\pi} = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

ถ้า exceptions เป็นอิสระ ความน่าจะเป็นที่จะเกิด exception ในงวดถัดไปไม่ควรขึ้นกับว่างวดก่อนหน้าเป็น exception หรือไม่ กล่าวคือควรมี $\pi_{01} = \pi_{11}$

likelihood ภายใต้ independence และ first-order Markov alternative เขียนได้เป็น

$$L_0 = (1-\hat{\pi})^{n_{00}+n_{10}}\hat{\pi}^{n_{01}+n_{11}},$$

$$L_1 = (1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}}\hat{\pi}_{01}^{n_{01}}(1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}}\hat{\pi}_{11}^{n_{11}}$$

จึงได้

$$\boxed{LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right)} \overset{a}{\sim} \chi_1^2$$

และ Christoffersen conditional coverage statistic คือ

$$\boxed{LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}} \overset{a}{\sim} \chi_2^2$$

[15]

ข้อสังเกต

แบบจำลองอาจผ่าน coverage แต่ไม่ผ่าน independence ถ้าจำนวน exceptions รวมถูกต้องแต่ exceptions กระจุกตัวในช่วงวิกฤต การผ่าน VaR backtest ก็ยังไม่ใช่หลักฐานโดยตรงว่า ES ถูก calibrate เพราะ exception tests ตรวจตำแหน่ง quantile เป็นหลัก ขณะที่ ES ต้องประเมินขนาดความเสียหายใน tail เพิ่มเติมหรือใช้ joint VaR–ES validation ที่เหมาะสม

11.11 Three-Zone และ Model Governance

จำนวน exceptions สามารถเทียบกับ

$$K \sim \text{Binomial}\,(N, 1-\alpha)$$

โดย

$$\Pr(K \le k) = \sum_{j=0}^{k}\binom{N}{j}(1-\alpha)^j\alpha^{N-j}$$

แนวคิด zone classification ช่วยแปลงจำนวน exceptions เป็น escalation framework แต่ threshold ต้องระบุให้ตรงกับ confidence level, จำนวน observations และ framework ที่ใช้อ้างอิง ไม่ควรนำ cutoff จากการทดสอบชุดหนึ่งไปใช้กับอีกชุดโดยอัตโนมัติ ในเชิงคณิตศาสตร์สามารถกำหนดเขตจาก tail probability ของ Binomial distribution แล้วเชื่อมแต่ละเขตกับระดับการ review, model override หรือ capital/risk-limit action ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

งานเชิงประจักษ์ของผู้เขียนเปรียบเทียบ Normal EWMA กับ Historical Simulation และใช้ Violation Ratio, Three-Zone และการตรวจ tail loss เพื่อประเมินแบบจำลอง [71]

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: หลักการอ่านผลการทดสอบย้อนหลัง

ผลจากตัวอย่างหุ้นหรือช่วงเวลาในอดีตควรถูกใช้เป็นกรณีศึกษาของ model validation ไม่ใช่การจัดอันดับความเสี่ยงปัจจุบัน
สิ่งที่ควรนำไปใช้ต่อคือกระบวนการ

$$\text{Forecast} \longrightarrow \text{Realized Loss} \longrightarrow \text{Exception}$$
$$\longrightarrow \text{Statistical Test} \longrightarrow \text{Model Review}$$

11.12 Stress Testing

VaR และ ES เป็น distribution-based risk measures ขณะที่ stress testing ตั้งคำถามว่า

ถ้า shock รุนแรงเกิดขึ้น พอร์ตจะเสียหายเท่าไร

11.12.1 Historical Stress

นำ shock vector จากเหตุการณ์จริง

$$\Delta \mathbf{x}^{(s)}$$

มาใช้กับ exposures ปัจจุบัน

11.12.2 Hypothetical Stress

สร้าง scenario จาก economic narrative เช่น

$$\text{Equity} = -20\%$$

$$\Delta y = +150 \text{ bp}$$

$$\text{FX shock} = +10\%$$

และ

$$\text{Credit spread} = +200 \text{ bp}$$

11.12.3 Linear Stress Loss

ถ้า $\mathbf{e}$ เป็น exposure vector และ $\Delta\mathbf{x}$ เป็น factor shocks การเปลี่ยนมูลค่าพอร์ตโดยประมาณคือ

$$\Delta V \approx \mathbf{e}^{\mathsf{T}} \Delta \mathbf{x}$$

ภายใต้ loss convention ของบทนี้ stress loss จึงต้องกลับเครื่องหมายเป็น

$$\boxed{L^{\text{stress}} \approx -\mathbf{e}^{\mathsf{T}} \Delta \mathbf{x}}$$

สำหรับ nonlinear instruments ควรเพิ่ม second-order terms เช่น delta–gamma approximation

$$\Delta V \approx \Delta^{\mathsf{T}} \Delta S + \frac{1}{2} \Delta S^{\mathsf{T}} \Gamma \Delta S + \nu^{\mathsf{T}} \Delta \sigma$$

เมื่อ scenario มี volatility shock ด้วย และยังคงใช้ $L^{\text{stress}} = -\Delta V$ เพื่อรักษา sign convention ให้สอดคล้องกับ VaR/ES

11.12.4 Reverse Stress Testing

กำหนด loss threshold L^* ก่อน แล้วถามว่า scenario ใดทำให้

$$L(\Delta \mathbf{x}) \geq L^*$$

บทนิยาม 11.5

Reverse stress testing เริ่มจาก “ความล้มเหลวหรือความเสียหายที่ไม่ยอมรับ” แล้วค้นหา scenario ที่นำไปสู่จุดนั้น จึงช่วยเปิดเผย vulnerability ที่อาจไม่อยู่ใน historical scenario library

หาก มี มาตร วัด ความ รุนแรง หรือ ความ เป็น ไป ได้ ของ scenario เช่น $d(\Delta \mathbf{x})$ ปัญหา สามารถ เขียน เชิง optimization ได้เป็น

$$\min_{\Delta \mathbf{x}} d(\Delta \mathbf{x}) \qquad \text{s.t.} \qquad L(\Delta \mathbf{x}) \geq L^*$$

ซึ่งช่วยตอบคำถามว่า “scenario ที่ใกล้ภาวะปกติที่สุดแต่ยังทำให้พอร์ตเสียหายเกินระดับวิกฤตคืออะไร”

11.13 Correlation Stress และ Diversification Breakdown

ในช่วงวิกฤต correlations อาจสูงขึ้นพร้อมกัน วิธี stress ที่รักษาโครงสร้าง correlation matrix ได้โดยตรงคือดึงเมทริกซ์เดิมเข้าหา perfect-correlation matrix

$$P^{\text{stress}} = (1-\eta)P + \eta \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}, \qquad 0 \leq \eta \leq 1$$

ดังนั้นสำหรับ $i \neq j$

$$\rho_{ij}^{\text{stress}} = (1-\eta)\rho_{ij} + \eta$$

และ diagonal ยังคงเท่ากับหนึ่ง เนื่องจากทั้ง P และ $\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$ เป็น positive semidefinite เมทริกซ์ P^{stress} จึงเป็น PSD เช่นกันภายใต้การผสมแบบ convex นี้

จากนั้นสร้างและคำนวณ

$$\Sigma^{\text{stress}} = D_\sigma P^{\text{stress}} D_\sigma, \qquad \sigma_{p,\text{stress}} = \sqrt{\mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma^{\text{stress}} \mathbf{w}}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

ข้อสรุปเรื่อง PSD ข้างต้นใช้กับ stress construction แบบ convex blend นี้โดยเฉพาะ หากปรับ correlation รายคู่แบบ ad hoc หรือกำหนด shock ต่างกันแต่ละคู่ ต้องตรวจ symmetry, diagonal และ positive semidefiniteness ใหม่ก่อนนำไปใช้

11.14 Liquidity Risk

Market-risk number ที่คำนวณจากราคากลางอาจต่ำกว่าความเสียหายจริงเมื่อพอร์ตต้องขายในตลาดที่สภาพคล่องต่ำ

ให้มูลค่าสถานะของสินทรัพย์ i เป็น V_i^{pos} และ Average Daily Value Traded เป็น ADV_i ซึ่งอยู่ในหน่วยเงินเดียวกัน days-to-liquidate approximation คือ

$$\boxed{DTL_i = \frac{|V_i^{\text{pos}}|}{\kappa_i ADV_i}}, \qquad 0 < \kappa_i \leq 1$$

เมื่อ κ_i เป็น participation rate ที่ยอมรับได้ หากใช้จำนวนหุ้นแทนมูลค่า ต้องเปลี่ยนทั้งตัวเศษและ ADV ให้อยู่ในหน่วยจำนวนหุ้นเช่นเดียวกันเพื่อรักษา dimensional consistency

simple liquidity-adjusted loss สามารถเขียนเป็น

$$L_i^{liq} = L_i^{mkt} + C_i^{spread} + C_i^{impact}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

DTL_i เป็น capacity approximation ไม่ใช่คำรับประกันว่าจะขายได้ครบภายในจำนวนวันดังกล่าว เพราะ ADV, spread และ market depth สามารถลดลงพร้อมกันในภาวะ stress การคูณ one-day VaR ด้วย $\sqrt{h}$ เพื่อสร้าง multi-day VaR ก็อาศัยสมมติฐาน scaling ที่อาจไม่เหมาะเมื่อ volatility เปลี่ยนตามเวลา returns มี serial dependence หรือ liquidation itself มี market impact

11.15 Drawdown Risk และ Path Dependence

ให้ wealth process เป็น

$$W_t$$

running peak คือ

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$$

drawdown คือ

$$DD_t = 1 - \frac{W_t}{M_t}$$

และ Maximum Drawdown

$$\boxed{MDD = \max_t DD_t}$$

VaR เป็น distributional measure ที่ horizon หนึ่ง ส่วน drawdown เป็น path-dependent measure จึงตอบคำถามคนละชนิด พอร์ตสองพอร์ตอาจมี one-day VaR ใกล้กันแต่มี MDD ต่างกันมาก หากพอร์ตหนึ่งเกิดการขาดทุนต่อเนื่องหลายงวด นอกจากนี้ MDD ไม่บอกระยะเวลาที่ใช้ฟื้นกลับสู่จุดสูงสุดเดิม จึงควรพิจารณา drawdown duration ควบคู่เมื่อประเมินความเสี่ยงต่อเป้าหมายระยะยาว

11.16 การ Hedge ด้วย Index Futures

ให้ equity portfolio value เป็น V_P และ portfolio beta เทียบ index เป็น β_P

ถ้า futures contract มีราคา F_0 และ multiplier q

notional ต่อสัญญาคือ

$$V_F = F_0 q$$

ให้ β_F เป็น beta ต่อ notional ของ futures เทียบกับดัชนีเดียวกัน ซึ่งโดยประมาณมักใกล้หนึ่ง หากนิยามจำนวนสัญญาแบบมีเครื่องหมาย โดย $N_F > 0$ หมายถึง long และ $N_F < 0$ หมายถึง short จำนวนสัญญาที่ทำให้ beta เข้าใกล้เป้าหมาย β^* คือ

Beta Hedge

$$\boxed{N_F^{\text{signed}} = \frac{(\beta^* - \beta_P)V_P}{\beta_F F_0 q}}$$

สูตรนี้ทำให้ทิศทาง hedge ชัดเจน: ถ้า $\beta^* < \beta_P$ จะได้ $N_F^{\text{signed}} < 0$ และต้อง short futures ส่วนการ

เพิ่ม beta จะใช้ long futures

ตัวอย่าง 11.2. พอร์ตหุ้นมูลค่า

$$V_P = 50{,}000{,}000$$

มี

$$\beta_P = 1.20$$

ต้องการลดเป็น

$$\beta^* = 0.30$$

ถ้า futures price เท่ากับ 900 และ multiplier เท่ากับ 200 บาทต่อจุด

$$F_0 q = 180{,}000$$

สมมติ $\beta_F \approx 1$ จะได้

$$N_F^{\text{signed}} = \frac{(0.30 - 1.20)50{,}000{,}000}{180{,}000} = -250$$

จึงต้องใช้ short futures ประมาณ 250 สัญญา หลังปัดจำนวนสัญญาเป็นจำนวนเต็มควรคำนวณ residual beta ใหม่ เพราะ hedge ที่ทำได้จริงอาจไม่ตรงเป้าหมายพอดี

ประเด็นที่ต้องระวัง

Beta hedge ไม่ได้กำจัด basis risk, tracking error, nonlinear exposure, liquidity risk หรือการเปลี่ยนแปลงของ beta และ notional ของ futures เปลี่ยนตามราคา จึงต้องติดตาม residual exposure หลังการ hedge ไม่ใช่คำนวณเพียงครั้งเดียวแล้วถือว่าความเสี่ยงถูกล็อกถาวร

11.17 Minimum-Variance Hedge Ratio

ให้ ΔS เป็นการเปลี่ยนแปลงของ spot exposure และ ΔF เป็นการเปลี่ยนแปลงของ futures

hedged change คือ

$$\Delta H = \Delta S - h\Delta F$$

ความแปรปรวนคือ

$$\text{Var}(\Delta H) = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\sigma_{SF}$$

หาอนุพันธ์ตาม h

$$\frac{\partial}{\partial h}\text{Var}(\Delta H) = 2h\sigma_F^2 - 2\sigma_{SF}$$

ตั้งเท่ากับศูนย์ และสังเกตว่าอนุพันธ์อันดับสองเท่ากับ $2\sigma_F^2 > 0$ เมื่อ $\sigma_F^2 > 0$ จึงเป็นจุดต่ำสุด จะได้

ทฤษฎีบท 11.4

Minimum-variance hedge ratio คือ

$$\boxed{h^* = \frac{\text{Cov}(\Delta S, \Delta F)}{\text{Var}(\Delta F)} = \rho_{SF}\frac{\sigma_S}{\sigma_F}}$$

จำนวนสัญญาจึงต้องปรับด้วย hedge ratio และขนาด exposure ที่เกี่ยวข้อง หาก h^* ประมาณจากการเปลี่ยนแปลงราคาที่มีหน่วยเดียวกัน จำนวนสัญญาโดยทั่วไปมีรูป $N^* = h^*(Q_S/Q_F)$ เมื่อ Q_S และ Q_F คือขนาดหน่วยของ spot exposure และ futures contract ตามลำดับ หากใช้ returns แทน price changes ต้องตีความ h^* เป็น notional hedge ratio และตรวจหน่วยให้สอดคล้องก่อนแปลงเป็นจำนวนสัญญา

11.18 Protective Put

สำหรับสินทรัพย์หนึ่งหน่วยและ put หนึ่งหน่วยที่ strike K

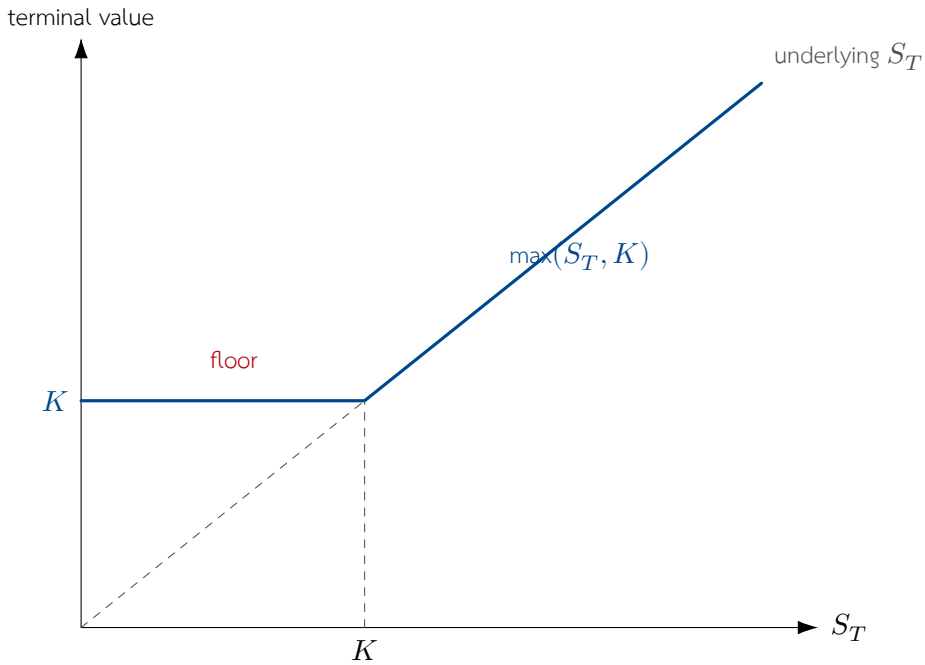
terminal payoff ก่อนหัก premium คือ

$$S_T + (K - S_T)^+$$

ดังนั้น

$$\boxed{S_T + (K - S_T)^+ = \max(S_T, K)}$$

จึงสร้าง terminal asset-value floor ที่ K ก่อนพิจารณา option premium และ financing cost อย่างไรก็ตาม “floor ของมูลค่าปลายงวด” ไม่เท่ากับ “floor ของกำไรสุทธิ” เพราะผู้ลงทุนต้องจ่าย premium ตั้งแต่ต้น และอาจมีต้นทุนเงินทุน ดังนั้นการเปรียบเทียบกับกลยุทธ์ไม่ hedge ต้องใช้ต้นทุนเริ่มต้นทั้งหมดในฐานเดียวกัน



รูปที่ 11.2: Protective put สร้าง floor ของมูลค่าปลายงวดที่ K ก่อนหัก option premium และ financing cost

11.19 Delta, Gamma และ Vega Limits

สำหรับ option portfolio สามารถวัด local sensitivities หลักได้เป็น

$$\Delta_P = \frac{\partial V}{\partial S}, \qquad \Gamma_P = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \qquad \nu_P = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

ถ้า hedge instrument หนึ่งหน่วยมี delta Δ_H

จำนวนหน่วยสำหรับ local delta-neutral hedge คือ

$$\boxed{n_H = -\frac{\Delta_P}{\Delta_H}}$$

แต่ delta เปลี่ยนตามราคา เวลา และ volatility จึงต้องพิจารณา re-hedging cost, gamma, vega และ liquidity การกำหนด limit จึงอาจเขียนในรูป $|\Delta_P| \le L_\Delta$, $|\Gamma_P| \le L_\Gamma$ และ $|\nu_P| \le L_\nu$ โดยต้องระบุหน่วยและ shock size ที่ใช้ตีความ Greek แต่ละตัว

การ hedge แบบไม่ต่อเนื่องยังมี *gap risk* ระหว่างเวลาที่ปรับ hedge เพราะราคาสามารถกระโดดหรือเคลื่อนมากก่อนทำธุรกรรมรอบถัดไปได้ ดังนั้น delta-neutral ณ เวลา t ไม่ได้หมายความว่าพอร์ตปลอดความเสี่ยงตลอดช่วง $[t, t+1]$

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: Parameter Uncertainty และ Hedging Range

สำหรับ derivative models ที่ parameters ไม่ทราบแน่นอน การรายงาน point Greek เพียงค่าเดียวอาจให้ความมั่นใจมากเกินไป แนวคิด robust หรือ ambiguity-aware hedging สามารถรายงาน

$$\Delta \in [\Delta_L, \Delta_U]$$

และ

$$\text{VaR} \in [\text{VaR}_L, \text{VaR}_U]$$

แล้วออกแบบ hedge ที่ยังยอมรับได้ภายใต้ช่วง parameter uncertainty

11.20 Basis Risk และ Hedge Effectiveness

ถ้า spot กับ hedge instrument ไม่เคลื่อนไหวเหมือนกันทั้งหมด residual risk หลัง hedge คือ

$$\text{Var}(\Delta S - h\Delta F)$$

ที่ $h = h^*$ จะได้

$$\text{Var}(\Delta H^*) = \sigma_S^2 \left(1 - \rho_{SF}^2\right)$$

ดังนั้นภายใต้ simplified two-variable variance framework

$$\boxed{HE = 1 - \frac{\text{Var}(\Delta H^*)}{\text{Var}(\Delta S)} = \rho_{SF}^2}$$

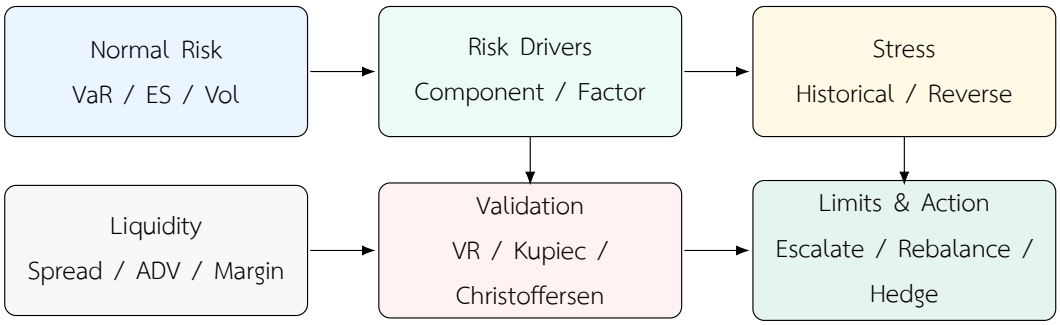
ข้อสังเกต

ผล $HE = \rho^2$ ใช้กับ minimum-variance linear hedge ภายใต้สมมติฐานของแบบจำลองนี้ ไม่ใช่กฎสากลสำหรับ hedge ทุกชนิด เมื่อ $|\rho| = 1$ residual variance เป็นศูนย์ในแบบจำลองเชิงเส้นนี้ แต่ในโลกจริงยังอาจเหลือ liquidity, rollover, discrete-hedging และ model risk

11.21 Risk Dashboard และ Escalation

risk dashboard ที่มีประโยชน์ควรตอบอย่างน้อยหกคำถาม

1. พอร์ตเสี่ยงเท่าไรภายใต้ normal conditions
2. อะไรเป็นตัวขับความเสี่ยง
3. ถ้าเกิด stress จะเสียเท่าไร
4. position สามารถขายหรือ hedge ได้จริงหรือไม่
5. risk model ยัง calibrate ดีหรือไม่
6. เมื่อ limit ถูก breach ต้องดำเนินการอะไร



รูปที่ 11.3: Risk dashboard ที่เชื่อมระดับความเสี่ยง ตัวขับความเสี่ยง stress สภาพคล่อง การตรวจสอบโมเดล และ action ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

Dashboard ที่ดีควรแสดงทั้ง *value*, *limit*, *headroom*, *trend*, as-of time และผู้รับผิดชอบ action เมื่อเกิด breach การแสดงตัวเลขจำนวนมากโดยไม่ระบุ threshold หรือ owner อาจเพิ่มข้อมูลแต่ไม่ได้เพิ่มคุณภาพการควบคุมความเสี่ยง

11.22 Model Risk และ Data Governance

Risk engine มีอย่างน้อยสี่ชั้นของความเสี่ยง

1. **Data risk** เช่น missing data, stale prices และ incorrect corporate-action adjustment
2. **Estimation risk** เช่น covariance และ tail quantiles ที่ไม่เสถียร
3. **Model risk** เช่น Normal assumption หรือ linear exposure ที่ไม่เหมาะ
4. **Implementation risk** เช่น wrong position sign, multiplier, currency conversion หรือ timestamp

Point-in-Time Risk Data

สำหรับทุก risk report ควรบันทึก

position timestamp

market-data timestamp

model version

parameter version

confidence level and horizon

currency and unit

เพื่อให้สามารถ reproduce risk number ที่รายงานในอดีตได้

11.23 Investment Lab: Portfolio Risk Engine

Investment Lab: Excel: Daily Risk Ticket

สร้าง workbook อย่างน้อย 7 sheets

1. **Positions**
2. **Returns**
3. **VaR-ES**
4. **Contributions**
5. **Backtest**
6. **Stress-Liquidity**
7. **Hedge**

แยก hardcoded assumptions ออกจาก formulas และตรวจ position date, confidence level, horizon, covariance convention, risk limits และ hedge multipliers

Investment Lab: Python: Portfolio Risk Management Engine

สร้างหรือปรับโมดูลให้มีฟังก์ชันอย่างน้อย

- `portfolio_loss(returns, weights, value)`
- `historical_var_es(losses, alpha)`

- `normal_var_es(mu, sigma, value, alpha)`
- `ewma_covariance(returns, lambda)`
- `component_var(weights, cov, value, alpha)`
- `kupiec_test(exceptions, alpha)`
- `christoffersen_test(exceptions)`
- `stress_loss(exposures, shocks)`
- `days_to_liquidate(position, adv, participation)`
- `futures_hedge_contracts(...)`
- `minimum_variance_hedge_ratio(...)`

unit tests ควรตรวจ sign convention, VaR/ES ordering, EWMA PSD, Euler decomposition, exception counting, transition counts, futures multiplier และ absence of look-ahead

11.24 Rolling Validation และ Model Comparison

สำหรับ forecast ที่เวลา t

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,t+1} = g(\mathcal{D}_t)$$

โดย $\mathcal{D}_t$ ต้องมีเฉพาะข้อมูลที่ทราบ ณ เวลา t

หลังจากนั้นจึงสังเกต

$$L_{t+1}$$

และสร้าง

$$I_{t+1} = \mathbf{1}\{L_{t+1} > \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,t+1}\}$$

กระบวนการนี้ทำซ้ำแบบ rolling

$$\mathcal{D}_t \to \widehat{\mathrm{VaR}}_{t+1} \to L_{t+1} \to I_{t+1} \to \text{validation}$$

การเปรียบเทียบโมเดลไม่ควรดูเพียงจำนวน exceptions แต่ควรพิจารณา coverage, independence, ขนาด tail

loss เมื่อเกิด exception, responsiveness ต่อ regime ใหม่, numerical stability และความซับซ้อนของโมเดล ร่วมกัน สำหรับ horizon หลายวัน หากใช้ overlapping forecasts ลำดับ exceptions อาจมี dependence เชิงโครงสร้างเพิ่มขึ้น จึงต้องเลือกวิธีทดสอบให้สอดคล้องกับ sampling scheme

ประเด็นที่ต้องระวัง

การประมาณโมเดลด้วยข้อมูลที่รวมวันที่กำลังทดสอบอยู่ทำให้เกิด look-ahead bias และทำให้ backtest ไม่ใช่การประเมิน forecast จริง

11.25 สะพานสู่การประเมินผลการบริหารพอร์ต

การลด VaR หรือ drawdown ไม่ใช่เป้าหมายสุดท้ายเสมอไป เพราะการ hedge และการลด exposure มีต้นทุน และอาจลด expected return

ดังนั้นหลังจากวัดและควบคุมความเสี่ยงแล้ว ต้องถามต่อว่า portfolio manager สร้างผลตอบแทนได้คุ้มกับความเสี่ยงที่รับหรือไม่ ซึ่งนำไปสู่บทที่ 12

บทสรุปท้ายบท

Portfolio Risk Management ไม่ใช่การคำนวณ VaR เพียงตัวเลขเดียว แต่เป็นวงจร

$$\text{Measure} \longrightarrow \text{Decompose/Stress} \longrightarrow \text{Validate} \longrightarrow \text{Limit} \longrightarrow \text{Act} \longrightarrow \text{Review}$$

สำหรับ loss variable

$$L = -V_0 R_p$$

VaR เป็น quantile ของ loss distribution ขณะที่ Expected Shortfall วัดความเสียหายเฉลี่ยใน tail

ภายใต้ Normal model

$$\text{VaR}_\alpha = V_0(z_\alpha \sigma_p - \mu_p)$$

และ

$$\text{ES}_\alpha = V_0 \left[-\mu_p + \sigma_p \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \right]$$

Component VaR ช่วยแยก risk budget และภายใต้ homogeneous delta-normal formulation มี Euler decomposition

$$\sum_i CVaR_i^{\text{comp}} = \text{VaR}$$

VaR model ต้องถูก backtest ทั้ง coverage และ independence ด้วยเครื่องมือ เช่น Kupiec และ Christoffersen tests

Stress testing, concentration, liquidity และ drawdown เติมมิติที่ VaR/ES ไม่ครอบคลุมทั้งหมด

การ hedge ด้วย futures สามารถควบคุม beta exposure และ minimum-variance hedge ratio คือ

$$h^* = \frac{\text{Cov}(\Delta S, \Delta F)}{\text{Var}(\Delta F)}$$

Protective put เปลี่ยน downside payoff เป็น floor แต่มี premium และ model/market frictions

risk dashboard ที่ดีต้องเชื่อม risk numbers เข้ากับ limits, escalation, rebalancing และ hedging actions พร้อมเก็บ point-in-time data เพื่อ audit และ reproduce ผลได้

คำศัพท์สำคัญ

- Risk Capacity
- Risk Tolerance
- Risk Appetite
- Risk Limit
- Loss Variable
- Value at Risk
- Expected Shortfall
- Historical Simulation
- EWMA
- Marginal VaR
- Component VaR
- Euler Decomposition
- Factor Risk
- Idiosyncratic Risk
- Concentration Risk
- Effective Positions

- Exception
- Violation Ratio
- Kupiec Test
- Christoffersen Test
- Conditional Coverage
- Stress Testing
- Reverse Stress Testing
- Correlation Stress
- Liquidity Risk
- Days to Liquidate
- Maximum Drawdown
- Beta Hedge
- Hedge Ratio
- Basis Risk
- Protective Put
- Delta Hedge
- Gap Risk
- Model Risk
- Risk Dashboard

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง risk measurement กับ risk management
2. แยก risk capacity, risk tolerance, risk appetite และ risk limit
3. ให้พอร์ตมูลค่า 20 ล้านบาท มี $\mu_p = 0.03\%$ และ $\sigma_p = 1.5\%$ จงหา Normal VaR 95% และ 99%
4. ใช้ข้อมูลข้อก่อนหน้าคำนวณ Normal ES 95% และ 99%
5. อธิบายเหตุผลที่ ES ไม่ควรต่ำกว่า VaR ภายใต้ loss convention และ continuous tail setting
6. สร้าง Historical Simulation VaR จาก loss observations 250 ค่า
7. อธิบายผลของ quantile interpolation rule ต่อ Historical VaR
8. พิสูจน์ว่า EWMA covariance recursion รักษา PSD
9. เปรียบเทียบผลของ $\lambda = 0.94$ กับ $\lambda = 0.99$ ต่อ responsiveness ของ EWMA
10. หา Marginal VaR และ Component VaR ของพอร์ตสามสินทรัพย์จาก covariance matrix ที่กำหนด
11. พิสูจน์ Euler decomposition ของ delta-normal VaR
12. อธิบายว่าทำไม Component VaR ของบาง position จึงอาจติดลบ
13. จาก factor covariance F, loadings B และ idiosyncratic covariance S จงสร้าง total covariance matrix
14. พิสูจน์ $HHI_w \geq 1/n$ สำหรับ long-only fully invested portfolio
15. คำนวณ effective number of positions ของพอร์ต 40/30/20/10
16. ให้ VaR 99% backtest 500 วันและมี exceptions 9 ครั้ง จงหา Violation Ratio
17. อธิบายความแตกต่างระหว่าง exception rate กับ independence

18. เขียน likelihood ของ Kupiec unconditional coverage test
19. สร้าง transition counts $n_{00}, n_{01}, n_{10}, n_{11}$ จาก exception sequence ที่กำหนด
20. อธิบายเหตุผลที่แบบจำลองอาจผ่าน Kupiec แต่ไม่ผ่าน Christoffersen
21. สร้าง historical stress scenario สำหรับพอร์ตหุ้น ตราสารหนี้ และ FX
22. สร้าง hypothetical stress scenario ที่มี equity, yield, FX และ spread shocks พร้อมกัน
23. อธิบาย reverse stress testing และกำหนด loss threshold ที่เหมาะกับตัวอย่างหนึ่ง
24. สร้าง correlation-stress matrix และตรวจ PSD
25. คำนวณ days to liquidate จาก position value, ADV และ participation rate
26. เปรียบเทียบ VaR กับ Maximum Drawdown ว่าตอบคำถามต่างกันอย่างไร
27. คำนวณจำนวน index futures contracts เพื่อเปลี่ยน beta จาก 1.1 เป็น 0.4
28. พิสูจน์ minimum-variance hedge ratio
29. พิสูจน์ว่า minimum residual variance ใน simplified hedge model เท่ากับ $\sigma_S^2(1-\rho_{SF}^2)$
30. ออกแบบ rolling VaR backtest ที่ไม่มี look-ahead bias และมี model-escalation rule

คำถามชวนคิด

1. ถ้า VaR model ผ่าน backtest แต่ stress loss สูงเกิน risk capacity ควรถือว่า model ใช้งานได้หรือไม่
2. การ hedge ที่ลด VaR แต่เพิ่ม liquidity risk ถือว่าลดความเสี่ยงจริงหรือเพียงย้ายความเสี่ยง
3. ถ้า exceptions เกิดเฉพาะช่วงวิกฤต แบบจำลองที่มี coverage ถูกต้องโดยรวมยังเพียงพอหรือไม่
4. Risk dashboard ควรมีตัวเลขมากที่สุดหรือควรมีเฉพาะตัวเลขที่เชื่อมกับ action
5. ในพอร์ตที่มี options เหตุใด delta-normal VaR จึงอาจให้ภาพ downside ที่ไม่สมบูรณ์
6. หาก risk model และ portfolio optimizer ใช้ covariance model คนละชุด จะเกิดปัญหา governance อย่างไร

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 11

[3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. “Coherent Measures of Risk”. In: *Mathematical Finance* 9.3 (1999), pp. 203–228.

[15] Peter F. Christoffersen. “Evaluating Interval Forecasts”. In: *International Economic Review* 39.4 (1998), pp. 841–862.

[29] Paul H. Kupiec. “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”. In: *The Journal of Derivatives* 3.2 (1995), pp. 73–84.

[41] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. “Optimization of Conditional Value-at-Risk”. In: *The Journal of Risk* 2.3 (2000), pp. 21–41.

[71] Wichai Witayakiattilerd, Natthaphon Reunprot, Wachirada Limpanawannakul, and Jirawan Phuphon. “Analyzing Stock Performance in the Banking Sector: Unveiling Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk Strategies”. In: *Thailand Statistician* 22.4 (2024), pp. 877–893.

Part V

การประเมินผล ผลิตภัณฑ์ และการลงทุนเชิงปริมาณ

บทที่ 12 การวัดและประเมินผลการบริหารพอร์ต

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

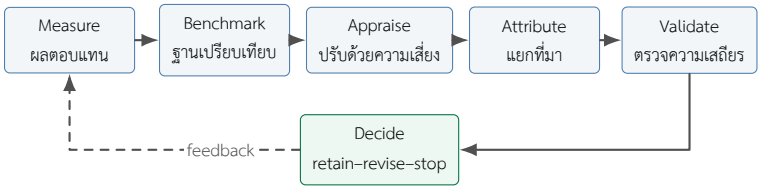
เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว ผู้อ่านควรสามารถ

1. เลือกวิธีวัดผลตอบแทนและ Benchmark ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ รวมทั้งแยก TWR, MWR, gross return และ net return ได้อย่างถูกต้อง
2. คำนวณและตีความ Sharpe, Treynor, Jensen's Alpha, Appraisal Ratio, Information Ratio, Sortino, M^2, Calmar และ RAROC
3. อธิบายความแตกต่างระหว่าง total, systematic, residual, tracking, downside, drawdown และ economic-capital risk
4. พิสูจน์ความสัมพันธ์สำคัญระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen และอธิบายเหตุผลที่มาตรวัดต่างชนิดอาจจัดอันดับพอร์ตไม่เหมือนกัน
5. ทำ single-period performance attribution โดย แยก Allocation, Selection และ Interaction effects และตรวจสอบ reconciliation กับ active return
6. ประเมิน ความ เสถียร ของ ผล งาน ด้วย rolling analysis, out-of-sample validation, transaction-cost adjustment และ bootstrap uncertainty
7. ออกแบบ Performance Dashboard ที่เชื่อมผลตอบแทน ความเสี่ยง attribution ต้นทุน และการตัดสินใจเข้าด้วยกัน

12.1 กรอบการประเมินผลการบริหารพอร์ต

การประเมินผลการบริหารพอร์ตไม่ควรจบที่คำถามว่า "พอร์ตให้ผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์" เพราะผลตอบแทนที่เกิดขึ้นอาจได้รับอิทธิพลจากกระแสเงินสด ระดับความเสี่ยง Benchmark สภาวะตลาด ต้นทุน และช่วงเวลาที่ใช้ประเมิน การประเมินที่สมบูรณ์จึงควรเป็นกระบวนการต่อเนื่อง

ใน เชิง ระบบ การ ประเมิน ควร เดิน ตาม ลำดับ จาก การ วัดผล ตอบแทน ที่ ถูก convention ไป สู่ การ เลือก Benchmark การปรับด้วยความเสี่ยง การแยกแหล่งที่มาของผลงาน การตรวจความเสถียร และจบที่การตัดสินใจที่ตรวจสอบย้อนกลับได้ ดังรูปที่ 12.1



รูปที่ 12.1: วงจรการวัด ประเมิน อธิบาย และตรวจสอบผลการบริหารพอร์ตก่อนนำไปใช้ตัดสินใจ

รูปนี้เน้นว่า “performance” ไม่ใช่ตัวเลขปลายทางเพียงค่าเดียว หากขั้น Measure ใช้กระแสเงินสดผิด convention หรือ Benchmark ไม่ตรง mandate ขั้น appraisal และ attribution ที่ตามมาก็อาจแม่นทางคณิตศาสตร์แต่ผิดความหมายทางเศรษฐศาสตร์ได้

บทนิยาม 12.1

คำสำคัญสามคำมีบทบาทต่างกัน

- **Performance Measurement** วัดว่าผลตอบแทนเกิดขึ้นเท่าไร เช่น TWR, MWR, CAGR และ active return
- **Performance Appraisal** ประเมินว่าผลตอบแทนนั้นดีเพียงใดเมื่อคำนึงถึงความเสี่ยงหรือแบบจำลอง เช่น Sharpe, Treynor, Jensen’s Alpha และ Information Ratio
- **Performance Attribution** อธิบายว่า active return เกิดจากการตัดสินใจส่วนใด เช่น asset allocation หรือ security selection

คำถามก่อนเลือกมาตรวัด

1. ใครเป็นผู้ควบคุมจังหวะเงินเข้าและเงินออกจากพอร์ต
2. พอร์ตเป็น standalone portfolio หรือเป็นส่วนหนึ่งของพอร์ตที่กระจายความเสี่ยงดีแล้ว
3. Benchmark สอดคล้องกับ mandate, currency, asset universe และข้อจำกัดของพอร์ตหรือไม่
4. ผู้ลงทุนให้ความสำคัญกับ volatility, downside, drawdown หรือ economic capital มากที่สุด
5. ผลตอบแทนที่รายงานเป็น gross หรือ net of fees, taxes, slippage และ financing cost
6. การประเมินมีเป้าหมายเพื่อรายงานผล จัดอันดับ หรือใช้ตัดสินใจปรับกลยุทธ์

12.2 ผลตอบแทนพอร์ต TWR และ MWR

ให้ V_0 เป็นมูลค่าพอร์ตต้นงวด V_1 เป็นมูลค่าตลาดปลายงวด *ก่อนรวม* กระแสเงินสดที่จ่ายออกจากพอร์ต และให้ D เป็นรายได้จากสินทรัพย์ภายในพอร์ต เช่น เงินปันผลหรือคูปอง หากไม่มี external cash flow ระหว่างงวด ผลตอบแทนหนึ่งงวดคือ

$$R_p = \frac{V_1 - V_0 + D}{V_0} \tag{12.1}$$

นิยามนี้ต้องระวังการนับซ้ำ หาก V_1 เป็น NAV หรือ wealth ที่รวมเงินปันผลซึ่งนำกลับมาลงทุนแล้ว ไม่ควรบวก D ซ้ำอีกครั้ง ประเด็นสำคัญจึงอยู่ที่การระบุ valuation convention มากกว่าการจำสูตรเพียงอย่างเดียว

สำหรับหลายงวด การเติบโตของความมั่งคั่งต้องใช้การทบต้น

$$1 + R_{0,T} = \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t) \tag{12.2}$$

ตัวอย่าง 12.1. ถ้าผลตอบแทนสองปีเท่ากับ 100% และ -50% ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 25% ต่อปี แต่

$$(1 + 1)(1 - 0.5) = 1$$

ดังนั้นความมั่งคั่งปลายปีที่สองเท่ากับจุดเริ่มต้น และผลตอบแทนสะสมเท่ากับศูนย์ ตัวอย่างนี้แสดงว่า arithmetic average ใช้ตอบคำถามเรื่องผลตอบแทนเฉลี่ยรายงวด ขณะที่ compound return ใช้ตอบคำถามเรื่องการเติบโตของเงินลงทุนจริง

เมื่อมีกระแสเงินสดภายนอก เช่น เงินฝากเพิ่มหรือการถอนเงิน ต้องแยก Time-Weighted Return (TWR) ออกจาก Money-Weighted Return (MWR) อย่างชัดเจน ให้ V_{k-1}^{+} เป็นมูลค่าพอร์ตทันทีหลัง external cash flow ณ ต้นช่วงย่อย และ V_k^{-} เป็นมูลค่าทันทีก่อน external cash flow ถัดไป ผลตอบแทนช่วงย่อยและ TWR คือ

$$r_k = \frac{V_k^{-}}{V_{k-1}^{+}} - 1, \qquad 1 + \text{TWR} = \prod_{k=1}^{K} (1 + r_k) \tag{12.3}$$

การแบ่งช่วงที่จุดเกิด external cash flow ทำให้ TWR ลดอิทธิพลของจังหวะฝาก–ถอนที่ผู้จัดการพอร์ตไม่ได้ควบคุม จึงเหมาะกับการประเมินฝีมือผู้จัดการ

สำหรับ MWR ให้ C_j เป็น external contribution ที่ไหล *เข้าพอร์ต* ณ เวลา t_j โดยการถอนให้มีเครื่องหมายลบ อัตรา r ที่ทำให้มูลค่าปลายงวดสอดคล้องกับกระแสเงินสดทั้งหมดแก้จาก

$$V_T = V_0(1 + r)^T + \sum_{j=1}^{J} C_j (1 + r)^{T - t_j} \tag{12.4}$$

ซึ่งเป็น IRR ภายใต้หน่วยเวลาที่กำหนด MWR จึงสะท้อนประสบการณ์ของเจ้าของเงิน เพราะช่วงที่มีเงินลงทุนมากมีอิทธิพลต่อผลลัพธ์มากกว่า ทั้งนี้ IRR อาจไม่มีคำตอบหรือมีหลายคำตอบเมื่อกระแสเงินสดเปลี่ยนเครื่องหมายหลายครั้ง จึงควรตรวจโครงสร้าง cash flow ก่อนตีความ

ข้อสังเกต

TWR และ MWR ไม่ได้แข่งขันกันว่า “ตัวไหนดีกว่า” แต่ตอบคนละคำถาม หากต้องประเมินผู้จัดการที่ไม่ควบคุมเงินฝากถอนให้ใช้ TWR เป็นหลัก หากต้องการวัดผลลัพธ์ที่เจ้าของเงินจริงได้รับให้พิจารณา MWR ร่วมด้วย และทั้งสองต้องใช้ valuation timestamp กับ cash-flow timing ที่สอดคล้องกัน

12.3 Benchmark, Active Return และ Tracking Error

Benchmark ที่ดีควรเป็นฐานเปรียบเทียบที่สอดคล้องกับ mandate และสามารถคำนวณได้อย่างโปร่งใส โดยควรตรงกันอย่างน้อยในด้าน investable universe, currency, total-return convention, duration/factor exposure และข้อจำกัดที่สำคัญ หาก Benchmark รับความเสี่ยงคนละชนิดกับพอร์ต การตีความ “ชนะตลาด” อาจไม่มีความหมาย

ให้ $R_{b,t}$ เป็นผลตอบแทนของ Benchmark นิยาม arithmetic active return เป็น

$$A_t = R_{p,t} - R_{b,t}, \qquad \overline{A} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_t \tag{12.5}$$

และ Tracking Error เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ active return

$$\mathrm{TE} = \mathrm{SD}(A_t) = \mathrm{SD}(R_{p,t} - R_{b,t}) \tag{12.6}$$

Active return รายงวดเป็นผลต่างเชิงเลขคณิต แต่ผลตอบแทนสะสมต้องทบต้นแยกพอร์ตและ Benchmark ก่อน จึงไม่ควรนำ A_t มาบวกหรือทบต้นเสมือนเป็น standalone return โดยไม่ระบุ convention

ประเด็นที่ต้องระวัง

Benchmark mismatch สามารถทำให้ alpha, Tracking Error หรือ Information Ratio ดูสูงหรือต่ำผิดจากความสามารถจริงของผู้จัดการได้ นอกจากนี้ Benchmark ควรใช้ total return หากพอร์ตได้รับเงินปันผลหรือคูปอง มิฉะนั้น active return จะปะปนผลของ income convention เข้ากับ skill

12.4 Sharpe Ratio: ผลตอบแทนส่วนเกินต่อความเสี่ยงรวม

Sharpe Ratio วัดผลตอบแทนส่วนเกินต่อหน่วยของ total volatility [49] โดยทุกตัวแปรต้องอยู่ในความถี่และหน่วยเวลาเดียวกัน

$$\boxed{S_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\sigma_p}} \tag{12.7}$$

ในเชิง ex post $\bar{R}_p - \bar{R}_f$ คือค่าเฉลี่ย excess return และ σ_p คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนพอร์ต ตาม convention ที่ประกาศไว้ หาก risk-free rate เปลี่ยนตามเวลา ควรรายงานให้ชัดว่าใช้ค่าเฉลี่ยของ $R_{f,t}$ และวัด volatility ของ R_p หรือของ excess return

ภายใต้ผลตอบแทนรายงวดที่เป็นอิสระ มี finite variance และมี mean/variance คงที่โดยประมาณ สามารถใช้

$$S_{\text{ann}} \approx \sqrt{m}\, S_{\text{period}} \tag{12.8}$$

เมื่อมี serial correlation หรือ volatility clustering กฎ $\sqrt{m}$ อาจให้ annualized Sharpe ที่คลาดเคลื่อน [31]

ตัวอย่าง 12.2. ถ้า $\bar{R}_p = 11\%$, $\bar{R}_f = 2.5\%$ และ $\sigma_p = 16\%$

$$S_p = \frac{0.11 - 0.025}{0.16} = 0.53125$$

ความหมายคือพอร์ตสร้าง excess return เฉลี่ยประมาณ 0.53 หน่วยต่อหนึ่งหน่วยของ total volatility ภายใต้ช่วงเวลาและ convention ที่ใช้

ประเด็นที่ต้องระวัง

Sharpe Ratio ใช้ symmetric volatility จึงลงโทษทั้ง upside และ downside variation เท่ากันโดยโครงสร้าง และเมื่อ excess return ติดลบ การเปรียบเทียบพอร์ตด้วย Sharpe เพียงค่าเดียวอาจไม่สะท้อน preference ของผู้ลงทุน จึงควรดู drawdown, downside risk และช่วงความเชื่อมั่นประกอบ

12.5 Treynor Ratio: ผลตอบแทนต่อความเสี่ยงเชิงระบบ

Treynor Ratio ใช้ beta เป็นตัวแทน systematic risk [58]

$$\boxed{T_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\beta_p}}, \qquad \beta_p = \frac{\mathrm{Cov}(R_p, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)} \tag{12.9}$$

มาตรวัดนี้มีเหตุผลเมื่อพอร์ตถูกพิจารณาเป็นส่วนหนึ่งของ wealth ที่กระจาย idiosyncratic risk ได้ดี และ beta ถูกประมาณเทียบกับ market proxy ที่สอดคล้องกับปัญหา

Treynor ไม่ใช้ residual volatility ในตัวหาร ดังนั้นพอร์ตสองพอร์ตที่มี beta เท่ากันแต่มี idiosyncratic risk ต่างกันอาจได้ Treynor ใกล้กันมาก ทั้งที่ standalone risk ต่างกันอย่างชัดเจน

ประเด็นที่ต้องระวัง

ถ้า β_p ใกล้ศูนย์ ตัวหารทำให้ Treynor Ratio มีขนาดสูงผิดปกติ และเมื่อ $\beta_p \leq 0$ เครื่องหมายของอัตราส่วนอาจไม่สอดคล้องกับการจัดอันดับแบบปกติ ควรรายงาน beta, standard error และ total risk ควบคู่กัน

12.6 Jensen's Alpha และความไม่แน่นอนของ Alpha

Jensen's Alpha วัด abnormal performance เทียบกับ CAPM [27] ผ่าน time-series regression ของ excess return

$$R_{p,t} - R_{f,t} = \alpha_p + \beta_p(R_{m,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{p,t} \tag{12.10}$$

เมื่อ residual มีค่าเฉลี่ยศูนย์โดย construction ในตัวอย่าง OLS ที่มี intercept จะได้ mean identity

$$\boxed{\alpha_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) - \beta_p(\bar{R}_m - \bar{R}_f)} \tag{12.11}$$

ตัวอย่าง 12.3. ให้ $\bar{R}_m = 9\%, \bar{R}_f = 2.5\%, \bar{R}_p = 11\%$ และ $\beta_p = 0.85$

$$\alpha_p = 8.5\% - 0.85(6.5\%) = 2.975\%$$

ภายใต้ความถี่เดียวกัน พอร์ตให้ excess return มากกว่าที่ CAPM พร้อม beta นี้อธิบายได้ประมาณ 2.975 จุดร้อยละ

การรายงาน $\hat{\alpha} > 0$ ไม่เพียงพอ เพราะ alpha เป็นค่าประมาณที่ขึ้นกับ market proxy, sample period และแบบจำลอง ควรรายงาน standard error, t-statistic, confidence interval และ residual diagnostics โดยหาก residual มี heteroskedasticity หรือ autocorrelation ควรใช้ inference ที่ robust ต่อโครงสร้างดังกล่าว Alpha ที่เป็นบวกอาจสะท้อน omitted factors, benchmark misspecification หรือ data mining ไม่ใช่ skill เพียงสาเหตุเดียว

12.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen

ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็น identity ภายใต้การใช้ช่วงข้อมูล ความถี่ risk-free rate และ market proxy เดียวกัน และใช้ beta จากสมการ single-market-factor ข้างต้น จึงไม่ควรนำค่าจากคนละ sample หรือคนละ Benchmark มาผสมกัน

จาก

$$\bar{R}_p - \bar{R}_f = \alpha_p + \beta_p(\bar{R}_m - \bar{R}_f)$$

ถ้า $\beta_p \neq 0$ จะได้

ทฤษฎีบท 12.1

$$\boxed{T_p = T_m + \frac{\alpha_p}{\beta_p}} \tag{12.12}$$

โดย $T_m = \bar{R}_m - \bar{R}_f$ เมื่อ $\beta_m = 1$

และเนื่องจาก

$$\beta_p = \rho_{pm}\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

จึงได้

ทฤษฎีบท 12.2

$$\boxed{S_p = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \rho_{pm}S_m} \tag{12.13}$$

พิสูจน์. หาร CAPM mean identity ด้วย σ_p

$$\frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\sigma_p} = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \frac{\beta_p(\bar{R}_m - \bar{R}_f)}{\sigma_p}$$

แทน $\beta_p = \rho_{pm}\sigma_p/\sigma_m$ จะได้

$$S_p = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \rho_{pm}\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma_m} = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \rho_{pm}S_m$$

□

ผลนี้อธิบายว่ามาตรวัดทั้งสามไม่ได้ขัดแย้งกัน แต่ใช้เลนส์ความเสี่ยงต่างกัน หาก residual risk ต่ำและ correlation กับตลาดสูง การจัดอันดับอาจใกล้กัน แต่ถ้า idiosyncratic risk สูงหรือ beta ผิดปกติ ผลการจัดอันดับอาจแตกต่างกันมาก

12.8 Appraisal Ratio และ Information Ratio

ให้ $\sigma_{\varepsilon,p}$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ residual จาก factor model ที่ใช้สร้าง α_p นิยาม Appraisal Ratio เป็น

$$\boxed{\text{AR}_p = \frac{\alpha_p}{\sigma_{\varepsilon,p}}} \tag{12.14}$$

จึงวัด model-relative alpha ต่อ residual risk หากเปลี่ยน factor model ทั้ง α_p และ $\sigma_{\varepsilon,p}$ อาจเปลี่ยนพร้อมกัน

ส่วน Information Ratio ใช้ Benchmark เป็นฐานโดยตรง

$$\boxed{\text{IR}_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_b}{\text{SD}(R_p - R_b)} = \frac{\bar{A}}{\text{TE}}} \tag{12.15}$$

จึงตอบว่าผู้จัดการสร้าง active return เฉลี่ยได้มากเพียงใดต่อหนึ่งหน่วยของ active risk

ประเด็นที่ต้องระวัง

Appraisal Ratio และ Information Ratio ไม่ใช่มาตรวัดเดียวกัน Appraisal Ratio ขึ้นกับ factor model และ residual risk ขณะที่ Information Ratio ขึ้นกับ Benchmark และ Tracking Error ทั้งสองอัตราส่วนยังเปราะบางเมื่อ denominator มีค่าน้อยมาก จึงควรรายงานตัวเศษ ตัวส่วน และ uncertainty ควบคู่กัน

12.9 Sortino Ratio และ Downside Risk

ให้ R_T เป็น minimum acceptable return (MAR) ที่อยู่ในหน่วยเวลาเดียวกับผลตอบแทน และกำหนด downside deviation ในรูป Lower Partial Moment อันดับสอง [52]

$$\mathrm{DD}(R_T) = \sqrt{\mathbb{E}\left[\min(R_p - R_T, 0)^2\right]} \tag{12.16}$$

สำหรับข้อมูล N งวด ตัวประมาณที่สอดคล้องกับนิยามนี้คือ

$$\widehat{\mathrm{DD}}(R_T) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \min(R_{p,t} - R_T, 0)^2} \tag{12.17}$$

และ Sortino Ratio คือ

$$\boxed{\mathrm{Sortino}_p = \frac{\bar{R}_p - R_T}{\mathrm{DD}(R_T)}} \tag{12.18}$$

ข้อได้เปรียบคือไม่ถือผลตอบแทนเหนือเป้าหมายเป็น “ความเสี่ยง” แต่ค่าที่ได้ขึ้นกับ R_T และ convention ของ downside deviation บางแหล่งหารด้วยจำนวน downside observations แทน N ซึ่งให้ค่าต่างกัน ดังนั้นรายงานเชิงวิชาชีพต้องระบุนิยามที่ใช้ทุกครั้ง

12.10 M^2, Calmar และ RAROC

12.10.1 Modigliani–Modigliani Measure

M^2 แปลง Sharpe Ratio กลับเป็นหน่วยผลตอบแทน โดยคิดเชิงแนวคิดว่าผสมพอร์ต p กับสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงจน volatility เท่ากับตลาด [36] หาก $\sigma_p > 0$ สัดส่วนในพอร์ต p คือ $y = \sigma_m/\sigma_p$ จึงได้

$$\boxed{M_p^2 = \bar{R}_f + \frac{\sigma_m}{\sigma_p}(\bar{R}_p - \bar{R}_f) = \bar{R}_f + S_p \sigma_m} \tag{12.19}$$

และ performance differential เทียบตลาดคือ

$$\Delta M_p^2 = M_p^2 - \bar{R}_m \tag{12.20}$$

ข้อดีของ M^2 คือสื่อสารในหน่วยผลตอบแทนได้ง่ายกว่า Sharpe แต่ยังสืบทอดข้อสมมติและข้อจำกัดของ Sharpe เช่นเดียวกัน

12.10.2 Calmar Ratio

ให้ MDD_p เป็น *ขนาดบวก* ของ Maximum Drawdown และ CAGR เป็น compound annual growth rate

$$\boxed{\text{Calmar}_p = \frac{\text{CAGR}_p}{\text{MDD}_p}} \tag{12.21}$$

หากระบบบันทึก drawdown เป็นค่าติดลบต้องใช้ $|\text{MDD}|$ ในตัวหาร Calmar สะท้อนการเติบโตต่อ path loss แต่ไวต่อช่วงข้อมูลมาก เพราะ MDD ถูกกำหนดโดยเหตุการณ์ที่รุนแรงที่สุดเพียงช่วงหนึ่ง จึงควรระบุ lookback period และรายงาน drawdown duration ประกอบเมื่อเหมาะสม

12.10.3 RAROC

Risk-Adjusted Return on Capital เชื่อมผลการดำเนินงานกับ economic capital แต่ไม่มีนิยามสากลเพียงรูปเดียว โดยกรอบทั่วไปคือ

$$\boxed{\text{RAROC} = \frac{\text{Risk-adjusted net income}}{\text{Economic capital}}} \tag{12.22}$$

ตัวอย่าง convention หนึ่งอาจกำหนดตัวเศษเป็นรายได้สุทธิหลัง funding cost, operating cost และ expected loss ขณะที่ economic capital รองรับ unexpected loss ที่ระดับความเชื่อมั่นและ horizon ที่กำหนด การเปรียบเทียบ RAROC ระหว่างหน่วยธุรกิจจึงต้องใช้ loss definition, confidence level, horizon และ diversification convention เดียวกัน

12.11 แผนที่มาตรวัดกับชนิดความเสี่ยง

ตารางที่ 12.1: มาตรวัดผลการดำเนินงาน มิติความเสี่ยง และข้อควรระวังในการตีความ

มาตรวัด	ฐานความเสี่ยง/เปรียบเทียบ	การตีความและข้อควรระวัง
Sharpe	Total volatility	excess return ต่อ total risk; ไวต่อ serial correlation และไม่แยก upside/downside
Treynor	Beta	excess return ต่อ systematic risk; ไม่เหมาะเมื่อ β ใกล้ศูนย์หรือพอร์ตไม่ diversified
Jensen	CAPM expected return	model-relative alpha; ขึ้นกับ market proxy และ model specification
Appraisal	Residual risk	alpha ต่อ residual risk; ต้องใช้ residual จาก model เดียวกับ alpha
Information Ratio	Tracking Error	active return ต่อ active risk; ไวต่อ Benchmark mismatch
Sortino	Downside deviation	return เหนือ MAR ต่อ downside risk; ต้องระบุ target และ DD convention
M^2	Market volatility	Sharpe ที่แปลงกลับเป็นหน่วยผลตอบแทน; สืบทอดข้อจำกัดของ Sharpe
Calmar	Maximum Drawdown	CAGR ต่อ path loss; ไวต่อ lookback และเหตุการณ์ extreme หนึ่งช่วง
RAROC	Economic capital	income ต่อ capital at risk; ต้องใช้ capital/loss convention เดียวกัน

ข้อสังเกต

ไม่มี มาตร วัด ใด เป็น คะแนน สากล ที่ เหมาะ กับ ทุก พอร์ต การ เลือก มาตร วัด ต้อง เริ่ม จาก คำถาม ทาง เศรษฐศาสตร์และ mandate ก่อนเลือกสูตร

12.12 Performance Attribution

Performance appraisal บอกว่าพอร์ตดีหรือแย่เพียงใด แต่ attribution ตอบว่า “เพราะอะไร” ให้ segment $i = 1, \dots, n$ มีน้ำหนักพอร์ต $w_{P,i}$ น้ำหนัก Benchmark $w_{B,i}$ ผลตอบแทนพอร์ตใน segment $r_{P,i}$ และผลตอบแทน Benchmark $r_{B,i}$ โดยสมมติว่า weights เป็น beginning-of-period weights และไม่มี residual cash ที่ไม่ได้จัด segment

$$R_P = \sum_i w_{P,i} r_{P,i}, \qquad R_B = \sum_i w_{B,i} r_{B,i} \tag{12.23}$$

12.12.1 Allocation Effect

ภายใต้ Brinson–Hood–Beebower (BHB) arithmetic convention [11]

$$\boxed{A_i = (w_{P,i} - w_{B,i}) r_{B,i}} \tag{12.24}$$

ใน BHB ค่า A_i ใช้ผลตอบแทนของ Benchmark segment โดยตรง จึงวัดผลของความต่างน้ำหนักตาม convention นี้ แต่ไม่ควรตีความว่าเป็นการ overweight “segment ที่ชนะ Benchmark รวม” โดยอัตโนมัติ เพราะ Brinson–Fachler จะใช้ผลตอบแทน segment เทียบกับผลตอบแทน Benchmark รวมและให้ allocation effect ราย segment ต่างออกไป

12.12.2 Selection Effect

$$\boxed{S_i = w_{B,i}(r_{P,i} - r_{B,i})} \tag{12.25}$$

จึงแยกผลจากการเลือกหลักทรัพย์ภายใน segment โดยใช้น้ำหนัก Benchmark เป็นฐาน

12.12.3 Interaction Effect

$$\boxed{I_i = (w_{P,i} - w_{B,i})(r_{P,i} - r_{B,i})} \tag{12.26}$$

Interaction เกิดเมื่อผู้จัดการทั้งเปลี่ยนน้ำหนัก segment และเลือกหลักทรัพย์ที่ให้ผลต่างจาก Benchmark พร้อมกัน

ทฤษฎีบท 12.3

ภายใต้ BHB arithmetic attribution

$$\boxed{R_P - R_B = \sum_{i=1}^{n} (A_i + S_i + I_i)} \tag{12.27}$$

พิสูจน์. สำหรับแต่ละ segment

$$\begin{aligned} A_i + S_i + I_i &= (w_{P,i} - w_{B,i})r_{B,i} + w_{B,i}(r_{P,i} - r_{B,i}) \\ &\quad + (w_{P,i} - w_{B,i})(r_{P,i} - r_{B,i}) \\ &= w_{P,i}r_{P,i} - w_{B,i}r_{B,i} \end{aligned}$$

รวมทุก segment จึงได้

$$\sum_i (A_i + S_i + I_i) = \sum_i w_{P,i}r_{P,i} - \sum_i w_{B,i}r_{B,i} = R_P - R_B$$

□

ตัวอย่าง 12.4. สมมติ Benchmark มี น้ำ หนัก $(50\%, 30\%, 20\%)$ และ พอร์ต มี น้ำ หนัก $(40\%, 40\%, 20\%)$ ในสาม segment ตามลำดับ ให้ผลตอบแทน Benchmark เท่ากับ $(8\%, 4\%, 2\%)$ และผลตอบแทนพอร์ตในแต่ละ segment เท่ากับ $(10\%, 3\%, 2.5\%)$ จะได้ $R_P = 5.7\%$, $R_B = 5.6\%$ และ active return 0.1%

ตารางที่ 12.2: ตัวอย่าง BHB attribution และการตรวจ reconciliation

Segment	Allocation	Selection	Interaction
1	-0.80%	$+1.00\%$	-0.20%
2	$+0.40\%$	-0.30%	-0.10%
3	0.00%	$+0.10\%$	0.00%
รวม	-0.40%	$+0.80\%$	-0.30%

ผลรวมเท่ากับ $-0.40 + 0.80 - 0.30 = 0.10\%$ จึง reconcile กับ $R_P - R_B$ พอดี ตัวอย่างนี้ช่วยให้เห็นว่า active return ที่เป็นบวกอาจเกิดจาก selection ที่ดีชดเชย allocation ที่เสียหาย

ประเด็นที่ต้องระวัง

Attribution convention มีหลายแบบ เช่น BHB และ Brinson–Fachler การเปลี่ยน convention อาจเปลี่ยน allocation effect ราย segment แม้ total active return ไม่เปลี่ยน จึงต้องระบุสูตรที่ใช้ รวมทั้งตรวจ beginning weights, cash, derivatives และ currency overlays ให้จัดหมวดอย่างสอดคล้องก่อนสรุปผล

12.13 Multi-Period Attribution และ Linking Problem

การนำ arithmetic attribution หลายงวดมาบวกตรง ๆ โดยทั่วไปไม่เท่ากับ active performance สะสม เพราะผลตอบแทนทบต้นสร้าง interaction ข้ามเวลา ให้ผลตอบแทนสะสมของพอร์ตและ Benchmark เป็น

$$R_{P,0:T} = \prod_{t=1}^{T}(1 + R_{P,t}) - 1, \qquad R_{B,0:T} = \prod_{t=1}^{T}(1 + R_{B,t}) - 1 \tag{12.28}$$

จึงมี arithmetic cumulative active performance เท่ากับ $R_{P,0:T} - R_{B,0:T}$ ขณะที่ geometric relative performance นิยามได้เป็น

$$G_{P/B} = \frac{1 + R_{P,0:T}}{1 + R_{B,0:T}} - 1 \tag{12.29}$$

สองค่านี้ตอบคำถามต่างกันและไม่ควรเรียกสลับกัน

หลักการสำหรับ multi-period attribution

1. คำนวณ single-period attribution ให้ reconcile ในแต่ละงวดก่อน
2. กำหนดว่าจะรายงาน arithmetic cumulative active performance หรือ geometric relative performance
3. ใช้ linking algorithm เดียวกันตลอดรายงาน และระบุชื่อ/สูตรให้ตรวจสอบได้
4. ตรวจว่าผลรวม linked effects reconcile กับ cumulative performance ตาม convention ที่เลือก
5. หากมี residual จาก cash, FX, derivatives, pricing หรือ rounding ให้แสดงแยก ไม่ควรซ่อนใน allocation/selection โดยพลการ

12.14 Rolling Performance และ Regime Stability

ค่าที่คำนวณจาก full sample อาจปกปิดการเปลี่ยนแปลงของ performance ตามเวลา ให้หน้าต่างขนาด h และนิยาม rolling Sharpe ณ เวลา t โดยใช้ข้อมูลในช่วง $t - h + 1, \dots, t$

$$S_{t,h} = \frac{\overline{(R_p - R_f)}_{\,t-h+1:t}}{\mathrm{SD}(R_p)_{\,t-h+1:t}} \tag{12.30}$$

แนวคิดเดียวกันใช้กับ rolling beta, alpha, IR, MDD และ turnover ได้ แต่หน้าต่างสั้นตอบสนองต่อ regime change เร็วกว่าและมี estimation noise สูงกว่า ส่วนหน้าต่างยาวนิ่งกว่าแต่ตอบสนองช้ากว่า

ประเด็นที่ต้องระวัง

หน้าต่าง rolling ที่ทับซ้อนกันทำให้ค่าต่อเนื่องมี dependence สูง จึงไม่ควรนับ rolling observations เหล่านั้นเสมือนเป็น independent evidence จำนวนมาก ผลการดำเนินงานที่ดีเฉพาะ full sample แต่เสื่อมต่อเนื่องใน rolling windows อาจสะท้อน regime dependence, structural break หรือ strategy decay

12.15 Out-of-Sample Validation และต้นทุนการลงทุน

การเลือกกลยุทธ์จากข้อมูลชุดเดียวกับที่ใช้ประเมินทำให้เกิด selection bias จึงควรกำหนด in-sample, validation และ out-of-sample ก่อนดูผลสุดท้าย พร้อมบันทึก decision time ว่าข้อมูลใดมีให้ใช้จริง ณ เวลาสร้างสัญญาณ

หากต้นทุนแต่ละรายการถูกวัดเป็นอัตราผลตอบแทนต่อ NAV ต้นงวด ผลตอบแทนสุทธิแบบ first-order เขียนได้เป็น

$$R_t^{\text{net}} = R_t^{\text{gross}} - C_t^{\text{fee}} - C_t^{\text{spread}} - C_t^{\text{slippage}} - C_t^{\text{financing}} \tag{12.31}$$

หาก execution price ที่ใช้สร้าง gross return รวม spread หรือ slippage อยู่แล้ว ต้องไม่หักซ้ำอีกครั้ง ในพอร์ตที่มีภาษีหรือ performance fee ควรแยก investor return ออกจาก manager gross/net return ให้ชัด

สำหรับกลยุทธ์ที่มี turnover สูง ความแตกต่างระหว่าง gross และ net performance อาจเปลี่ยนข้อสรุปทั้งหมด โดยเฉพาะเมื่อต้นทุนมี market impact ที่เพิ่มแบบไม่เชิงเส้นตามขนาดคำสั่ง

ขั้นต่ำของ Performance Validation

1. แบ่ง in-sample/validation/out-of-sample ก่อนสรุปผล และ freeze rule ก่อนเปิดดู OOS
2. รายงานผลหลังค่าธรรมเนียม spread, slippage, financing, tax และ market impact ที่เกี่ยวข้องโดยไม่ double count
3. ใช้ rolling หรือ walk-forward windows เพื่อตรวจ temporal stability
4. รายงาน uncertainty ของ Sharpe, alpha, IR และ active return ไม่ใช่ point estimate เพียงค่าเดียว
5. หากทดลองหลายกลยุทธ์หรือหลาย parameter ให้ควบคุม multiple-testing และ data-snooping risk
6. ตรวจว่า Benchmark, risk-free rate, return frequency, holdings และ corporate actions

เป็น point-in-time consistent

12.16 Bootstrap Uncertainty และ Multiple Testing

Sharpe Ratio, alpha และ Information Ratio เป็นค่าประมาณจากตัวอย่าง จึงควรประเมิน sampling uncertainty ไม่ใช่รายงานเพียง point estimate วิธี percentile bootstrap พื้นฐานคือสร้างตัวอย่างซ้ำจำนวน B ครั้ง คำนวณ $\hat{\theta}^{*(b)}$ และใช้ empirical quantiles เป็นช่วงความเชื่อมั่น

$$\text{CI}_{1-\gamma} = \left[Q_{\gamma/2}(\hat{\theta}^*), Q_{1-\gamma/2}(\hat{\theta}^*)\right] \tag{12.32}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

IID bootstrap ไม่รักษา serial dependence หากผลตอบแทนมี autocorrelation ควรใช้ block bootstrap หรือวิธี time-series resampling ที่เหมาะสม และเมื่อประเมิน beta, alpha หรือ IR ควร resample ข้อมูลพอร์ต Benchmark ตลาด และ risk-free แบบจับคู่ตามเวลาเพื่อรักษา covariance structure

เมื่อทดสอบหลายกลยุทธ์พร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะพบ “ผู้ชนะ” โดยบังเอิญสูงขึ้น ยิ่ง model search กว้าง ความหมายของ p-value หรือ Sharpe สูงสุดที่เลือกภายหลังยิ่งอ่อนลง จึงควรใช้ holdout/OOS, false-discovery control หรือ data-snooping adjustment ที่เหมาะสมก่อนสรุปว่ากลยุทธ์มี skill

12.17 กรณีศึกษาจากงานวิจัย: Robust Backtesting

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: จากผลตอบแทนย้อนหลังสู่ข้ออ้างที่ตรวจสอบได้

กรณีศึกษาการทดสอบ Bollinger Bands บนหุ้น SET50 ใช้การแบ่งข้อมูลเป็นช่วงสร้างแบบจำลองและ out-of-sample เปรียบเทียบผลตอบแทน ความสำเร็จ Maximum Drawdown และ Sharpe หลังต้นทุนธุรกรรม พร้อม bootstrap confidence intervals และการปรับ multiple testing [69]

บทเรียนเชิงวิธีวิทยาคือ performance claim ที่น่าเชื่อถือควรผ่านหลายชั้นพร้อมกัน ได้แก่ profitability, risk-adjusted performance, drawdown, transaction cost, out-of-sample persistence และ statistical uncertainty ผลงานที่เด่นเฉพาะ in-sample Sharpe จึงยังไม่เพียงพอสำหรับข้อสรุปเชิงการบริหารพอร์ต

12.18 Performance Dashboard และ Governance

Performance Dashboard ที่ดีควรทำให้ผู้ตัดสินใจเห็นทั้ง “ผลลัพธ์ สาเหตุ ความเสี่ยง ความเสถียร และต้นทุน” ในหน้าเดียว

ตารางที่ 12.3: โครงสร้าง Performance Dashboard ขั้นต่ำ

มิติ	ตัวชี้วัดตัวอย่าง	คำถามสำหรับการตัดสินใจ
Return	TWR, MWR, CAGR, net return	ผลตอบแทนเกิดขึ้นเท่าไร และใครควบคุม cash-flow timing
Benchmark	Active return, TE	ชนะ Benchmark ที่เหมาะสมหรือไม่ และ active risk เท่าไร
Risk-adjusted	Sharpe, Sortino, M^2	ผลตอบแทนคุ้ม total/downside risk หรือไม่
Model-relative	Beta, Alpha, Appraisal	ผลงานเกินสิ่งที่ factor model อธิบายหรือไม่
Active management	IR	active return คุ้ม tracking risk หรือไม่
Path risk	MDD, Calmar, recovery time	นักลงทุนต้องทน drawdown ลึกและนานเพียงใด
Attribution	Allocation, Selection, Interaction	ผลงานมาจากการตัดสินใจใด และ reconcile หรือไม่
Implementation	Turnover, fee, spread, slippage	edge ก่อนต้นทุนเหลือเท่าไรหลังนำไปซื้อขายจริง
Validation	Rolling, OOS, CI, stress	ผลงานเสถียรหรือเป็นผลเฉพาะ sample/regime
Governance	data cut-off, exceptions, sign-off	ตัวเลขตรวจย้อนกลับและเชื่อมกับ action ได้หรือไม่

Performance Review Ticket

รายงาน ประจำ งวด ควร บันทึก อย่าง น้อย valuation date, data cut-off, return convention, Benchmark version, risk-free source, fee convention, corporate-action treatment, portfolio holdings timestamp, metric values, attribution reconciliation, exceptions และผู้อนุมัติข้อมูล เพื่อให้สามารถย้อนตรวจได้

12.19 Investment Labs

Investment Lab: Lab 12A — Performance Metric Dashboard ด้วย Excel/Python

เตรียมข้อมูลรายเดือนของ Portfolio, Benchmark และ risk-free rate อย่างน้อย 60 งวด แล้ว

1. คำนวณ TWR, MWR/CAGR, mean excess return, volatility, beta และ Tracking Error พร้อมตรวจ cash-flow convention
2. คำนวณ Sharpe, Treynor, Jensen Alpha, Appraisal, IR, Sortino, M^2 และ Calmar

3. สร้างตาราง metric–risk denominator–interpretation
4. เปรียบเทียบ gross กับ net-of-cost performance
5. เขียนข้อสรุปโดยห้ามใช้ metric เดียวตัดสินทั้งหมด

Python companion: `code/ch12_performance_lab.py`

Investment Lab: Lab 12B — Brinson Attribution และ Reconciliation

สร้าง ข้อมูล อย่าง น้อย 5 sectors ที่ มี w_P, w_B, r_P, r_B คำนวณ Allocation, Selection และ Interaction ตามสมการ (12.24)–(12.26) แล้วตรวจสอบว่า

$$R_P - R_B = \sum_i (A_i + S_i + I_i)$$

จากนั้นสร้าง waterfall chart เพื่ออธิบายแหล่งที่มาของ active return

Investment Lab: Lab 12C — Rolling, OOS และ Bootstrap Stability

ใช้ rolling window 12, 24 และ 36 เดือนคำนวณ Sharpe, beta, Jensen Alpha, IR และ MDD เปรียบเทียบ full sample กับ rolling estimates จากนั้นแบ่ง train/validation/test แบบ point-in-time และสร้าง block/bootstrap confidence interval ที่เหมาะกับ dependence เพื่อประเมินว่าข้อสรุปยังคงอยู่เมื่อเปลี่ยนช่วงข้อมูลหรือไม่

บทสรุปท้ายบท

การประเมินผลการบริหารพอร์ตที่สมบูรณ์ไม่ใช่การหาคะแนนเพียงค่าเดียว แต่เป็นกระบวนการ

Measure → Benchmark → Appraise → Attribute → Validate → Decide

ขั้น Measure ต้องแยก TWR ออกจาก MWR และแยก gross จาก net return ให้ถูก convention ก่อนเลือก Benchmark จากนั้น Sharpe ใช้ total risk, Treynor ใช้ systematic risk, Jensen ใช้ model-relative alpha, Appraisal ใช้ residual risk, Information Ratio ใช้ tracking risk, Sortino ใช้ downside risk, Calmar ใช้ drawdown และ RAROC ใช้ economic capital จึงไม่มีมาตรวัดใดครอบคลุมทุกมิติ

Attribution เพิ่มคำตอบว่า active return เกิดจาก allocation, selection หรือ interaction และต้อง reconcile ในแต่ละงวดก่อนทำ multi-period linking ขณะที่ rolling analysis, point-in-time out-of-sample testing, transaction-cost adjustment และ bootstrap uncertainty ช่วยลดความเสี่ยงจากการสรุปบน

sample เดียว การประเมินที่ดีจึงต้องวัดถูก เปรียบเทียบถูก อธิบายได้ ตรวจความไม่แน่นอน และเชื่อมผลลัพธ์กับ action ที่ตรวจสอบย้อนกลับได้

คำศัพท์สำคัญ

Active Return ผลต่างระหว่างผลตอบแทนพอร์ตกับ Benchmark

Appraisal Ratio Alpha ต่อ residual risk

Benchmark ฐานเปรียบเทียบที่สอดคล้องกับ mandate ของพอร์ต

Calmar Ratio CAGR ต่อ Maximum Drawdown

Information Ratio Active return ต่อ Tracking Error

Jensen's Alpha ผลตอบแทนผิดปกติเทียบกับแบบจำลอง CAPM

Maximum Drawdown การลดลงสูงสุดจากจุดสูงสุดก่อนหน้าในเส้นทางความมั่งคั่ง

Money-Weighted Return ผลตอบแทนที่คำนึงถึงขนาดและเวลาของกระแสเงินสด

Performance Attribution การแยกแหล่งที่มาของ active return

Performance Appraisal การประเมินผลตอบแทนโดยคำนึงถึงความเสี่ยงหรือแบบจำลอง

Performance Measurement การวัดผลตอบแทนที่เกิดขึ้น

M^2 การแปลง Sharpe Ratio เป็นผลตอบแทนของพอร์ตที่ปรับ volatility ให้เท่ากับตลาด

RAROC Risk-adjusted net income ต่อ economic capital ภายใต้ convention ที่กำหนด

Sharpe Ratio Excess return ต่อ total volatility

Sortino Ratio ผลตอบแทนเหนือเป้าหมายต่อ downside deviation

Time-Weighted Return ผลตอบแทนแบบ chain-link ที่ลดผลของ external cash-flow timing

Tracking Error ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ active return

Treynor Ratio Excess return ต่อ beta

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง performance measurement, appraisal และ attribution พร้อมยกตัวอย่างอย่างละสองรายการ
2. พอร์ตมีผลตอบแทน 12% risk-free rate 3% และ volatility 15% จงคำนวณ Sharpe Ratio และตีความ
3. จากข้อ 2 ถ้า beta เท่ากับ 0.9 จงคำนวณ Treynor Ratio

4. ถ้าตลาดให้ผลตอบแทน 10% และ risk-free rate 3% จงหา Jensen's Alpha ของพอร์ตในข้อ 2–3
5. พิสูจน์ว่า $T_p = T_m + \alpha_p/\beta_p$ ภายใต้สมการ CAPM mean identity
6. พิสูจน์ว่า $S_p = \alpha_p/\sigma_p + \rho_{pm} S_m$
7. อธิบายว่าทำไม Sharpe และ Treynor อาจจัดอันดับพอร์ตสองพอร์ตไม่เหมือนกัน
8. สร้างตัวอย่างพอร์ตที่ beta ใกล้ศูนย์แล้วแสดงปัญหาของ Treynor Ratio
9. ถ้า alpha เท่ากับ 2.4% และ residual volatility เท่ากับ 6% จงหา Appraisal Ratio
10. พอร์ตมี active return เฉลี่ย 1.8% และ Tracking Error 4.5% จงหา Information Ratio
11. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Appraisal Ratio และ Information Ratio
12. พอร์ตมีผลตอบแทนเฉลี่ย 9% target 4% และ downside deviation 7% จงหา Sortino Ratio
13. เปรียบเทียบ Sharpe กับ Sortino ในกรณีที่ผลตอบแทนมี positive skewness สูง
14. ถ้า Sharpe เท่ากับ 0.55 risk-free rate 2% และ market volatility 18% จงหา M^2
15. ถ้า CAGR เท่ากับ 11% และ MDD เท่ากับ 22% จงหา Calmar Ratio
16. อธิบายเหตุผลที่พอร์ต Sharpe สูงกว่าอาจมี Calmar ต่ำกว่าอีกพอร์ตหนึ่งได้
17. ออกแบบนิยาม RAROC สำหรับหน่วยธุรกิจที่มี expected loss และ economic capital
18. อธิบายผลกระทบของ Benchmark mismatch ต่อ alpha และ Information Ratio
19. ให้พอร์ตและ Benchmark มี 4 sectors สร้างข้อมูลน้ำหนักและผลตอบแทน แล้วคำนวณ A_i, S_i, I_i
20. จากข้อ 19 พิสูจน์เชิงตัวเลขว่า $R_P - R_B = \sum_i (A_i + S_i + I_i)$
21. เปรียบเทียบ BHB attribution กับ Brinson–Fachler และอภิปรายเหตุผลที่ allocation effect รายsector อาจต่างกัน
22. อธิบาย linking problem ของ multi-period attribution
23. สร้างข้อมูลผลตอบแทนรายเดือน 60 งวดแล้วเปรียบเทียบ full-sample Sharpe กับ rolling 12-month Sharpe
24. เปรียบเทียบ rolling windows 12, 24 และ 36 เดือน และอภิปราย bias–variance trade-off
25. ทำ IID bootstrap 5,000 ครั้งสำหรับ Sharpe Ratio และสร้างช่วงความเชื่อมั่น 95%
26. อธิบายว่าทำไม block bootstrap อาจเหมาะกว่า IID bootstrap เมื่อผลตอบแทนมี autocorrelation
27. สร้างตัวอย่าง gross performance ที่ดูดี แต่ net performance หลัง transaction cost ไม่สามารถชนะ Benchmark ได้
28. อธิบาย data-snooping และ multiple-testing risk ในการเลือกกลยุทธ์จาก parameter จำนวนมาก
29. ออกแบบ Performance Dashboard สำหรับกองทุน active SET50 โดยระบุอย่างน้อย TWR, net return, beta, TE, Sharpe, IR, Jensen Alpha, MDD, turnover และ attribution
30. เขียนเกณฑ์ตัดสินใจ retain–revise–stop สำหรับกลยุทธ์โดยใช้ OOS performance, drawdown, cost,

attribution และ uncertainty ร่วมกัน

คำถามชวนคิด

1. ถ้าพอร์ตชนะ Benchmark แต่ Sharpe ต่ำกว่า Benchmark ควรถือว่าผู้จัดการทำผลงานดีหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. Alpha ที่เป็นบวกแต่ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติควรถูกใช้ในการตัดสินใจจัดสรรเงินอย่างไร
3. หากผู้จัดการสร้าง Information Ratio สูงด้วยการรับ active risk ต่ำมาก ตัวเลขดังกล่าวเพียงพอสำหรับสรุปว่ามี skill หรือไม่
4. Attribution ที่แสดงว่า allocation เป็นบวกแต่ selection เป็นลบควรนำไปสู่การเปลี่ยนกระบวนการลงทุนอย่างไร
5. เหตุใดกลยุทธ์ที่ดูดีใน full sample จึงอาจล้มเหลวทันทีเมื่อเข้าสู่ out-of-sample
6. ในยุคที่สามารถทดสอบกลยุทธ์หลายพันแบบด้วย AI ได้อย่างรวดเร็ว ระบบ performance validation ควรเข้มงวดขึ้นในด้านใดบ้าง

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 12

[11] Gary P. Brinson, L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower. “Determinants of Portfolio Performance”. In: *Financial Analysts Journal* 42.4 (1986), pp. 39–44.

[27] Michael C. Jensen. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964”. In: *The Journal of Finance* 23.2 (1968), pp. 389–416.

[31] Andrew W. Lo. “The Statistics of Sharpe Ratios”. In: *Financial Analysts Journal* 58.4 (2002), pp. 36–52.

[36] Franco Modigliani and Leah Modigliani. “Risk-Adjusted Performance”. In: *The Journal of Portfolio Management* 23.2 (1997), pp. 45–54.

[49] William F. Sharpe. “Mutual Fund Performance”. In: *The Journal of Business* 39.1 (1966), pp. 119–138.

[52] Frank A. Sortino and Robert van der Meer. “Downside Risk”. In: *The Journal of Portfolio Management* 17.4 (1991), pp. 27–31.

[58] Jack L. Treynor. “How to Rate Management of Investment Funds”. In: *Harvard Business Review* 43.1 (1965), pp. 63–75.

[69] Wichai Witayakiattilerd and Wararit Panichkitkosolkul. “Robust Backtesting of Bollinger Bands with Alternative Moving Averages: An Empirical Study on SET50 Stocks”. In: *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science* 12 (2026), pp. 96–118. DOI: 10.58715/bangmodjmcs.2026.12.6.

บทที่ 13 กองทุนรวม ETF และการลงทุนแบบดัชนี

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายกองทุนรวมในฐานะ *portfolio vehicle* และแยกชั้นสินทรัพย์ หน่วยลงทุน การกำกับดูแล และกลไกซื้อขายออกจากกันได้
2. คำนวณมูลค่าทรัพย์สินสุทธิ มูลค่าต่อหน่วย ผลตอบแทนรวม และผลของกระแสเงินสดของกองทุนได้อย่างถูกต้อง
3. เปรียบเทียบกองทุนเปิด กองทุนปิด Index Fund และ ETF โดยแยกให้ชัดว่า *Index Fund* เป็นแนวทางการลงทุน ส่วน *ETF* เป็นโครงสร้างหน่วยที่ซื้อขายในตลาดรอง และวิเคราะห์ราคา สภาพคล่อง การออก/ไถ่ถอนหน่วย และ premium/discount ได้
4. สร้างและตีความดัชนีแบบถ่วงน้ำหนักด้วยมูลค่าตลาดและแบบน้ำหนักเท่ากัน รวมถึงอธิบายผลของ rebalancing และ index construction
5. อธิบาย Full Replication, Sampling และ Optimization-based Replication และเชื่อมปัญหา index tracking กับ quadratic optimization
6. คำนวณ Tracking Difference, Tracking Error, Information Ratio, Active Share และ premium/discount to NAV
7. วิเคราะห์ Expense Ratio, Turnover, Bid–Ask Spread, Market Impact ภาษี และ cash drag โดยแยกต้นทุนที่สะท้อนอยู่ใน NAV ออกจากต้นทุนที่ผู้ลงทุนจ่ายเพิ่มเติม เพื่อหลีกเลี่ยงการหักต้นทุนซ้ำ
8. เปรียบเทียบ Active, Passive และ Smart Beta โดยใช้ benchmark, factor exposure, cost, capacity และ style drift
9. วิเคราะห์ความซ้ำซ้อนระหว่างกองทุนด้วย holdings similarity และ factor exposure
10. เปรียบเทียบ Lump Sum, Dollar Cost Averaging และ Share Cost Averaging โดยแยกข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ออกจากข้อสรุปเชิงพฤติกรรม

ข้อสังเกต

แกนของบท

บทนี้มองกองทุนไม่ใช่เพียงผลิตภัณฑ์ทางการเงิน แต่เป็นระบบที่แปลงพอร์ตสินทรัพย์ให้เป็นหน่วยลงทุนที่ซื้อขายได้ การวิเคราะห์จึงควรดำเนินตามลำดับ

$$\text{Structure} \longrightarrow \text{Value} \longrightarrow \text{Track} \longrightarrow \text{Trade} \longrightarrow \text{Cost} \longrightarrow \text{Evaluate} \longrightarrow \text{Select}$$

ทุก ขั้น มี แหล่ง ความ เสี่ยง ต่าง กัน ตั้งแต่ valuation risk และ tracking risk ไป จนถึง liquidity, governance, factor และ behavioral risk

ในเชิงวิเคราะห์ควรแยกคำถามออกเป็นสามชั้น ได้แก่ **กองทุนถืออะไร** ซึ่งกำหนด economic exposure, **หน่วยลงทุนถูกสร้างและซื้อขายอย่างไร** ซึ่งกำหนด liquidity และ premium/discount และ **ผู้ลงทุนจ่ายต้นทุนอะไรจริง** ซึ่งกำหนดผลตอบแทนสุทธิ การแยกสามชั้นนี้ช่วยป้องกันการสรุปจากชื่อผลิตภัณฑ์เพียงอย่างเดียว

13.1 กองทุนรวมในฐานะ Portfolio Vehicle

กองทุนรวมรวบรวมเงินจากผู้ลงทุนและจัดสรรไปยังสินทรัพย์ตามนโยบายที่กำหนด ผู้ถือหน่วยไม่ได้ถือสินทรัพย์แต่ละรายการโดยตรง แต่ถือสิทธิทางเศรษฐกิจในมูลค่าสุทธิของพอร์ตตามจำนวนหน่วยที่ถือ โครงสร้างนี้ทำให้ต้องแยกสามชั้นออกจากกัน ได้แก่ **สินทรัพย์ภายในกองทุน หน่วยลงทุน** และ **กลไกซื้อขายหรือไถ่ถอนหน่วย**

บทนิยาม 13.1

ให้ A_t เป็นมูลค่ารวมของสินทรัพย์ L_t เป็นหนี้สิน และ N_t เป็นจำนวนหน่วยลงทุน ณ เวลา t มูลค่าทรัพย์สินสุทธิและมูลค่าต่อหน่วยนิยามเป็น

$$\text{NAV}_t = A_t - L_t \tag{13.1}$$

$$n_t = \frac{\text{NAV}_t}{N_t} \tag{13.2}$$

ดังนั้นโครงสร้างพื้นฐานของกองทุนเขียนได้เป็น

$$\text{Portfolio Assets} \longrightarrow \text{NAV}_t \longrightarrow \text{NAV per Unit} \longrightarrow \text{Investor Wealth}$$

ในการคำนวณจริง A_t และ L_t ต้องใช้หลักเกณฑ์ valuation และ cut-off time เดียวกัน สินทรัพย์ควรรวม

เงินสด ลูกหนี้ และมูลค่ายุติธรรมของหลักทรัพย์ ขณะที่หนี้สินควรรวมเจ้าหนี้ ค่าใช้จ่ายค้างจ่าย ค่าธรรมเนียมค้างจ่าย และภาระอื่นที่เป็นของกองทุน ณ จุดประเมิน การเปลี่ยนแปลงของ NAV จึงอาจมาจากทั้งผลตอบแทนของสินทรัพย์ รายได้ ค่าใช้จ่าย และกระแสเงินจากการออกหรือรับซื้อคืนหน่วย

ข้อสังเกต

NAV ต่อหน่วยกับกระแสเงินเข้าออก

หากการออกและรับซื้อคืนหน่วยทำที่ราคายุติธรรมและไม่มีต้นทุนที่ตกแก่ผู้ถือหน่วยเดิม การไหลเข้าออกของเงินไม่ควรสร้างผลตอบแทนให้ผู้ถือหน่วยเดิมโดยตัวมันเอง อย่างไรก็ดี ในโลกจริง transaction cost, market impact และการซื้อขายที่ราคาต่างจากมูลค่ายุติธรรมอาจสร้าง *dilution* จึงมีเครื่องมือ เช่น swing pricing หรือ dilution adjustment ในบางโครงสร้างเพื่อจัดสรรต้นทุนให้เหมาะสม

ข้อสังเกต

การกระจายการลงทุนผ่านกองทุนเกิดจากสินทรัพย์ที่กองทุนถือจริง ไม่ได้เกิดจากคำว่า “กองทุน” โดยอัตโนมัติ กองทุนที่กระจุกตัวในอุตสาหกรรม ประเทศ ปัจจัย หรือผู้ออกตราสารบางกลุ่มอาจมี concentration risk สูงได้

13.2 โครงสร้างธรรมาภิบาลและการแยกหน้าที่

การบริหารกองทุนเป็นระบบหลายฝ่าย การแยกหน้าที่ช่วยลดความเสี่ยงจากการที่บุคคลหรือองค์กรเดียวควบคุมการตัดสินใจ การเก็บรักษาทรัพย์สิน การบันทึกสิทธิ และการตรวจสอบทั้งหมดพร้อมกัน

ตารางที่ 13.1: ผู้มีส่วนเกี่ยวข้องหลัก บทบาท และความเสี่ยงที่ควรตรวจ

หน่วยงาน/บุคคล	หน้าที่เชิงเศรษฐศาสตร์	ความเสี่ยง/ประเด็นตรวจสอบ
บริษัทจัดการ	กำหนดนโยบาย ระบบลงทุน การควบคุม และการปฏิบัติตาม mandate	investment process, compliance, conflicts
ผู้จัดการกองทุน	เลือกสินทรัพย์ กำหนดน้ำหนัก และดำเนินการลงทุน	selection, timing, implementation, key-person
ผู้ ดูแล ผล ประโยชน์/ ผู้รับ ฝาก ทรัพย์สิน	ดูแลหรือรับฝากทรัพย์สินและตรวจตามหน้าที่ของโครงสร้างกองทุน	custody, segregation, governance
นายทะเบียน	บันทึกจำนวนหน่วย สิทธิ และธุรกรรมของผู้ถือหน่วย	record, reconciliation, operational
ผู้สอบบัญชี	ตรวจสอบงบการเงินและหลักฐานที่เกี่ยวข้องตามมาตรฐาน	reporting, valuation evidence
ผู้จัดจำหน่าย/ช่องทางขาย	รับคำสั่งและให้บริการผู้ลงทุน	conduct, suitability, distribution
หน่วยงานกำกับ/ตลาด	กำหนดกติกา การเปิดเผยข้อมูล และโครงสร้างตลาด	investor protection, market integrity
AP/Participating Dealer ของ ETF	ทำ creation/ redemption กับ กองทุน ตาม เงื่อนไข ของผลิตภัณฑ์	basket execution, funding, settlement
Market Maker/ Liquidity Provider	เสนอราคาในตลาดรองและบริหาร inventory	spread, inventory risk, quote capacity

ประเด็นที่ต้องระวัง

กฎเกณฑ์ ค่าธรรมเนียม ภาษี รอบการซื้อขาย และเครื่องมือบริหารสภาพคล่องเปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา การใช้ข้อมูลผลิตภัณฑ์จริงจึงต้องตรวจหนังสือชี้ชวน เอกสารกองทุน และข้อกำกับฉบับปัจจุบันเสมอ

13.3 กองทุนเปิด กองทุนปิด และ ETF

บทนิยาม 13.2

กองทุนเปิด เปิดให้ซื้อและรับซื้อคืนหน่วยตามรอบและเงื่อนไขของโครงการ จำนวนหน่วยจึงเปลี่ยนตาม subscription/redemption

กองทุนปิด โดยโครงสร้างหลักกำหนดจำนวนหน่วยและอายุโครงการไว้มากกว่าแบบกองทุนเปิด และไม่ได้รับซื้อคืนหน่วยตามคำสั่งผู้ถือหน่วยในลักษณะเดียวกัน หากมีตลาดรอง ราคาซื้อขายอาจต่างจาก NAV อย่างต่อเนื่องได้

ETF เป็น โครงสร้าง กองทุน ที่ หน่วย ซื้อ ขาย ใน ตลาด รอง ระหว่าง วัน และ มี กระบวนการ creation/ redemption ในตลาดแรกสำหรับผู้เข้าร่วมที่ได้รับอนุญาตตามโครงสร้างผลิตภัณฑ์ กระบวนการอาจเป็น in-kind, cash หรือแบบผสม

ประเด็นที่ต้องระวัง

ETF ไม่ได้มีความหมายเดียวกับ Index Fund

Index Fund อธิบาย *วิธีบริหาร* ที่มุ่งติดตามดัชนี ส่วน ETF อธิบาย *โครงสร้างการซื้อขายของหน่วย* ETF จำนวนมากติดตามดัชนี แต่ ETF สามารถใช้กลยุทธ์ active หรือมีกติกาอื่นได้เช่นกัน การวิเคราะห์จึงต้องอ่าน mandate และ benchmark ไม่ควรอนุมานจากคำว่า ETF เพียงอย่างเดียว

ตารางที่ 13.2: เปรียบเทียบโครงสร้างกองทุนเปิด กองทุนปิด และ ETF

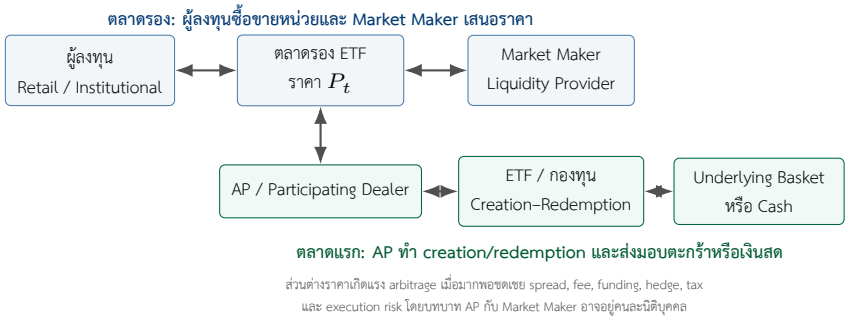
มิติ	กองทุนเปิด	กองทุนปิด	ETF
จำนวนหน่วย	เปลี่ยนตาม subscription/redemption	โดยทั่วไปกำหนดตามโครงการมากกว่าแบบเปิด	เปลี่ยน ผ่าน creation/ redemption ในตลาดแรก
การซื้อขายของผู้ลงทุนทั่วไป	ซื้อ/ขายคืนตามรอบและเงื่อนไขกองทุน	ซื้อขายตลาดรองหากมีการจดทะเบียน/จัดตลาด	ซื้อขายตลาดรองระหว่างเวลาทำการ
ราคาที่ใช้	ราคา เสนอ ขาย/ รับ ซื้อ คืน ตาม กติกา NAV และค่าธรรมเนียม	ราคาตลาดซึ่งอาจต่างจาก NAV	ราคา ตลาด ซึ่ง อาจ ต่าง จาก NAV/ iNAV ระหว่างวัน
Premium/Discount	ไม่ใช่กลไกหลักแบบตลาดรอง	เกิดและคงอยู่ได้นาน	เกิด ได้ แต่ creation/ redemption ช่วย จำกัดส่วนต่างเมื่อ arbitrage ทำได้
สภาพคล่อง	รอบ รับ ซื้อ คืน + สภาพ คล่อง สินทรัพย์ ภายใน	depth และ spread ในตลาดรอง	order book + MM/ AP + underlying basket
ต้นทุนเด่น	fee, dilution, dealing terms	fee, spread, market liquidity	fee, spread, tracking, basket/creation-redemption friction

ถ้า ราคา ตลาด ของ หน่วย เป็น P_t และ มูลค่า อ้างอิง ต่อ หน่วย ที่ สอดคล้อง กับ เวลา เดียวกัน เป็น n_t นิยาม premium/discount เป็น

$$q_t = \frac{P_t - n_t}{n_t} = \frac{P_t}{n_t} - 1 \tag{13.3}$$

เมื่อ $q_t > 0$ คือ premium และ $q_t < 0$ คือ discount ในการวิเคราะห์ระหว่างวัน n_t อาจต้องใช้ iNAV หรือมูลค่าตะกร้าที่คำนวณ ณ เวลาใกล้เคียงกันแทน official NAV สิ้นวัน มิฉะนั้น “premium” ที่เห็นอาจเกิดจาก stale valuation หรือความต่างของเวลาซื้อขายมากกว่าความคลาดเคลื่อนของราคา

รูปที่ 13.1 แยกตลาดรองซึ่งผู้ลงทุนทั่วไปซื้อขายหน่วยออกจากตลาดแรกซึ่ง AP หรือ Participating Dealer ทำ creation/redemption กับกองทุน การแยกสองตลาดนี้สำคัญ เพราะ market maker ทำหน้าที่เสนอราคา ขณะที่ AP ทำหน้าที่เชื่อมหน่วยกับตะกร้าสินทรัพย์ และสองบทบาทอาจเป็นคนละนิติบุคคล



รูปที่ 13.1: โครงสร้างสองตลาดของ ETF โดยแยกการซื้อขายหน่วยในตลาดรองออกจาก creation/redemption ในตลาดแรก

ตัวอย่าง 13.1. ถ้า ETF มี NAV ต่อหน่วย 10.00 บาท และราคาตลาด 10.15 บาท จะได้

$$q = \frac{10.15}{10.00} - 1 = 0.015 = 1.5\%$$

การเห็น premium ไม่ใช่หลักฐานของกำไรไร้ความเสี่ยง เพราะการทำ arbitrage มี spread ค่าธรรมเนียม market impact เวลา และความเสี่ยงจากการเคลื่อนไหวของตะกร้าสินทรัพย์

13.4 NAV ผลตอบแทน และกระแสเงินสด

หาก n_0 และ n_1 เป็น NAV ต่อหน่วยต้นงวดและปลายงวด และ d เป็นเงินจ่ายต่อหน่วยในงวดนั้น โดยวัดบน basis เดียวกันและไม่มีการปรับหน่วยอื่นที่ต้องแก้เพิ่มเติม ผลตอบแทนรวมหนึ่งงวดคือ

$$R_F = \frac{n_1 - n_0 + d}{n_0} \tag{13.4}$$

ถ้ามีหลายงวดและใช้ total-return convention ที่นำเงินจ่ายกลับไปลงทุน ณ จุดที่กำหนดอย่างสอดคล้องกัน ผลตอบแทนสะสมคำนวณด้วยการ chain-link

$$1 + R_{0:T}^{\mathrm{TR}} = \prod_{t=1}^{T} \left(1 + R_{F,t}\right) \tag{13.5}$$

ตัวอย่าง 13.2. NAV ต่อหน่วยต้นงวดเท่ากับ 10.00 บาท ปลายงวด 10.60 บาท และมีเงินจ่าย 0.30 บาทต่อหน่วย จะได้

$$R_F = \frac{10.60 - 10.00 + 0.30}{10.00} = 0.09 = 9\%$$

ถ้าวัดเฉพาะการเพิ่มของ NAV จะได้เพียง 6% และประเมินผลตอบแทนต่ำกว่าความจริง

ประเด็นที่ต้องระวัง

เงินปันผลจากกองทุนไม่ใช่ผลตอบแทนที่เกิดขึ้นโดยไม่ลดมูลค่ากองทุน เมื่อมีการจ่ายเงินออก สินทรัพย์สุทธิย่อมลดลงตามกลไกบัญชี การเปรียบเทียบกองทุนจึงควรใช้ total return ที่ปรับกระแสเงินสดอย่างสอดคล้องกัน และต้องระวังไม่หักค่าใช้จ่ายกองทุนซ้ำ หาก NAV/ผลตอบแทนที่เผยแพร่สะท้อนค่าใช้จ่ายภายในกองทุนแล้ว

สำหรับการประเมินผู้จัดการกองทุนควรใช้ผลตอบแทนที่ลดผลของจังหวะฝากถอนของผู้ลงทุน เช่น Time-Weighted Return ส่วนการวัดประสบการณ์จริงของผู้ลงทุนที่มีกระแสเงินสดหลายครั้งอาจใช้ Money-Weighted Return ตามวัตถุประสงค์

13.5 ดัชนีคือ Rule-Based Portfolio

ดัชนีไม่ได้เป็นเพียงตัวเลขอ้างอิง แต่เป็นกฎสร้างพอร์ตที่กำหนด universe เกณฑ์คัดเลือก วิธีให้น้ำหนัก corporate-action treatment และรอบการปรับองค์ประกอบ ดัชนีราคามาตรฐานมักเขียนในรูป

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{i,t} Q^*_{i,t}}{D_t} \tag{13.6}$$

เมื่อ $Q^*_{i,t}$ แทนจำนวนหุ้นอ้างอิงหลัง free-float/capping adjustment ตาม methodology และ D_t เป็น divisor ที่ถูกปรับเพื่อรักษาความต่อเนื่องเมื่อเกิดเหตุการณ์ที่ไม่ควรถูกนับเป็นผลตอบแทน เช่น การเปลี่ยนองค์ประกอบหรือ corporate action บางประเภท

น้ำหนักแบบมูลค่าตลาด ณ เวลา t จึงเป็น

$$w^{\text{mcap}}_{i,t} = \frac{P_{i,t} Q^*_{i,t}}{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t} Q^*_{j,t}} \tag{13.7}$$

ถ้าน้ำหนักถูกกำหนด ณ ต้นงวดและไม่มีการเปลี่ยนองค์ประกอบภายในงวด ผลตอบแทนพอร์ตดัชนีในงวดนั้นเขียนได้เป็น

$$R_{I,t} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t-1} R_{i,t} \tag{13.8}$$

โดย $R_{i,t}$ ต้องใช้ return convention เดียวกับดัชนี หากมี rebalance, divisor adjustment, tax หรือ corporate action ภายในงวด การสร้าง series จริงต้องใช้ methodology ของดัชนี ไม่ควรใช้ weighted-average formula แบบง่ายโดยไม่ตรวจเหตุการณ์เหล่านั้น

สำหรับ Equal-Weight Index

$$w_i^{\text{EW}} = \frac{1}{n} \tag{13.9}$$

ตัวอย่าง 13.3. หุ้น สาม ตัว มี ผล ตอบแทน $(4\%, -2\%, 6\%)$ และ น้ำ หนัก ตาม มูลค่า ตลาด $(0.50, 0.30, 0.20)$ จะได้

$$R_{\text{mcap}} = 0.50(0.04) + 0.30(-0.02) + 0.20(0.06) = 2.6\%$$

ขณะที่ equal weight ให้

$$R_{\text{EW}} = \frac{0.04 - 0.02 + 0.06}{3} \approx 2.67\%$$

ความแตกต่างมาจาก weighting rule แม้ universe จะเหมือนกัน

13.5.1 Price Index และ Total Return Index

Price Index เน้นการเปลี่ยนราคา ส่วน Total Return Index สมมติให้กระแสเงินสด เช่น เงินปันผล ถูกนำกลับไปลงทุนตามกฎของดัชนี และบางผู้ให้บริการยังเผยแพร่ Net Total Return Index ที่หัก withholding tax ตาม convention ที่กำหนด การประเมินกองทุนต้องจับคู่ return convention, currency และ tax basis ของกองทุนกับ benchmark ให้สอดคล้องกัน มิฉะนั้น active return และ alpha จะถูกบิดเบือนตั้งแต่ต้น

13.6 Index Tracking เป็นปัญหา Optimization

กองทุนดัชนีอาจใช้ Full Replication, Stratified Sampling หรือ Optimization-based Replication การถือ constituent ทุกตัวอาจไม่เหมาะเมื่อจำนวนหลักทรัพย์มาก สภาพคล่องต่ำ มี lot size หรือมีต้นทุนสูง

ให้ $\mathbf{w}$ เป็นน้ำหนักพอร์ตที่สร้างขึ้น $\mathbf{w}_B$ เป็นน้ำหนัก benchmark และ Σ เป็น covariance matrix ของผลตอบแทน หลักการพื้นฐานของ tracking optimization คือ

$$\min_{\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w} - \mathbf{w}_B)^\top \Sigma (\mathbf{w} - \mathbf{w}_B) \tag{13.10}$$

ภายใต้

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1 \tag{13.11}$$

$$\ell_i \le w_i \le u_i \tag{13.12}$$

และอาจเพิ่มข้อจำกัดด้าน turnover, liquidity, cardinality, lot size และ transaction cost

เมื่อ $\Sigma \succeq 0$ และข้อจำกัดเป็นเชิงเส้น ปัญหาพื้นฐานเป็น convex quadratic program แต่การเพิ่ม cardinality หรือ lot-size/integer constraints ทำให้ปัญหากลายเป็น mixed-integer optimization และอาจไม่เป็น convex แบบเดิม ในทางปฏิบัติจึงควรแยก *tracking objective* ออกจาก *implementation constraints* และตรวจ solution quality หลัง solver ทำงานเสมอ

หากต้องการให้แบบจำลองสะท้อนการซื้อขายจากพอร์ตเดิม $\mathbf{w}^{-}$ สามารถเพิ่มต้นทุนโดยประมาณได้ เช่น

$$\min_{\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w}-\mathbf{w}_B)^{\mathsf{T}}\Sigma(\mathbf{w}-\mathbf{w}_B) + \lambda_C\, C(\mathbf{w}-\mathbf{w}^{-}) \tag{13.13}$$

โดย $C(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันต้นทุนและ λ_C กำหนด trade-off ระหว่าง tracking quality กับ implementation cost

เหตุผลของ Tracking Variance. ให้ active weight เป็น $\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_B$ จะได้ active return

$$R_F - R_B = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(R_F - R_B) = \mathrm{Var}(\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}) = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{a}$$

จึงได้ objective ในสมการ (13.10) □

ข้อสังเกต

Passive investing ไม่ได้หมายความว่าไม่มี optimization แต่เปลี่ยน objective จากการหาพอร์ตที่ให้ผลตอบแทนคาดหมายสูงเป็นการลดความคลาดเคลื่อนจาก benchmark ภายใต้ข้อจำกัดของการนำไปใช้จริง

13.7 Tracking Difference และ Tracking Error

ให้ active return รายงวดเป็น

$$a_t = R_{F,t} - R_{B,t} \tag{13.14}$$

คำว่า Tracking Difference ใช้ได้ทั้งกับผลต่างผลตอบแทนของช่วงหนึ่งและค่าเฉลี่ยหลายงวด ในบทนี้กำหนด *mean tracking difference* เป็นค่าเฉลี่ยของ active return เพื่อให้สอดคล้องกับการคำนวณ Tracking Error

บทนิยาม 13.3

Mean Tracking Difference คือ

$$TD = \bar{a} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_t \tag{13.15}$$

และ Tracking Error แบบตัวอย่างคือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ active return

$$TE = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(a_t - \bar{a})^2} \tag{13.16}$$

Tracking Difference วัด **ทิศทางและระดับของความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ย** ส่วน Tracking Error วัด **ความผันผวนของความคลาดเคลื่อน** กองทุนอาจมี TD ติดลบจากค่าใช้จ่ายแต่ TE ต่ำมากได้ หรือมี TD ใกล้ศูนย์แต่ TE สูงจากความคลาดเคลื่อนบวกและลบที่หักล้างกัน

ถ้ามี m งวดต่อปี การ annualize แบบมาตรฐานเขียนได้เป็น $TE_{\text{ann}} \approx \sqrt{m}\,TE$ แต่ความสัมพันธ์นี้อาศัยเงื่อนไขเกี่ยวกับการพึ่งพากันตามเวลา หาก active returns มี autocorrelation สูงควรประมาณ annualized risk จากข้อมูลให้สอดคล้องกับโครงสร้างเวลา

สำหรับกองทุน active นิยาม Information Ratio บนหน่วยเวลาเดียวกันเป็น

$$IR = \frac{\bar{a}}{TE} \tag{13.17}$$

เมื่อ $TE = 0$ ค่า IR ไม่ถูกนิยาม และสำหรับกองทุน passive เป้าหมายหลักมักเป็น TD/TE ต่ำและต้นทุนเหมาะสม มากกว่าการเพิ่ม IR

Tracking Diagnostics

อย่ารายงานเพียงค่าเดียว ควรตรวจอย่างน้อย

$$\boxed{TD,\ TE,\ IR,\ \text{Rolling TE},\ \text{Costs},\ \text{Holdings Deviation}}$$

และตรวจว่าความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นในช่วง rebalance, corporate action, market stress หรือช่วงที่ underlying market ปิดทำการหรือไม่

13.8 ETF: Creation/Redemption และ Arbitrage Band

ETF เชื่อมตลาดรองกับตะกร้าสินทรัพย์ผ่าน AP หรือ Participating Dealer ตามโครงสร้างผลิตภัณฑ์ เมื่อส่วนต่างระหว่างราคาหน่วยกับมูลค่าตะกร้ามากพอชดเชยต้นทุนและความเสี่ยงรวม แรง arbitrage มีแนวโน้มดึงราคาและมูลค่าตะกร้าเข้าหากัน แต่ไม่รับประกันว่าส่วนต่างจะเป็นศูนย์ตลอดเวลา

ให้ $q_t = (P_t - n_t)/n_t$ เป็น premium/discount แบบสัดส่วน และให้ κ_t เป็นต้นทุน arbitrage รวมในหน่วยสัดส่วน ซึ่งรวม spread, creation/redemption fee, funding, hedge cost, tax, FX และ execution risk หลักคิดแบบย่อคือ

$$|q_t| > \kappa_t \tag{13.18}$$

จึงเริ่มมีแรงจูงใจเชิงเศรษฐศาสตร์ให้ทำ arbitrage หากธุรกรรมสามารถดำเนินการได้จริง ดังนั้นราคาสามารถอยู่ภายใน *no-arbitrage band* โดยไม่ขัดกับประสิทธิภาพตลาด

ประเด็นที่ต้องระวัง

เมื่อ underlying market ปิดทำการ แต่ ETF ยังซื้อขายอยู่ official NAV หรือราคาตะกร้าบางส่วนอาจ stale ในกรณีนี้ราคาของ ETF อาจทำหน้าที่ price discovery มากกว่าการเป็น “ราคาผิด” การวิเคราะห์ premium/discount จึงต้องตรวจ timestamp, FX และเวลาทำการของทุกตลาดที่เกี่ยวข้อง

13.8.1 สภาพคล่องของ ETF มีหลายชั้น

สภาพคล่องที่ผู้ลงทุนเห็นใน order book เป็นเพียงชั้นแรก ความสามารถในการซื้อขายจริงยังขึ้นกับสภาพคล่องของ underlying basket ความสามารถของ market maker/AP ความต่างเวลาซื้อขาย ค่าเงิน ภาษี และ market impact

ข้อสังเกต

Liquidity Look-Through

การประเมิน ETF ควรถาม

$$\boxed{\text{Screen Liquidity} \longrightarrow \text{AP/MM Capacity} \longrightarrow \text{Underlying Liquidity}}$$

ETF ที่ volume หน่วยไม่สูงอาจยังซื้อขายได้ดีถ้าตะกร้าสินทรัพย์มีสภาพคล่องและกลไกสร้างหน่วยทำงานได้ ในทางกลับกัน volume สูงไม่ทำให้ความเสี่ยงของ underlying ที่ illiquid หายไป และในภาวะ

stress ความสามารถของ AP/MM อาจลดลงพร้อมกับ spread ของ underlying ที่กว้างขึ้น จึงควร stress ทั้งสองชั้นพร้อมกัน

13.9 Leveraged และ Inverse ETF: Path Dependence

ถ้า ETF ตั้งเป้าผลตอบแทนรายวันเป็น L เท่าของ benchmark

$$1 + R_{1:T}^{ETF} = \prod_{t=1}^{T}(1 + LR_{B,t}) \tag{13.19}$$

ซึ่งโดยทั่วไปไม่เท่ากับ

$$1 + L\left[\prod_{t=1}^{T}(1 + R_{B,t}) - 1\right] \tag{13.20}$$

สมการนี้เป็นแบบจำลองเชิงอุดมคติที่สมมติว่ากองทุนทำ daily target ได้ตาม L และยังไม่หัก fee, financing, rebalance slippage หรือข้อจำกัดจากเหตุการณ์รุนแรง ความแตกต่างจาก "L เท่าของผลตอบแทนสะสม" เกิดจากการ reset น้ำหนักทุกวันและการทบต้นตามเส้นทางราคา

สำหรับผลตอบแทนรายวันที่มีขนาดเล็ก $\log(1 + LR_t) \approx LR_t - \frac{1}{2}L^2R_t^2$ จึงเห็นว่าความผันผวนสามารถสร้าง drag ผ่านพจน์กำลังสอง แต่ผลลัพธ์จริงยังขึ้นกับแนวโน้มของตลาด ไม่ควรสรุปว่า leveraged ETF จะขาดทุนจาก volatility ทุกกรณี

ตัวอย่าง 13.4. ดัชนีเพิ่ม 10% แล้วลด 9.0909% จึงกลับใกล้จุดเริ่มต้น แต่ผลิตภัณฑ์ $2\times$ ที่ให้ 20% และ -18.1818% จะมีผลตอบแทนสะสม

$$(1.20)(0.818182) - 1 \approx -1.82\%$$

ผลนี้เกิดจาก daily reset และ geometric compounding

13.10 ต้นทุน: จาก Gross Return สู่ Investor Return

ผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนได้รับจริงไม่เท่ากับผลตอบแทนก่อนต้นทุน ให้ R_g เป็น gross return และให้ต้นทุนรวมต่อช่วงเวลาเป็น c แบบสัดส่วน ความสัมพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$R_{\text{net}} \approx R_g - c \tag{13.21}$$

แต่การคำนวณแบบทบต้นควรใช้ผลตอบแทนสุทธิที่เกิดจริงในแต่ละงวด หากใช้แบบจำลองรายปีอย่างง่ายที่ gross return คงที่ r_g และ expense ratio f ถูกหักแบบสัดส่วน จะได้

$$W_T = W_0\big[(1+r_g)(1-f)\big]^T \approx W_0(1+r_g-f)^T \tag{13.22}$$

โดยพจน์หลังเป็น first-order approximation และไม่ควรใช้แทนกลไกการหักค่าธรรมเนียมจริงเมื่อจำเป็นต้องการความแม่นยำสูง

ตัวอย่าง 13.5. ลงทุน 1,000,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี ถ้าผลตอบแทนก่อนค่าธรรมเนียมเท่ากับ 8% ต่อปี

กรณีค่าธรรมเนียม 0.5%

$$W_{20}^{(0.5)} = 1{,}000{,}000(1.075)^{20}$$

กรณีค่าธรรมเนียม 1.5%

$$W_{20}^{(1.5)} = 1{,}000{,}000(1.065)^{20}$$

ถ้าใช้ approximation $r_{\text{net}} \approx r_g - f$ จะได้ประมาณ 4.25 ล้านบาท เทียบกับ 3.52 ล้านบาท หรือแตกต่างราว 0.72 ล้านบาท แม้ค่าธรรมเนียมต่างกันเพียงหนึ่งจุดร้อยละต่อปี ตัวอย่างนี้แสดงผลของ compounding ไม่ได้หมายความว่าผลตอบแทน 8% จะคงที่จริงทุกปี

บทนิยาม 13.4

ต้นทุนควรแยกอย่างน้อยสองชั้น

Fund-level cost :	management/operating fee, trading, tax, cash drag,
Investor-level cost :	load, brokerage, spread, tax, FX และ platform fee

Tracking friction เป็นผลรวมปลายทางของต้นทุนและข้อจำกัดหลายชนิด ไม่ควรถูกบวกซ้ำกับค่าใช้จ่ายที่สร้าง tracking difference อยู่แล้ว

ประเด็นที่ต้องระวัง

หาก total return ที่คำนวณจาก NAV เป็นผลตอบแทนหลังค่าใช้จ่ายกองทุนแล้ว การนำ expense ratio มาหักซ้ำจะทำให้ net return ต่ำกว่าความจริง การปรับต้นทุนต้องระบุให้ชัดว่ารายการใดอยู่ *inside NAV* และรายการใดผู้ลงทุนจ่าย *outside NAV*

13.11 Active, Passive และ Smart Beta

ให้ α_g เป็น gross alpha และ c เป็นต้นทุนส่วนเพิ่มเหนือทางเลือก passive

$$\alpha_{\text{net}} \approx \alpha_g - c \tag{13.23}$$

สมการนี้ทำให้เห็นว่า active management ไม่จำเป็นต้อง “ไม่มีทักษะ” จึงแพ้ benchmark ผู้จัดการอาจมี gross skill แต่ไม่มากพอชดเชยค่าธรรมเนียม turnover และ market impact ขณะเดียวกัน passive ไม่ได้หมายถึง “ไม่มีการตัดสินใจ” เพราะ index construction, rebalance rule, tax treatment และ implementation ล้วนเป็นแหล่งผลลัพธ์ที่ต่างกันได้

ตารางที่ 13.3: เปรียบเทียบ Market-Cap Index, Smart Beta และ Active Fund

มิติ	Market-Cap Index	Smart Beta	Active
กฎการลงทุน	benchmark weights	systematic alternative weights	discretion/model
เป้าหมาย	ติดตามตลาด	รับ factor premium หรือปรับโครงสร้างความเสี่ยง	สร้าง ผล ตอบแทน เหนือ benchmark
turnover	ต่ำถึงปานกลาง	ขึ้นกับ factor และ rebalance	แตกต่างตามกลยุทธ์
ความเสี่ยงหลัก	concentration/ reconstitution	factor cycle/ crowding/ model	skill/style drift/cost
การประเมิน	TD/TE/cost	factor exposure + TD/TE	alpha/ IR/ Active Share/ OOS

13.11.1 Smart Beta ในฐานะสะพานระหว่าง Passive และ Active

Smart Beta ใช้กฎที่กำหนดล่วงหน้าเพื่อเอียงน้ำหนักไปยัง factor เช่น value, size, quality, momentum หรือ low volatility จึงมีความเป็น systematic แต่ไม่ได้เป็น market portfolio แบบถ่วงมูลค่าตลาด

เขียนน้ำหนักเชิงนามธรรมได้เป็น

$$w_i = \frac{g(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} g(x_j)} \tag{13.24}$$

เมื่อ x_i เป็น factor characteristic และ $g(\cdot)$ เป็นกฎแปลง score เป็นน้ำหนัก สำหรับ long-only portfolio ต้องกำหนดให้ $g(x_i) \geq 0$ หรือใช้ transformation ที่ทำให้น้ำหนักไม่ติดลบ หากอนุญาต short position ต้อง

เปลี่ยน normalization และข้อจำกัดให้สอดคล้องกับ gross/net exposure ที่ต้องการ

ประเด็นที่ต้องระวัง

Factor premium ในอดีตไม่ใช่ผลตอบแทนรับประกัน Smart Beta มี model risk, crowding risk, turnover, valuation risk และช่วงเวลาที่ factor underperform ได้ยาวนาน

13.12 Active Share และ Style Drift

ให้ $w_{P,i}$ และ $w_{B,i}$ เป็นน้ำหนักของหลักทรัพย์ i ในพอร์ตและ benchmark นิยาม Active Share เป็น

$$AS = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |w_{P,i} - w_{B,i}| \tag{13.25}$$

ขอบเขตของ Active Share. เพราะ $\mathbf{w}_P$ และ $\mathbf{w}_B$ เป็นน้ำหนัก long-only บน union universe เดียวกันและแต่ละเวกเตอร์รวมเป็นหนึ่ง

$$\sum_i |w_{P,i} - w_{B,i}| \le 2$$

จึงได้

$$0 \le AS \le 1$$

ถ้าพอร์ตเหมือน benchmark ทุกตัวจะได้ $AS = 0$ ส่วนพอร์ตที่ holdings ไม่ทับซ้อนกับ benchmark เลยในกรอบ long-only จะได้ $AS = 1$ □

Active Share วัดความแตกต่างของ **holdings** ส่วน Tracking Error วัดความแตกต่างของ **return path** ทั้งสองจึงไม่ทดแทนกัน และ Active Share สูงไม่ได้พิสูจน์ skill เพราะพอร์ตอาจแตกต่างจาก benchmark มากแต่เลือก exposure ที่ให้ผลตอบแทนต่ำกว่าได้

Style Drift Check

ควรติดตามอย่างน้อย

$$\boxed{AS_t,\ \beta_t,\ \text{Factor Exposures}_t,\ \text{Sector Weights}_t,\ TE_t}$$

การที่กองทุนยังใช้ชื่อกลยุทธ์เดิมไม่ได้แปลว่า exposure ทางเศรษฐศาสตร์ยังเหมือนเดิม

13.13 หลายกองทุนไม่ได้แปลว่ากระจายความเสี่ยง

ให้ $\mathbf{w}_i$ และ $\mathbf{w}_j$ เป็นเวกเตอร์ holdings ของกองทุนสองกอง นิยาม cosine similarity เป็น

$$S_{ij}^{\cos} = \frac{\mathbf{w}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_i\|_2 \|\mathbf{w}_j\|_2} \tag{13.26}$$

และ weighted Jaccard similarity เป็น

$$S_{ij}^{J} = \frac{\sum_k \min(w_{ik}, w_{jk})}{\sum_k \max(w_{ik}, w_{jk})} \tag{13.27}$$

สำหรับน้ำหนัก long-only ที่ไม่ติดลบ ค่าที่สูงบ่งชี้ holdings overlap สูง โดย cosine similarity อยู่ในช่วง $[0, 1]$ และ weighted Jaccard อยู่ในช่วง $[0, 1]$ ภายใต้ convention นี้ หากพอร์ตมี short positions ต้องใช้มาตรวัดที่รองรับ signed weights หรือแยก long/short books ก่อนตีความ

อย่างไรก็ดี holdings overlap เป็นเพียงชั้นแรก การวิเคราะห์ที่สมบูรณ์ควรดู factor exposure ร่วมด้วย เพราะกองทุนที่ถือหุ้นคนละตัวอาจยังรับปัจจัยตลาด อุตสาหกรรม ประเทศ สกุลเงิน หรือ style เดียวกัน

13.13.1 Effective Number of Funds

ถ้าให้น้ำหนักเงินลงทุนในกองทุน m กองเป็น $u_1, \dots, u_m$ นิยามจำนวนกองทุนเชิงประสิทธิผลแบบ Herfindahl เป็น

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} u_j^2} \tag{13.28}$$

อย่างไรก็ตาม N_{eff} วัดเพียงการกระจายน้ำหนัก *ระหว่างชื่อกองทุน* ไม่ได้ตรวจ holdings overlap หรือ correlation จึงอาจให้ภาพ diversification สูงเกินจริง ควรใช้ร่วมกับ look-through holdings, similarity matrix, factor exposure และ risk contribution

13.14 Fund Due Diligence: จากผลตอบแทนสู่การตัดสินใจ

การคัดเลือกกองทุนที่ดีไม่ควรเริ่มจาก ranking ผลตอบแทนย้อนหลังเพียงอย่างเดียว แต่ควรเริ่มจากคำถามว่า benchmark และ mandate เหมาะสมหรือไม่ แล้วจึงตรวจผลตอบแทน ความเสี่ยง ต้นทุน exposures และความเสถียร

Fund Due-Diligence Pipeline

1. **Mandate**: ตรวจวัตถุประสงค์ universe benchmark และข้อจำกัด
2. **Return**: ใช้ total return และ net return ใน convention เดียวกัน
3. **Risk**: ตรวจ volatility, downside risk, drawdown และ stress periods
4. **Benchmark**: ตรวจ alpha, beta, TD, TE และ IR ตามประเภทกองทุน
5. **Holdings**: ตรวจ concentration, Active Share, overlap และ factor exposure
6. **Cost**: ตรวจ fee, turnover, spread, market impact ภาษี และความต่างระหว่าง share classes
7. **Stability**: ตรวจ rolling windows, regime dependence และ style drift
8. **Implementation**: ตรวจ liquidity, dealing terms, AUM และ capacity
9. **Governance**: ตรวจ process, key-person risk ความสม่ำเสมอของ mandate และการเปลี่ยน benchmark/methodology

13.14.1 Capacity

เมื่อ AUM เพิ่มขึ้น กลยุทธ์ที่ต้องซื้อขายหลักทรัพย์สภาพคล่องต่ำอาจมี market impact สูงขึ้น เขียน net alpha เป็นฟังก์ชันของ AUM ได้เป็น

$$\alpha_{\text{net}}(A) = \alpha_g(A) - c(A) \tag{13.29}$$

ในช่วงที่ strategy เริ่มชนข้อจำกัดด้านสภาพคล่องมักพบว่า marginal implementation cost เพิ่มตาม AUM จึงมี $c'(A) > 0$ โดยประมาณ แต่ความสัมพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นเส้นตรงหรือเพิ่มขึ้นตลอดทุกช่วง เพราะอาจมี economy of scale ในต้นทุนบางส่วน

ข้อสังเกต

Capacity ไม่ใช่ AUM สูงสุดเชิงบัญชี

Capacity ที่มีความหมายทางการลงทุนคือระดับสินทรัพย์ภายใต้การบริหารที่กลยุทธ์ยังสร้างผลตอบแทนสุทธิที่คุ้มกับความเสี่ยงหลังต้นทุนและ market impact ไม่ใช่เพียงจำนวนเงินสูงสุดที่กองทุนสามารถรับได้

13.15 DCA, Share Cost Averaging และ Lump Sum

13.15.1 Dollar Cost Averaging

สมมติลงทุนเงินจำนวนคงที่ C ที่ราคา $P_t > 0$ ในแต่ละงวด โดยละค่าธรรมเนียมและสมมติว่าสามารถซื้อเศษหน่วยได้ จำนวนหน่วยที่ซื้อคือ

$$q_t = \frac{C}{P_t}$$

จำนวนหน่วยรวมหลัง T งวดคือ

$$Q_T = C \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{P_t}$$

ต้นทุนเฉลี่ยต่อหน่วยจึงเป็น

$$\bar{P}_{\text{DCA}} = \frac{TC}{Q_T} = \frac{T}{\sum_{t=1}^{T} 1/P_t} \tag{13.30}$$

DCA และ Harmonic Mean. จาก $q_t = C/P_t$ จะได้

$$Q_T = \sum_{t} q_t = C \sum_{t} \frac{1}{P_t}$$

เงินลงทุนรวมเท่ากับ TC ดังนั้น

$$\bar{P}_{\text{DCA}} = \frac{TC}{C \sum_t 1/P_t} = \frac{T}{\sum_t 1/P_t}$$

ซึ่งคือ harmonic mean ของราคาในกรณีลงทุนเงินเท่ากันทุกงวด □

ประเด็นที่ต้องระวัง

ข้อเท็จจริงที่ต้นทุนเฉลี่ยเป็น harmonic mean ไม่ได้พิสูจน์ว่า DCA จะสร้าง terminal wealth สูงกว่า Lump Sum เสมอ แม้ harmonic mean ไม่เกิน arithmetic mean สำหรับชุดราคาบวกเดียวกัน แต่ Lump Sum ซื้อที่ *ราคา ณ เวลาเริ่มต้น* ไม่ได้ซื้อด้วย arithmetic mean ของชุดเดียวกัน การเปรียบเทียบที่ถูกต้องจึงต้องระบุว่าเงินทั้งหมดพร้อมตั้งแต่ต้นหรือเกิดขึ้นตามกระแสรายได้ รวมทั้งผลตอบแทนของเงินสดระหว่างรอ ต้นทุน และความเสี่ยงของเส้นทางราคา

13.15.2 Share Cost Averaging

ถ้าซื้อจำนวนหน่วยคงที่ q ทุกงวด โดยละค่าธรรมเนียม เงินที่ใช้ในงวด t คือ

$$C_t = qP_t$$

ต้นทุนเฉลี่ยต่อหน่วยเป็น arithmetic mean

$$\bar{P}_{\text{SCA}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P_t \tag{13.31}$$

ดังนั้น DCA และ Share Cost Averaging ควบคุมคนละตัวแปร DCA ควบคุม **เงินลงทุนต่อรอบ** ส่วน Share Cost Averaging ควบคุม **จำนวนหน่วยต่อรอบ**

13.16 Market Timing และต้นทุนของการรอ

Market Timing ต้องการให้สัดส่วนลงทุนเปลี่ยนตามสัญญาณ หาก $s_t \in [0, 1]$ เป็นสัดส่วนที่ลงทุนในสินทรัพย์เสี่ยง โดย s_t ต้องถูกกำหนดจากข้อมูลที่ทราบ *ก่อน* ผลตอบแทน $R_{r,t}$ เกิดขึ้น เพื่อป้องกัน look-ahead bias

$$R_{p,t} = s_t R_{r,t} + (1 - s_t)R_{f,t} - c_t \tag{13.32}$$

ความสำเร็จจึงขึ้นกับทั้งคุณภาพสัญญาณ decision clock, execution latency และต้นทุน ไม่ใช่เพียงการทำนายทิศทางถูกบ่อยครั้ง อัตราความแม่นยำของสัญญาณอาจสูงแต่ยังให้ผลตอบแทนต่ำได้ หากพลาดช่วงผลตอบแทนขนาดใหญ่หรือเปลี่ยนสถานะบ่อยจนต้นทุนสูง

ข้อสังเกต

การอยู่ในเงินสดมี opportunity cost เมื่อสินทรัพย์เสี่ยงให้ผลตอบแทนบวก ดังนั้นการเปรียบเทียบ timing strategy ต้องรวมผลตอบแทนของเงินสดและต้นทุนการสลับสถานะ

13.17 Risk Map ของกองทุนและ ETF

ตารางที่ 13.4: แผนที่ความเสี่ยงของกองทุนและ ETF กับตัวชี้วัดที่ควรตรวจ

ความเสี่ยง	กลไก/ตัวอย่าง	ตัวชี้วัดหรือการตรวจ
Market/Factor	beta, duration, FX, value, momentum	exposure, stress, factor attribution
Tracking/Benchmark	sampling, rebalance timing, wrong benchmark	TD, TE, rolling TE, benchmark review
Premium/Discount	ETF price ต่างจากมูลค่าตะกร้า	q_t, spread, timestamp, underlying-open status
Liquidity	redemption pressure, spread, underlying depth	spread, ADV, days-to-liquidate, stress liquidation
Concentration	issuer, sector, theme, country	top weights, HHI, effective positions, risk contribution
Counterparty	derivatives/synthetic replication	counterparty limits, collateral, legal terms
Operational/Data	NAV error, stale price, corporate action	reconciliation, valuation controls, incidents
Governance/Style	style drift, key person, methodology change	mandate review, factor drift, turnover, process
Path Dependence	leveraged/inverse ETF, daily reset	scenario paths, realized leverage, rebalance drag
Cost/Tax	fee, turnover, impact, investor tax	net return, TD, implementation shortfall

13.18 Fund Dashboard และ Investment Labs

Fund Dashboard

Dashboard ขั้นต่ำควรแสดง

Net Return / Volatility / MDD
Alpha / Beta / TD / TE / IR
Active Share / Concentration / Factor Exposure
Fee / Turnover / Spread / AUM / Liquidity
Rolling Stability / Style Drift

ตัวเลขทุกชุดควรระบุช่วงเวลา ความถี่ข้อมูล benchmark, currency และ return convention โดย alpha/beta ต้องระบุ asset-pricing model ส่วน TD/TE ต้องระบุ benchmark methodology และการ annualize ให้ชัดเจน

13.18.1 Investment Lab 1: NAV และ Total Return

สร้างตารางสินทรัพย์ หนี้สิน จำนวนหน่วย เงินปันผล และกระแสเงินสด แล้วคำนวณ NAV ต่อหน่วยและ total return พร้อมตรวจ reconciliation

13.18.2 Investment Lab 2: Index Replication

เลือก benchmark หนึ่งชุด สร้าง full replication และ sampling portfolio แล้วเปรียบเทียบ TD, TE, turnover และ transaction cost

13.18.3 Investment Lab 3: ETF Premium/Discount

ใช้ข้อมูลราคา ETF และ NAV/iNAV หรือมูลค่าตะกร้าที่มี timestamp สอดคล้องกัน คำนวณ premium/discount และตรวจความสัมพันธ์กับ spread, volatility, FX และสถานะเปิด/ปิดของ underlying market

13.18.4 Investment Lab 4: Fund Similarity

สร้าง holdings matrix ของหลายกองทุน คำนวณ cosine similarity และ weighted Jaccard แล้วทำ clustering เพื่อค้นหากลุ่มกองทุนที่ซ้ำซ้อนกัน

13.18.5 Investment Lab 5: DCA vs Lump Sum

จำลองหลาย price paths เปรียบเทียบ terminal wealth ของ DCA และ Lump Sum โดยแยกกรณี “มีเงินทั้งหมดตั้งแต่ต้น” ออกจาก “เงินเกิดขึ้นตามรายได้แต่ละเดือน”

13.19 ข้อจำกัดและหลักการตีความ

ประเด็นที่ต้องระวัง

1. ผลตอบแทนย้อนหลังไม่ใช่การรับประกันผลตอบแทนในอนาคต
2. กองทุนที่มี Sharpe หรือ alpha สูงในช่วงสั้นอาจเกิดจาก sampling variation
3. Benchmark ที่ไม่เหมาะสม ทำให้ alpha และ Information Ratio ไม่มีความหมายเชิงเศรษฐศาสตร์
4. ค่าใช้จ่ายที่ต่ำไม่ทำให้ผลิตภัณฑ์เหมาะสมโดยอัตโนมัติ หาก exposure ไม่ตรงเป้าหมาย
5. ETF ที่ซื้อขายง่ายไม่ได้ทำให้ underlying risk หายไป
6. การถือหลายกองทุนไม่เท่ากับ diversification หาก holdings และ factor exposures ซ้ำกัน
7. Smart Beta เป็น rules-based active exposure ต่อ factor ไม่ใช่ผลตอบแทนส่วนเกินที่รับ

ประกัน

8. DCA เป็นกฎจัดสรรกระแสเงิน ไม่ใช่ทฤษฎีที่รับประกันว่าชนะ Lump Sum
9. ETF เป็น trading wrapper ไม่ใช่คำพ้องของ Index Fund และ ETF แบบ active ต้องประเมินตาม mandate ของตนเอง
10. การประเมินต้นทุนต้องระวัง double counting ระหว่างค่าใช้จ่ายที่สะท้อนอยู่ใน NAV แล้วกับต้นทุนที่ผู้ลงทุนจ่ายเพิ่มเติม

13.20 บทสรุปท้ายบท

บทนี้พัฒนากรอบการวิเคราะห์กองทุนจาก “ชื่อผลิตภัณฑ์” ไปสู่ “โครงสร้างทางเศรษฐศาสตร์” โดยเริ่มจากสินทรัพย์และหนี้สินภายในกองทุน เชื่อมไปยัง NAV และหน่วยลงทุน ก่อนพิจารณากลไกซื้อขาย ต้นทุน benchmark และความเสี่ยง

Index Fund ทำให้ benchmark ถูกนำมาใช้เป็นกฎพอร์ตที่ลงทุนได้จริง ส่วน ETF เป็นโครงสร้างหน่วยที่ซื้อขายในตลาดรองซึ่งอาจเป็นทั้ง passive และ active สำหรับกองทุนที่ติดตามดัชนี คุณภาพการทำซ้ำต้องประเมินด้วย Tracking Difference, Tracking Error, cost และ implementation constraints ไม่ใช่ดูเพียงชื่อดัชนี Passive investing ลดการพึ่งพา discretionary security selection แต่ยังมี index construction, concentration, reconstitution, liquidity และ tracking risk

Active management ต้องสร้างผลตอบแทนส่วนเกินหลังต้นทุนและควรถูกประเมินหลายช่วงตลาด Smart Beta อยู่ระหว่าง market-cap indexing กับ active discretion โดยใช้กฎเพื่อรับ factor exposure จึงยังมี factor cycle, model risk, crowding และ turnover

การถือหลายกองทุนจะกระจายความเสี่ยงได้จริงต่อเมื่อ holdings และ factor exposures ไม่ซ้ำกันมาก Active Share, cosine similarity, weighted Jaccard และ factor decomposition จึงช่วยให้การวิเคราะห์ look-through มีความหมายมากขึ้น

สุดท้าย DCA, Share Cost Averaging และ Market Timing เป็นกฎที่ควบคุมตัวแปรต่างกัน DCA ที่ลงทุนเงินเท่ากันทำให้ต้นทุนเฉลี่ยเป็น harmonic mean ของราคา แต่ไม่ได้รับประกัน terminal wealth ที่สูงกว่า Lump Sum การเลือกวิธีลงทุนต้องเชื่อมกับกระแสเงินสด ความเสี่ยง เป้าหมาย และวินัยของผู้ลงทุน

คำศัพท์สำคัญ

NAV มูลค่าทรัพย์สินสุทธิหลังหักหนี้สิน

NAV per Unit NAV หารด้วยจำนวนหน่วยลงทุน

Index Fund กองทุนที่มุ่งสร้างผลตอบแทนใกล้ benchmark ตามกฎที่กำหนด

ETF กองทุนที่หน่วยซื้อขายในตลาดรองและมีกระบวนการ creation/redemption ในตลาดแรกตามโครงสร้างผลิตภัณฑ์

Authorized Participant / Participating Dealer ผู้เข้าร่วมที่ทำ creation/redemption กับ ETF ตามเงื่อนไขของผลิตภัณฑ์

Market Maker ผู้เสนอราคารับซื้อและเสนอขายในตลาดรองเพื่อสนับสนุนสภาพคล่อง

Tracking Difference ผลต่างเฉลี่ยระหว่างผลตอบแทนกองทุนกับ benchmark

Tracking Error ความผันผวนของ active return

Active Share ระดับความแตกต่างของ holdings ระหว่างพอร์ตกับ benchmark

Smart Beta การให้น้ำหนักเชิงระบบเพื่อรับ factor exposure หรือปรับโครงสร้างความเสี่ยง

Premium/Discount ส่วนต่างระหว่างราคาตลาดของหน่วยกับ NAV ต่อหน่วย

Capacity ขนาดสินทรัพย์ที่กลยุทธ์ยังดำเนินการได้โดยผลตอบแทนสุทธิไม่ถูกต้นทุนและ market impact ทำลาย

DCA การลงทุนด้วยจำนวนเงินคงที่เป็นระยะ

Holdings Similarity การวัดระดับความซ้ำซ้อนของสินทรัพย์ที่กองทุนถือ

13.21 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กองทุนมีสินทรัพย์ 820 ล้านบาท หนี้สิน 25 ล้านบาท และหน่วยลงทุน 50 ล้านหน่วย จงหา NAV และ NAV ต่อหน่วย
2. NAV ต่อหน่วยต้นปีเท่ากับ 12.40 บาท ปลายปี 13.10 บาท และจ่ายเงิน 0.25 บาทต่อหน่วย จงหาผลตอบแทนรวม
3. ETF มี NAV ต่อหน่วย 8.75 บาท และราคาตลาด 8.92 บาท จงคำนวณ premium/discount
4. อธิบายว่าทำไมราคาตลาดของกองทุนปิดจึงสามารถต่างจาก NAV ได้
5. เปรียบเทียบแหล่งสภาพคล่องของกองทุนเปิดกับ ETF และอธิบายความแตกต่างระหว่างบทบาทของ Market Maker กับ AP หรือ Participating Dealer

6. หุ้นสี่ตัวมีน้ำหนักตามมูลค่าตลาดและผลตอบแทนตามลำดับ

$$\mathsf{w} = (0.40, 0.30, 0.20, 0.10)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathsf{R} = (5\%, -1\%, 4\%, 8\%)^{\mathsf{T}}$$

จงหาผลตอบแทนดัชนี

7. ใช้ข้อมูลข้อ 6 คำนวณผลตอบแทน equal-weight index และอธิบายสาเหตุของความแตกต่าง
8. พิสูจน์ว่า tracking variance เท่ากับ $(\mathsf{w} - \mathsf{w}_B)^{\mathsf{T}} \Sigma (\mathsf{w} - \mathsf{w}_B)$
9. ออกแบบข้อจำกัด optimization สำหรับ index fund ที่ห้ามถือหุ้นเกิน 8% ต่อบริษัท
10. อธิบาย trade-off ระหว่าง Full Replication กับ Sampling
11. กองทุนมี active returns รายเดือน $(-0.2, 0.1, 0.3, -0.1, 0.4)\%$ จงหา TD และ TE
12. จากข้อ 11 จงคำนวณ Information Ratio โดยใช้หน่วยเวลาเดียวกัน
13. อธิบายความแตกต่างระหว่าง Tracking Difference และ Tracking Error พร้อมยกตัวอย่างที่ TD ต่ำแต่ TE สูง
14. ให้ premium/discount ของ ETF เท่ากับ 0.45% และต้นทุน arbitrage รวมประมาณ 0.30% จงวิเคราะห์ว่ามีแรงจูงใจเชิงเศรษฐศาสตร์ให้ทำ arbitrage หรือไม่ และระบุความเสี่ยงที่ยังทำให้ธุรกรรมไม่แน่นอน
15. แสดงด้วยตัวอย่างตัวเลขว่า leveraged ETF แบบ daily reset ไม่เท่ากับ leverage ของผลตอบแทนสะสม
16. กองทุน A มี gross alpha 2.2% ต่อปี และต้นทุนส่วนเพิ่ม 1.4% จงประมาณ net alpha
17. เปรียบเทียบความมั่งคั่ง 25 ปีของกองทุนสองกองที่ gross return เท่ากันแต่ expense ratio ต่างกัน 0.75% ต่อปี และอธิบายว่าทำไมไม่ควรหัก expense ratio ซ้ำหากใช้ NAV return ที่เป็น net-of-fund-expense อยู่แล้ว
18. พิสูจน์ว่า $0 \le AS \le 1$ สำหรับ long-only portfolio และ benchmark ที่น้ำหนักรวมเป็นหนึ่ง
19. พอร์ตมีน้ำหนัก $(0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$ และ benchmark $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ จงหา Active Share
20. อธิบายว่าทำไม Active Share สูงไม่รับประกัน alpha สูง
21. กองทุนสองกองมี holdings vectors $(0.5, 0.3, 0.2)$ และ $(0.4, 0.1, 0.5)$ จงหา cosine similarity
22. ใช้ข้อมูลข้อ 21 คำนวณ weighted Jaccard similarity
23. อธิบายกรณีที่ holdings similarity ต่ำแต่ factor exposure similarity สูง
24. ผู้ลงทุนแบ่งเงินในกองทุนสี่กองด้วยน้ำหนัก $(0.50, 0.20, 0.20, 0.10)$ จงหา effective number of funds
25. อธิบายว่าทำไม effective number of funds ไม่เพียงพอสำหรับวัด diversification
26. ลงทุนเดือนละ 10,000 บาท ที่ราคา $(10, 8, 12, 9)$ บาทต่อหน่วย จงหาจำนวนหน่วยรวมและต้นทุน

เฉลี่ยต่อหน่วย

27. พิสูจน์ว่าต้นทุนเฉลี่ยของ DCA เมื่อใช้เงินเท่ากันทุกงวดเป็น harmonic mean ของราคา
28. เปรียบเทียบ DCA กับ Share Cost Averaging ในด้านตัวแปรที่ถูกควบคุม และอธิบายว่าทำไมข้อเท็จจริง harmonic-mean cost ของ DCA ไม่ได้พิสูจน์ว่า DCA ชนะ Lump Sum
29. ออกแบบ Fund Due-Diligence Scorecard ที่มีอย่างน้อย 8 มิติ และอธิบายเหตุผลของน้ำหนักแต่ละมิติ
30. เลือกกองทุนหรือ ETF สมมติหนึ่งผลิตภัณฑ์ แล้วเขียนรายงานหนึ่งหน้าว่าควรตรวจข้อมูลใดบ้างก่อนตัดสินใจลงทุน โดยแยก Structure, Return, Risk, Cost, Liquidity และ Governance

คำถามชวนคิด

1. ถ้ากองทุน passive มี Tracking Error เป็นศูนย์แต่มี Tracking Difference ติดลบมาก กองทุนนั้นถือว่าทำหน้าที่ได้ดีหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ETF ที่มี volume ซื้อขายต่ำจำเป็นต้องมีสภาพคล่องต่ำเสมอหรือไม่ ควรตรวจ underlying liquidity, AP/MM capacity และสถานะเปิด/ปิดของตลาดอ้างอิงอย่างไร
3. ถ้า Smart Beta ใช้กฎตายตัว เหตุใดจึงยังถือว่ามี model risk
4. การเลือกกองทุนจากอันดับผลตอบแทนย้อนหลังอาจสร้าง selection bias อย่างไร
5. ในกรณีที่ผู้ลงทุนมีเงินก้อนพร้อมตั้งแต่วันนี้ DCA และ Lump Sum มี opportunity set ต่างกันอย่างไร
6. หากกองทุนหลายกองถือหุ้นคนละตัวแต่มี factor exposures ใกล้เคียงกัน ผู้ลงทุนควรนิยามคำว่า “กระจายความเสี่ยง” อย่างไร

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 13

[16] K. J. Martijn Cremers and Antti Petajisto. “How Active Is Your Fund Manager? A New Measure That Predicts Performance”. In: *The Review of Financial Studies* 22.9 (2009), pp. 3329–3365.

[27] Michael C. Jensen. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964”. In: *The Journal of Finance* 23.2 (1968), pp. 389–416.

[44] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Exchange Traded Fund: Establishment and Management Framework*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[45] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Mutual Fund Management Framework*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[46] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Net Asset Value and Unit Value Requirements for Mutual Funds*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[49] William F. Sharpe. “Mutual Fund Performance”. In: *The Journal of Business* 39.1 (1966), pp. 119–138.

[51] William F. Sharpe. “The Arithmetic of Active Management”. In: *Financial Analysts Journal* 47.1 (1991), pp. 7–9.

[55] The Stock Exchange of Thailand. *ETF Overview*. Official SET information source used in Chapter 13. 2026.

[61] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การลงทุนในตลาดการเงิน: เอกสารประกอบการเรียนรายวิชา ส.247 ตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์*. ปทุมธานี, 2021.

บทที่ 14 การลงทุนเชิงปริมาณและการบริหารพอร์ตสมัยใหม่

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว ผู้อ่านควรสามารถ

1. อธิบายระบบลงทุนเชิงปริมาณตั้งแต่ข้อมูล สัญญาณ พอร์ต การส่งคำสั่ง การประเมินผล และการกำกับแบบจำลอง
2. สร้าง factor/alpha score ด้วย winsorization, z-score, ranking, neutralization, volatility scaling และ liquidity gating
3. เชื่อม Value, Momentum, Size, Quality และ Low-Volatility กับ factor models และ Smart Beta โดยแยกให้ชัดระหว่างปัจจัยที่ใช้เพื่ออธิบายผลตอบแทนกับสัญญาณที่ใช้สร้างพอร์ต
4. ประเมิน predictive content ด้วย IC/Rank IC และแปลง signal เป็นน้ำหนักภายใต้ risk, turnover, liquidity และ cost constraints
5. ออกแบบ backtest ที่ควบคุม look-ahead, survivorship, leakage, execution bias, data snooping และ multiple testing
6. ใช้ walk-forward, purged validation, bootstrap, sensitivity และ regime analysis เพื่อตรวจ robustness
7. รวม alpha หลายตัวเป็น portfolio of alphas โดยพิจารณาผลตอบแทน ความเสี่ยง correlation turnover และ capacity พร้อมกัน
8. อธิบาย prediction-to-portfolio gap ของ Machine Learning และข้อจำกัดของ Deep Learning, NLP/LLM, alternative data และ reinforcement learning
9. สร้างระบบวิจัยที่ทำซ้ำได้ด้วย experiment registry, model card, audit trail, drift monitoring และ human oversight
10. สังเคราะห์บทที่ 1–13 เป็นวงจรการลงทุนเชิงปริมาณที่ตรวจสอบได้

ข้อสังเกต

แกนของบท

$$\text{Data} \longrightarrow \text{Signal} \longrightarrow \text{Portfolio} \longrightarrow \text{Execution} \longrightarrow \text{Validation} \longrightarrow \text{Governance} \longrightarrow \text{Learning}$$

Backtest เป็นเพียงส่วนหนึ่งของระบบ คุณภาพของกลยุทธ์ขึ้นกับความถูกต้องของทุกลูกศรในวงจร

14.1 จากการเลือกหลักทรัพย์สู่การออกแบบระบบตัดสินใจ

การลงทุนเชิงปริมาณควรถูกมองเป็น **ระบบตัดสินใจภายใต้ข้อจำกัด** มากกว่าการค้นหาสูตรพยากรณ์เพียงตัวเดียว เพราะผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงขึ้นกับทั้งข้อมูลที่มีอยู่ ณ เวลาตัดสินใจ วิธีแปลงข้อมูลเป็นสัญญาณ การกำหนดน้ำหนัก ความเสี่ยง ต้นทุน และราคาที่ซื้อขายได้จริง

ให้ $\mathcal{I}_t$ เป็น information set ที่เข้าถึงได้จริง ณ เวลา t และ $X_t \subseteq \mathcal{I}_t$ เป็นข้อมูลที่ระบบอนุญาตให้ใช้กำหนด

$$s_t = f(X_t; \theta_t) \tag{14.1}$$

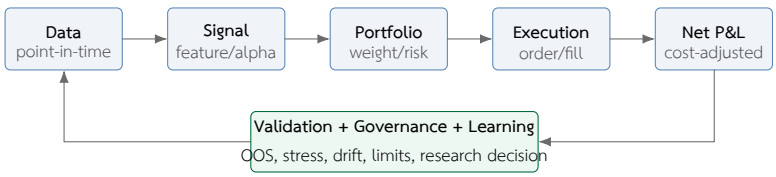
$$w_t^{\text{tar}} = g(s_t, \widehat{\Sigma}_t, \hat{c}_t; \lambda_t) \tag{14.2}$$

เมื่อ s_t คือ signal vector, w_t^{tar} คือน้ำหนักเป้าหมาย, $\widehat{\Sigma}_t$ คือ risk estimate และ $\hat{c}_t$ คือข้อมูลต้นทุนกับสภาพคล่องที่คาดไว้ ณ เวลาเดียวกัน การแยก w_t^{tar} ออกจากน้ำหนักที่ถือจริงมีความสำคัญ เพราะข้อจำกัด lot size, partial fill, market impact และราคาเคลื่อนไหวระหว่างส่งคำสั่งอาจทำให้พอร์ตหลังซื้อขายต่างจากเป้าหมาย

ระบบสมบูรณ์จึงเป็น

$$\mathcal{I}_t \to X_t \to s_t \to w_t^{\text{tar}} \to q_t \to w_t^{\text{real}} \to R_{t+1}^{\text{net}} \to \text{Validation} \to \text{Governance}$$

โดย q_t คือ trade vector และ w_t^{real} คือน้ำหนักที่เกิดขึ้นหลัง execution ดังนั้นความผิดพลาดระหว่าง target กับ realized holdings เป็นส่วนหนึ่งของ implementation risk ไม่ใช่ noise ที่ควรถูกละเลย



รูปที่ 14.1: ระบบลงทุนเชิงปริมาณเชื่อมข้อมูล point-in-time ไปสู่ผลตอบแทนสุทธิและส่งผลการตรวจสอบกลับเข้าสู่วงจรวิจัย

ข้อสังเกต

คำว่า *alpha signal* ในงานเชิงปริมาณหมายถึงตัวแปรก่อนลงทุนที่คาดว่าจะมี predictive content ส่วน Jensen's alpha เป็น abnormal performance ที่วัดภายหลังภายใต้แบบจำลองอ้างอิง การมี alpha signal จึงไม่รับประกัน ex-post alpha และ signal ที่พยากรณ์ได้ดีอาจยังสร้างพอร์ตที่ไม่ดีเมื่อรวมความเสี่ยงและต้นทุน

14.2 Point-in-Time Data และ Decision Clock

ข้อมูลใน backtest ต้องเป็นข้อมูลที่ผู้ลงทุนสามารถเห็นได้จริง ณ เวลาตัดสินใจ ไม่ใช่ข้อมูลที่แก้ไขย้อนหลังแล้ว

$$\tau^{\text{avail}} \leq \tau^{\text{signal}} \leq \tau^{\text{order}} \leq \tau^{\text{fill}} < \tau^{\text{return}}$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

หากใช้ราคาปิดวัน t สร้าง signal แล้วสมมติซื้อได้ที่ราคาปิดเดียวกันโดยไม่มี execution mechanism รองรับ จะเกิด look-ahead หรือ execution bias แม้สูตร signal จะไม่ใช้ข้อมูลอนาคต

ข้อมูลพื้นฐานควรเก็บอย่างน้อย period end, announcement date, effective date และ revision vintage เพราะค่าของตัวแปรเดียวกันอาจถูกแก้ย้อนหลัง การใช้ค่าฉบับล่าสุดกับอดีตทำให้โมเดลเห็นข้อมูลที่นักลงทุนในอดีตยังไม่ทราบ ส่วน universe ต้องใช้ historical constituents รวมหลักทรัพย์ที่ delist หรือออกจากดัชนีตามเวลาจริงเพื่อหลีกเลี่ยง survivorship bias

ในเชิงข้อมูล เงื่อนไข $\tau^{\text{avail}} \leq \tau^{\text{signal}}$ ต้องตรวจที่ระดับ observation ไม่ใช่ตรวจเพียงชื่อคอลัมน์ ตัวอย่างเช่น งบสิ้นไตรมาสไม่ได้แปลว่าตลาดรู้ข้อมูล ณ วันสิ้นไตรมาส แต่ต้องรอวันประกาศจริงและเผื่อ processing lag ตามกฎที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

Point-in-Time Data Governance

ทุก feature ควรมี data lineage ระบุ source, frequency, timezone, publication lag, adjustment, missing-value rule, corporate-action rule, universe rule, transform version และ snapshot date

14.3 Signal Engineering

14.3.1 Winsorization และ Standardization

สำหรับ cross-sectional feature $x_{i,t}$ อาจลดอิทธิพลของ outlier ด้วย winsorization ที่ quantiles $q_{\ell,t}$ และ $q_{u,t}$

$$x_{i,t}^{W} = \min\{q_{u,t}, \max(q_{\ell,t}, x_{i,t})\}$$

จากนั้นจึง standardize ภายใน cross-section เดียวกัน

$$z_{i,t} = \frac{x_{i,t}^{W} - \bar{x}_{t}^{W}}{s_{x^{W},t}}, \qquad s_{x^{W},t} > 0$$

หาก cross-section กระจายผิดปกติอย่างรุนแรง อาจใช้ median และ MAD แทน mean และ standard deviation แต่ต้องกำหนด convention ให้คงที่ตลอดการทดลอง

rank score ที่ map ลงช่วง $[-1, 1]$ คือ

$$r_{i,t} = 2\frac{\text{rank}(x_{i,t}) - 1}{N_t - 1} - 1, \qquad N_t > 1$$

Rank ลดอิทธิพลของ outlier และไม่สนใจระยะห่างระหว่างค่ามากนัก ขณะที่ z-score รักษาข้อมูลเชิงสเกลมากกว่า การเลือกวิธีจึงต้องสอดคล้องกับความหมายทางเศรษฐศาสตร์ของ feature และควร fit กฎ winsorization/normalization ภายใน training information เท่านั้นเมื่อตัวแปรมีพารามิเตอร์ที่เรียนรู้จากเวลา

14.3.2 Composite Signal

เมื่อมี normalized features $z_{ik,t}$ จำนวน K ตัว

$$s_{i,t} = \sum_{k=1}^{K} a_k z_{ik,t}, \qquad \sum_{k=1}^{K} |a_k| = 1$$

น้ำหนัก a_k อาจมาจาก economic prior, equal weighting หรือแบบจำลองเชิงสถิติ แต่ต้องประมาณจาก training information เท่านั้น เงื่อนไข $\sum_k |a_k| = 1$ เป็นเพียง normalization เพื่อให้สเกลตีความง่าย ไม่ใช่ข้อกำหนดทางทฤษฎี

หาก features หลายตัวสะท้อนแนวคิดเศรษฐศาสตร์เดียวกันและมีสหสัมพันธ์สูง การให้น้ำหนักเท่ากันอาจนับข้อมูลซ้ำ การสร้าง composite signal จึงควรตรวจ feature correlation, incremental IC และ ablation test

เพื่อดูว่าการเพิ่ม feature ใหม่ให้ข้อมูลส่วนเพิ่มจริงหรือเพียงเพิ่มความซับซ้อน

14.3.3 Neutralization เป็น Orthogonal Projection

ให้ $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$ เป็น exposures ที่ต้องการกำจัดออกจาก signal s เช่น sector dummies, beta หรือ size และเขียน

$$s = X\beta + u$$

ถ้า X มี full column rank เมทริกซ์ residual maker คือ

$$M = I - X(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}, \qquad s_{\perp} = Ms$$

ส่วนกรณีทั่วไปสามารถเขียนอย่างปลอดภัยด้วย Moore–Penrose pseudoinverse เป็น

$$s_{\perp} = (I - XX^{+})s$$

Orthogonality of Neutralized Signal. ในกรณี full column rank

$$X^{\mathsf{T}}s_{\perp} = X^{\mathsf{T}}\left[I - X(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}\right]s = 0$$

ดังนั้น residualized signal ตั้งฉากกับ column space ของ X ในเชิงตัวอย่าง □

หากต้องการให้หุ้นที่มีสภาพคล่องหรือมูลค่าตลาดต่างกันมีน้ำหนักในการ fit ไม่เท่ากัน สามารถใช้ weighted least squares ซึ่งให้เงื่อนไข $X^{\mathsf{T}}Wu = 0$ แทน $X^{\mathsf{T}}u = 0$ ในงานคำนวณควรใช้ least squares, QR หรือ SVD แทนการสร้าง inverse โดยตรง โดยเฉพาะเมื่อ exposure matrix ใกล้ singular

ประเด็นที่ต้องระวัง

Neutralization กำจัด exposure ที่กำหนดไว้ ไม่ได้กำจัด “ความเสี่ยงทั้งหมด” และอาจลด predictive content หาก exposure ที่กำจัดเป็นส่วนหนึ่งของแหล่งผลตอบแทนที่ตั้งใจถือ จึงต้องแยกระหว่าง unwanted exposure กับ intended factor bet ให้ชัด

14.3.4 Volatility Scaling และ Liquidity Gating

เพื่อไม่ให้สินทรัพย์ที่มี volatility estimate ใกล้ศูนย์ได้สเกลสูงผิดปกติ ควรใช้ volatility floor

$$\tilde{s}_{i,t} = \frac{s_{i,t}}{\max(\hat{\sigma}_{i,t}, \sigma_{\min})}, \qquad \sigma_{\min} > 0$$

จากนั้นจึงใช้ liquidity gate

$$s_{i,t}^{*} = g_{i,t}\tilde{s}_{i,t}, \qquad 0 \le g_{i,t} \le 1$$

โดย $g_{i,t}$ อาจขึ้นกับ ADV, bid–ask spread, volume, days-to-liquidate หรือ liquidity regime และอาจเป็น hard gate $(0/1)$ หรือ soft gate ในช่วง $[0,1]$

Volatility scaling เป็นการปรับสเกลของ signal ไม่ใช่การพิสูจน์ว่าพอร์ตมีความเสี่ยงเหมาะสมแล้ว เพราะ covariance ระหว่างสินทรัพย์ concentration และ factor exposure ยังต้องถูกควบคุมในชั้น portfolio construction

14.4 Factor Signals

Factor signal ควรเริ่มจากนิยามตัวแปรที่มีความหมายทางเศรษฐศาสตร์และสามารถสร้างแบบ point-in-time ได้ ตัวอย่าง Value ที่ใช้ได้โดยตรงคือ earnings yield

$$VAL_{i,t} = \frac{E_{i,t}^{\text{TTM}}}{P_{i,t}}$$

หรือ book-to-market ทั้งนี้ P/E ไม่เหมาะเป็นตัวอย่างที่นำไป log โดยไม่ตรวจ เพราะเมื่อกำไรเป็นศูนย์หรือติดลบ P/E อาจไม่กำหนดหรือมีพฤติกรรมไม่ต่อเนื่อง การใช้ earnings yield ช่วยให้ negative earnings ยังมีความหมายเชิงอันดับได้ แต่ควร winsorize และแยก sector ตามสมควร

Momentum แบบมีช่วงเว้นล่าสุด $K-1$ งวดเขียนได้เป็น

$$MOM_{i,t}^{(J,K)} = \prod_{j=K}^{J}(1+R_{i,t-j}) - 1, \qquad J \ge K \ge 1$$

สูตรนี้ครอบคลุมทั้ง momentum ที่รวมงวดล่าสุดและรูปแบบที่เว้นช่วงสั้นเพื่อลด microstructure/reversal effect โดยผลตอบแทนที่ใช้ต้องเป็น total return ที่ปรับ corporate actions อย่างสอดคล้อง

Size score อาจกำหนดเป็น

$$SIZE_{i,t} = -\log(ME_{i,t}), \qquad ME_{i,t} > 0$$

และ Low-volatility score เป็น

$$LOWVOL_{i,t} = -\hat{\sigma}_{i,t}$$

Quality อาจใช้ profitability, ROE, margin, accrual quality หรือ balance-sheet strength หลังควบคุม

publication lag, accounting comparability, leverage และ sector effects แนวคิดเหล่านี้มีรากฐานในวรรณกรรม factor investing แต่การมีผลตอบแทนส่วนเกินในอดีตไม่ใช่หลักประกันว่า premium จะคงอยู่ในอนาคต [20, 26, 37, 2]

ตารางที่ 14.1: ตัวอย่าง factor signals และจุดที่ต้องตรวจสอบก่อนนำไปสร้างพอร์ต

Signal	Proxy ตัวอย่าง	ประเด็นที่ต้องควบคุม
Value	E/P, book-to-market	negative earnings, sector mix, stale fundamentals
Momentum	cumulative total return	corporate actions, skip period, turnover, crash risk
Size	$-\log(ME)$	liquidity, investability, micro-cap effect
Quality	profitability/ROE/accrual	leverage, accounting definition, publication lag
Low Volatility	$-\hat{\sigma}$	beta/sector exposure, volatility regime, crowding

ข้อสังเกต

Factor Model กับ Factor Strategy

Factor model ใช้อธิบายหรือกำหนดราคาผลตอบแทน ส่วน factor strategy ใช้ characteristics หรือ estimated exposures เพื่อสร้างกฎการลงทุน ทั้งสองเกี่ยวข้องกันแต่ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน และ factor strategy อาจมี exposure ต่อหลายปัจจัยโดยไม่ได้ตั้งใจหากไม่มี neutralization หรือ risk control

14.5 Technical Signals ในฐานะ Filter Design

Technical indicator สามารถมองเป็นตัวกรองเชิงเวลาที่แปลงลำดับราคาให้เป็น state หรือ signal แต่ตัว indicator เองยังไม่ใช่กลยุทธ์ จนกว่าจะกำหนด entry, exit, sizing, execution และต้นทุนอย่างครบถ้วน

SMA ระยะ n

$$SMA_t(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P_{t-j}$$

ส่วน EMA กำหนดแบบ recursive

$$EMA_t(n) = \alpha_n P_t + (1-\alpha_n) EMA_{t-1}(n), \qquad \alpha_n = \frac{2}{n+1}$$

โดยต้องกำหนด initialization rule เพราะค่าเริ่มต้นมีผลในช่วง warm-up

เพื่อหลีกเลี่ยงความกำกวมของสัญกรณ์ ให้ $\mathcal{E}_n[x]_t$ หมายถึง EMA ระยะ n ของอนุกรม x แล้ว

$$DEMA_t(n) = 2\mathcal{E}_n[P]_t - \mathcal{E}_n[\mathcal{E}_n[P]]_t \tag{14.3}$$

$$TEMA_t(n) = 3\mathcal{E}_n[P]_t - 3\mathcal{E}_n[\mathcal{E}_n[P]]_t + \mathcal{E}_n[\mathcal{E}_n[\mathcal{E}_n[P]]]_t \tag{14.4}$$

Bollinger Bands ใช้เส้นกึ่งกลาง M_t และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานย้อนหลัง $s_t^{(n)}$

$$U_t = M_t + k s_t^{(n)}, \qquad L_t = M_t - k s_t^{(n)}$$

จึงเป็น volatility-normalized envelope รอบเส้นกึ่งกลางภายใต้ convention ที่กำหนด อย่างไรก็ดีการแตะ band ไม่ได้มีความหมายเชิงซื้อหรือขายโดยอัตโนมัติ เพราะ breakout กับ mean-reversion ใช้ band เดียวกัน แต่ตีความตรงกันข้ามได้

MACD ใช้ความต่างของ EMA สองช่วง

$$MACD_t = EMA_t(n_s) - EMA_t(n_\ell), \qquad n_s < n_\ell$$

และอาจกำหนด signal line เป็น EMA ของ $MACD_t$ อีกชั้นหนึ่ง การเปรียบเทียบ technical signals ต้องใช้ warm-up period, corporate-action adjustment, decision clock และ execution convention เดียวกัน

จากงานวิจัยสู่การประยุกต์: กรณีศึกษา Robust Backtesting

กรณีศึกษาจากงานวิจัย SET50 ใช้ข้อมูลรายวันช่วงมกราคม 2018–ธันวาคม 2022 แบ่ง 2018–2021 เป็นช่วงพัฒนาและปี 2022 เป็น out-of-sample เปรียบเทียบ SMA, EMA, DEMA, TEMA และ WMA ใช้ next-day-open execution และรวม commission 0.15% กับ slippage 0.05% ตามการออกแบบของงานต้นทาง พร้อม bootstrap, FDR, parameter sensitivity, cost sensitivity และ rolling stability [69]

สาระที่นำมาใช้ในตำราคือ **กระบวนการ robust backtesting** ไม่ใช่การนำผู้ชนะในข้อมูลประวัติศาสตร์มาเป็นคำแนะนำลงทุนปัจจุบัน

14.6 Predictive Content: IC และ Rank IC

ให้ $s_{i,t}$ เป็น score ที่ทราบ ณ เวลา t และ $R_{i,t\to t+h}$ เป็น forward return ใน horizon h ที่เริ่มหลังเวลาที่สามารถซื้อขายได้ กำหนด cross-sectional Information Coefficient

$$IC_t = \mathrm{Corr}_i\left(s_{i,t}, R_{i,t\to t+h}\right)$$

Rank IC ใช้ Spearman correlation ระหว่าง rank ของ signal กับ rank ของ forward return จึงทนต่อ outlier และ monotonic nonlinearity มากกว่า Pearson IC

เพื่อดูความเสถียรตามเวลา อาจรายงาน

$$\overline{IC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} IC_t, \qquad ICIR = \frac{\overline{IC}}{s(IC_t)}$$

แต่ $ICIR$ ไม่ควรถูก annualize แบบกลไกเมื่อ IC_t มี serial dependence หรือ forward-return windows ซ้อนทับกัน การประเมิน uncertainty ควรใช้ HAC หรือ block bootstrap ที่รักษาโครงสร้างเวลาตามสมควร

ประเด็นที่ต้องระวัง

IC เฉลี่ย เป็นบวก ไม่ได้ รับประกัน กำไร หลัง ต้นทุน เพราะ signal-to-weight mapping อาจ สร้าง concentration, factor exposure, turnover และ market impact นอกจากนี้ IC ที่เกิดจากไม่กี่วัน หรือไม่กี่กลุ่มอุตสาหกรรมอาจไม่เสถียรเมื่อ regime เปลี่ยน จึงควรดู breadth, dispersion, hit rate และ stability ร่วมกัน

14.7 จาก Signal สู่ Portfolio

ตัวอย่าง long–short score mapping แบบง่ายคือ

$$w_{i,t} = \frac{s^*_{i,t} - \bar{s}^*_t}{\sum_j |s^*_{j,t} - \bar{s}^*_t|}$$

เมื่อ denominator เป็นบวก สูตรนี้ให้ $\sum_i w_{i,t} = 0$ และ $\sum_i |w_{i,t}| = 1$ ภายใต้การหาค่าเฉลี่ยแบบเดียวกัน จึงเป็น dollar-neutral gross-normalized mapping แต่ไม่ใช่คำตอบที่เหมาะที่สุดเมื่อสินทรัพย์มี covariance, liquidity หรือข้อจำกัดแตกต่างกัน และถ้า scores ทุกตัวเท่ากันจะไม่สามารถใช้ normalization นี้ได้

ก่อน rebalance ให้น้ำหนักเดิม drift ตามผลตอบแทนจนเป็น w^+_{t-1} ตัวอย่างในกรณีไม่มี external cash

flow

$$w_{i,t-1}^{+} = \frac{w_{i,t-1}(1+R_{i,t})}{1+R_{p,t}}$$

จึงควรคำนวณ trade จาก $w_t - w_{t-1}^{+}$ ไม่ใช่จากน้ำหนักเดิมก่อนตลาดเคลื่อนไหว

การนำไปใช้จริงสามารถแก้ปัญหา

$$\boxed{\max_{w}\left\{\widehat{\mu}_t^{\mathsf{T}} w - \frac{\lambda}{2} w^{\mathsf{T}} \widehat{\Sigma}_t w - \eta \|w - w_{t-1}^{+}\|_1\right\}}$$

ภายใต้ leverage, position, factor, sector, liquidity, turnover และ concentration limits โดย η ต้องอยู่ในหน่วยที่สอดคล้องกับผลตอบแทนใน objective และหากมี nonlinear impact ควรใช้ cost function ที่สอดคล้องกับขนาดคำสั่งแทน L_1 penalty เพียงอย่างเดียว

สำหรับ fully-invested self-financing long-only portfolio นิยาม one-way turnover ที่ใช้บ่อยคือ

$$TO_t = \frac{1}{2}\sum_i |w_{i,t} - w_{i,t-1}^{+}|$$

แต่ใน long–short portfolio ที่ gross exposure เปลี่ยนได้ ควรรายงาน gross traded notional $\sum_i |\Delta w_i|$ เพิ่มเติม เพราะ factor $1/2$ ไม่ได้มีความหมายเป็น “ฝั่งซื้อหรือฝั่งขาย” โดยอัตโนมัติ

14.8 Portfolio of Alphas

สมมติ alpha strategies K ตัวมี expected return vector μ_α และ covariance matrix Ω ถ้าให้น้ำหนัก γ

$$IR(\gamma) = \frac{\gamma^{\mathsf{T}}\mu_\alpha}{\sqrt{\gamma^{\mathsf{T}}\Omega\gamma}}$$

Maximum Information-Ratio Direction. ให้

$$x = \Omega^{1/2}\gamma, \qquad y = \Omega^{-1/2}\mu_\alpha$$

จะได้

$$IR(\gamma) = \frac{x^{\mathsf{T}} y}{\|x\|} \le \|y\|$$

จาก Cauchy–Schwarz equality เกิดเมื่อ $x \propto y$ ดังนั้น

$$\boxed{\gamma^{*} \propto \Omega^{-1}\mu_\alpha}$$

เมื่อไม่มีข้อจำกัดเพิ่มเติมและ Ω เป็น positive definite □

ถ้า Ω ใกล้ singular หรือจำนวน alpha มากเมื่อเทียบกับประวัติข้อมูล ทิศทาง $\Omega^{-1}\mu_\alpha$ อาจไวต่อ estimation error มาก ควรใช้ covariance shrinkage, regularization หรือ pseudoinverse พร้อม weight/risk constraints มากกว่าสร้าง inverse โดยตรง นอกจากนี้ μ_α ต้องถูกประมาณแบบ out-of-sample-aware เช่นเดียวกับ expected return ของสินทรัพย์

ข้อสังเกต

Alpha Novelty

alpha ใหม่ควรเพิ่มข้อมูลที่ไม่ซ้ำกับ alpha เดิม ไม่ใช่เพียงมี Sharpe สูงเมื่อทดสอบเดี่ยว ควรตรวจ correlation matrix, residual alpha หลัง regress บน alpha library, turnover overlap, factor exposure และ performance ใน stress regimes อีกทั้งการรวม alpha ก่อนส่งคำสั่งอาจเกิด *trade netting* ทำให้ต้นทุนรวมต่ำกว่าการบวกต้นทุนของแต่ละ alpha แยกกัน ดังนั้น portfolio of alphas ควรถูกประเมินที่ระดับคำสั่งรวมด้วย

14.9 Transaction Costs, Market Impact และ Capacity

ต้องแยก **ต้นทุนเป็นจำนวนเงิน** ออกจาก **ต้นทุนในหน่วยผลตอบแทน** ให้ชัด ให้ $\mathcal{C}_t$ เป็นมูลค่าต้นทุนจากการ rebalance ณ เวลา t และ A_t เป็น AUM ก่อนซื้อขาย กำหนด cost rate

$$c_t = \frac{\mathcal{C}_t}{A_t}$$

หากต้นทุนถูกหักก่อนเริ่มช่วงถือครอง และ R_{t+1}^{gross} วัดบนเงินทุนหลังต้นทุน จะได้

$$W_{t+1} = (A_t - \mathcal{C}_t)(1 + R_{t+1}^{\text{gross}})$$

ดังนั้นผลตอบแทนสุทธิเมื่อวัดเทียบกับ AUM ก่อนซื้อขายคือ

$$R_{t+1}^{\text{net}} = R_{t+1}^{\text{gross}} - c_t(1 + R_{t+1}^{\text{gross}}) \approx R_{t+1}^{\text{gross}} - c_t$$

โดย approximation สุดท้ายเหมาะเมื่อ c_t มีขนาดเล็ก การหักต้นทุนจึงต้องสัมพันธ์กับเวลาที่ต้นทุนเกิดขึ้น ไม่ควรลบจำนวนเงินบาทออกจาก return โดยตรงโดยไม่ normalize ด้วยฐานเงินลงทุน

แบบจำลองต้นทุนในหน่วยผลตอบแทนอย่างง่ายอาจเขียน

$$c_t = c_1 TO_t + c_2 TO_t^2$$

ส่วนแบบจำลองระดับคำสั่ง ให้ $Q_{i,t}$ เป็นมูลค่าคำสั่งและ $ADV_{i,t}$ เป็น average daily traded value ในหน่วยเงินเดียวกัน

$$\mathcal{C}_{i,t} \approx a_i|Q_{i,t}| + b_i\sigma_{i,t}|Q_{i,t}|\sqrt{\frac{|Q_{i,t}|}{ADV_{i,t}}}$$

พจน์แรกแทน spread/fee เชิงเส้นโดยประมาณ ส่วนพจน์ที่สองเป็น square-root impact approximation ซึ่งเพิ่มเร็วกว่าสัดส่วนเมื่อ participation สูง แบบจำลองนี้เป็น approximation ไม่ใช่กฎสากล และพารามิเตอร์ควรถูก calibrate ตามตลาด ขนาดคำสั่ง และ execution horizon

$$\pi_{i,t} = \frac{|Q_{i,t}|}{ADV_{i,t}}$$

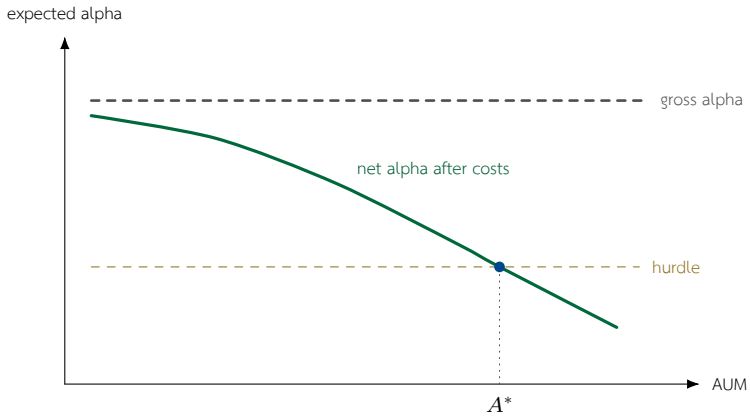
คือ participation rate ที่ช่วยเชื่อมขนาดพอร์ตกับ market impact

บทนิยาม 14.1

Capacity คือระดับ AUM ที่กลยุทธ์ยังสร้างผลตอบแทนสุทธิที่คุ้มกับความเสี่ยงและยังดำเนินการได้ภายใต้ liquidity, participation, borrow, leverage และ risk limits ไม่ใช่เพียงจำนวนเงินสูงสุดที่ระบบรับได้

ถ้า h เป็น required net-alpha hurdle อาจนิยามเชิงแนวคิด

$$A^* = \sup\{A : \alpha_{\text{net}}(A) \geq h \text{ และ constraints ยัง feasible}\}, \qquad \alpha_{\text{net}}(A) = \alpha_{\text{gross}}(A) - c(A)$$



รูปที่ 14.2: Capacity เป็นจุดที่ผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนและข้อจำกัดลดลงถึงระดับ hurdle ที่กำหนด ไม่ใช่ค่าคงที่ที่แยกจาก AUM

14.10 Robust Backtesting

14.10.1 Bias Checklist

Backtest ที่น่าเชื่อถือควรออกแบบ chronology ก่อนคำนวณ performance และบันทึกการทดลองทั้งหมด ไม่ใช่แก้เฉพาะ bias หลังเห็นผล [53, 60, 32]

ตารางที่ 14.2: ความลำเอียงสำคัญใน quantitative backtesting และวิธีควบคุม

Bias	กลไกที่ทำให้ผลดีเกินจริง	วิธีควบคุม
Look-ahead	ใช้ข้อมูลที่ยังไม่เปิดเผย	point-in-time timestamps และ publication lag
Survivorship	ใช้เฉพาะหลักทรัพย์ที่รอด	historical universe รวม delisting
Leakage	preprocessing/model selection เห็น validation/test	fit ภายใน train และ ใช้ nested selection เมื่อจำเป็น
Execution	สมมติ fill price ที่ไม่มีทางรู้หรือซื้อขายทัน	explicit decision clock, latency และ fill model
Data snooping	ทดลอง จำนวน มาก แล้ว เลือก รายงาน ผู้ชนะ	search log และ multiple-testing control
Selection	เลือกช่วง/benchmark หลังเห็นผล	pre-specified protocol และ holdout
Cost omission	ไม่รวม friction หรือ impact	spread, fee, slippage, borrow และ impact ที่สมจริง
Corporate action	ใช้ราคา/ผลตอบแทนที่ปรับไม่สอดคล้อง	point-in-time adjustment และ delisting return

14.10.2 Walk-Forward Validation

Expanding window

$$\{1, \dots, t\} \to \{t+1, \dots, t+h\}$$

Rolling window

$$\{t-L+1, \dots, t\} \to \{t+1, \dots, t+h\}$$

ถ้า labels ซ้อนทับกันหรือ features ใช้ข้อมูลช่วงยาว ควรใช้ purge/embargo เพื่อลด information overlap ระหว่าง train และ validation โดย purge ตัด observations ที่ label interval ทับกับ validation ส่วน embargo เว้นช่วงหลัง validation ตามความเสี่ยงของ leakage

ทุก fold ต้องสร้าง preprocessing, feature selection และ hyperparameter tuning จากข้อมูลที่ fold นั้นอนุญาตให้เห็นเท่านั้น หากเลือก hyperparameter จากผลของ test fold แล้วรายงาน fold เดิมเป็น OOS จะ

เกิด model-selection leakage แม้การแบ่งเวลาจะดูถูกต้อง

14.10.3 Multiple Testing

ถ้าทดสอบ M กลยุทธ์อิสระภายใต้ null และแต่ละกลยุทธ์มี false-positive probability α

$$P(\text{อย่างน้อยหนึ่ง false positive}) = 1 - (1 - \alpha)^M$$

เมื่อ M เพิ่มขึ้น ความน่าจะเป็นพบ “ผู้ชนะโดยบังเอิญ” เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว สูตรข้างต้นเป็นภาพประกอบภายใต้สมมติฐานอิสระเท่านั้น ในงานจริงกลยุทธ์มักมีสหสัมพันธ์กัน จึงควรใช้วิธีที่สอดคล้องกับ dependence เช่น resampling-based reality checks หรือควบคุม false discovery rate พร้อมบันทึก search history และจำนวนการทดลองที่แท้จริง

Robustness Stack

OOS + Walk-Forward + Bootstrap
+Parameter Sensitivity + Cost Sensitivity
+Regime Stability + Multiple-Testing Control

กลยุทธ์ที่ดีไม่จำเป็นต้องดีที่สุดในทุกมิติ แต่ไม่ควรพึ่งพาจุดพารามิเตอร์ ช่วงเวลา หรือสมมติฐานต้นทุนเพียงจุดเดียว

14.11 Benchmark Symmetry

การเปรียบเทียบ strategy กับ benchmark ต้องใช้ข้อมูล ช่วงเวลา การปรับ corporate actions ความถี่ การคำนวณผลตอบแทน และต้นทุนที่สมเหตุสมผลในมาตรฐานเดียวกัน

Same Information + Same Horizon
+Same Return Convention + Comparable Costs

มิฉะนั้น performance difference อาจมาจาก measurement asymmetry ไม่ใช่ investment skill คำว่า comparable costs ไม่ได้หมายความว่าต้องบังคับ strategy และ benchmark ให้มีต้นทุนเท่ากัน แต่ต้องใช้ต้นทุนที่สมจริงกับ turnover และวิธี implementation ของแต่ละฝ่าย เช่น benchmark แบบ buy-and-hold

อาจมี turnover ต่ำกว่ากลยุทธ์เชิงรุกอย่างแท้จริง

14.12 Machine Learning: Prediction-to-Portfolio Gap

ให้แบบจำลองพยากรณ์

$$\hat{y}_{i,t+h} = f_{\theta_t}(X_{i,t})$$

โดย θ_t ต้องเรียนรู้จาก information set ที่อนุญาต ณ เวลา t เท่านั้น และ target horizon h ต้องสอดคล้องกับ holding period และ decision clock

การพยากรณ์ที่ดีไม่เท่ากับพอร์ตที่ดี เพราะต้องผ่าน

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Prediction} \longrightarrow \text{Ranking} \longrightarrow \text{Sizing} \longrightarrow \text{Risk Control} \\ \longrightarrow \text{Execution} \longrightarrow \text{Net Performance}\end{array}}$$

ดังนั้น RMSE, AUC หรือ R^2 ที่ดีขึ้นอาจไม่มีคุณค่าทางเศรษฐกิจหากความผิดพลาดเกิดในสินทรัพย์ที่ไม่ได้ถือ หรือโมเดลสร้าง turnover/concentration สูงขึ้น

ปัญหา portfolio-aware ML สามารถเขียนเป็น

$$\max_{w_t} \left\{ \hat{\mu}_t^\top w_t - \frac{\lambda}{2} w_t^\top \widehat{\Sigma}_t w_t - \eta \| w_t - w_{t-1}^+ \|_1 \right\}$$

ภายใต้ constraints เดียวกับการนำไปใช้จริง เป้าหมายนี้ทำให้เห็นว่า prediction layer เป็นเพียง input หนึ่งของ portfolio decision ไม่ใช่ objective สุดท้าย

14.12.1 โมเดลและบทบาท

ตารางที่ 14.3: บทบาทของโมเดล Machine Learning ในระบบลงทุนและความเสี่ยงที่ต้องควบคุม

กลุ่มโมเดล	บทบาทที่เหมาะสม	ความเสี่ยงสำคัญ
Supervised	regression, classification, ranking	leakage, overfit, calibration drift
Unsupervised	clustering, PCA, representation	unstable clusters, economic interpretation
Deep learning	nonlinear/ high-dimensional mapping	parameter risk, sample efficiency, governance
NLP/LLM	text features, classification, retrieval/summarization	timestamp, provenance, hallucination, licensing
Alternative-data models	nontraditional features	coverage drift, selection bias, privacy/legal risk

Supervised learning ใช้ regression/classification/ranking เพื่อพยากรณ์ผลตอบแทน ลำดับ หรือเหตุการณ์ ส่วน Unsupervised learning ใช้ clustering, PCA และ representation learning เพื่อค้นหาโครงสร้างที่ไม่มี label โดยตรง

Deep learning อาจเหมาะเมื่อข้อมูลมีโครงสร้างซับซ้อนหรือปริมาณมาก แต่จำนวน observation เชิงเวลาในตลาดมักต่ำกว่าจำนวนแถวข้อมูลดิบเนื่องจาก cross-sectional และ temporal dependence จึงต้องพิจารณา effective sample size ไม่ใช่จำนวน records เพียงอย่างเดียว

NLP/LLM สามารถแปลงข่าว เอกสาร หรือข้อความเป็น features แต่ต้องควบคุม timestamp, provenance, model/version drift, hallucination ในขั้น generative, revision และ licensing ส่วน Alternative data ต้องตรวจความคงที่ของ coverage, selection process, legal/privacy constraints และความสามารถในการสร้างข้อมูลย้อนหลังแบบ point-in-time

ประเด็นที่ต้องระวัง

การเลือกโมเดลจาก metric การพยากรณ์เพียงตัวเดียวอาจเกิด prediction-to-portfolio mismatch ควรประเมินทั้ง predictive metric, IC, turnover, exposure, cost-adjusted return, drawdown และ stability ภายใต้ protocol เดียวกัน

14.13 Reinforcement Learning และ Objective Alignment

RL กำหนด state s_t, action a_t, reward r_{t+1} และ policy $\pi(a_t|s_t)$ โดย state ต้องมีข้อมูลเพียงพอให้การตัดสินใจสะท้อนสถานะของพอร์ตและข้อจำกัดที่เกี่ยวข้อง เช่น holdings, cash, risk exposure และข้อมูลตลาดที่อนุญาต

reward สำหรับการลงทุนไม่ควรเป็น gross return อย่างเดียว ตัวอย่างเชิงแนวคิด

$$r_{t+1} = R^{\text{net}}_{t+1} - \lambda_\sigma \hat{\sigma}^2_{t+1} - \lambda_{TO} TO_t - \lambda_{DD} DD_{t+1}$$

โดย coefficients $\lambda_\sigma, \lambda_{TO}, \lambda_{DD}$ ทำหน้าที่ปรับหน่วยและ trade-off ของ objective ไม่ใช่พารามิเตอร์ที่มีค่ามาตรฐานเดียวสำหรับทุกปัญหา หาก reward ใช้ drawdown ซึ่งขึ้นกับ running wealth peak ควรรวมตัวแปรที่ทำให้ path dependence นี้อยู่ใน state หรือออกแบบ environment ให้รักษาข้อมูลดังกล่าวอย่างถูกต้อง

ประเด็นที่ต้องระวัง

RL มี ความ เสี่ยง จาก simulator mismatch, reward hacking, unstable policy, off-policy extrapolation และ regime shift การมี reward สูงใน historical environment ไม่ได้แปลว่า policy จะปลอดภัยในตลาดจริง จึงควรมี hard risk limits, conservative deployment, paper trading และ human override แยกจาก reward optimization

14.14 Model Governance และ Quant Research Gates

Research Gates

1. **G0 Problem**: hypothesis, objective, benchmark และ economic rationale ชัดเจน
2. **G1 Data**: point-in-time, lineage, universe และ data quality ผ่าน
3. **G2 Model**: specification, ablation, leakage control และ reproducibility ผ่าน
4. **G3 Risk**: OOS, stress, cost, turnover, capacity และ failure modes ผ่าน
5. **G4 Impact**: deployment, monitoring, governance และ decision usefulness ผ่าน

Model card ควรระบุ purpose, data, features, assumptions, training period, validation period, benchmark, costs, limitations, risk limits, retraining policy, drift indicators, owner และ retirement criteria

14.14.1 Drift และ Kill Criteria

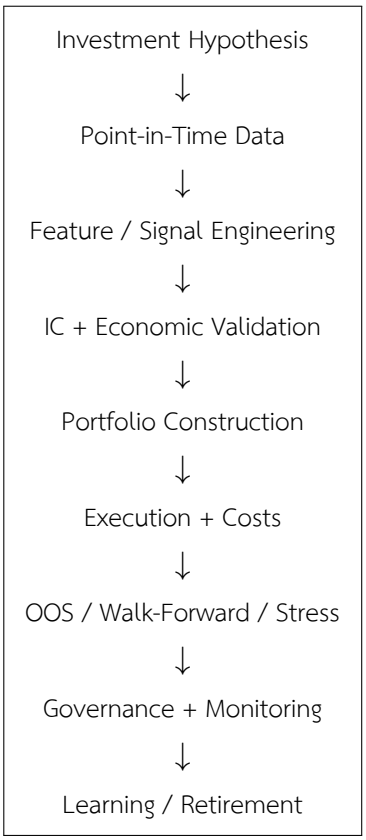
ตัวชี้วัด drift อาจประกอบด้วย

$$IC_t, \quad Sharpe_t, \quad TE_t, \quad TO_t, \quad Cost_t, \quad Exposure_t$$

ระบบควรมีเกณฑ์ลดความเสี่ยง หยุดส่งคำสั่ง หรือเข้าสู่ model review เมื่อข้อมูลหรือพฤติกรรมของโมเดลออกนอกช่วงที่ยอมรับได้ แต่ kill criteria ไม่ควรอาศัย Sharpe หรือ IC จุดเดียว เพราะตัวชี้วัดระยะสั้นมี noise สูง ควรใช้ escalation หลายระดับ เช่น data-integrity breach หรือ risk-limit breach เป็น hard stop ขณะที่ performance deterioration ใช้ persistence, confidence interval และ regime context ประกอบ

การเปลี่ยนโมเดลหลัง deployment ต้องถูก versioned และผ่าน gate ที่เหมาะสมอีกครั้ง มิฉะนั้น adaptive tuning อาจเปลี่ยน live system ให้กลายเป็นการทำ research บนข้อมูลจริงโดยไม่มี holdout

14.15 Integrated Quant Research Architecture



นี่คือจุดที่ทฤษฎีจากทั้งเล่มกลับมาทำงานพร้อมกัน ได้แก่ผลตอบแทน ความเสี่ยง covariance การประเมินมูลค่า Markowitz factor models optimization allocation VaR/ES performance evaluation และ fund implementation

จุดสำคัญคือแต่ละชั้นต้องส่งต่อ **ทั้งค่าประมาณและความไม่แน่นอน** ไปยังชั้นถัดไป ตัวอย่างเช่น expected return ที่ไม่แน่นอนไม่ควรถูกแปลงเป็นน้ำหนักสุดโต่ง และ cost estimate ที่ไม่แน่นอนควรถูก stress ก่อนเพิ่ม AUM การออกแบบระบบจึงเป็นปัญหาของ error propagation และ feedback control พอ ๆ กับ prediction

14.16 Investment Labs

Investment Lab: Lab 14A – Signal Engineering

สร้าง cross-sectional features อย่างน้อย 3 ตัว ทำ winsorization, z-score, rank และ neutralization เปรียบเทียบ IC, Rank IC, turnover และ factor exposure ของแต่ละวิธี

Investment Lab: Lab 14B – Leakage-Free Backtest

สร้าง strategy หนึ่งชุดโดยกำหนด availability time, signal time, order time และ fill time อย่างชัดเจน เปรียบเทียบผลของ same-close execution กับ next-period execution เพื่อเห็น execution bias

Investment Lab: Lab 14C – Portfolio of Alphas

สร้าง alpha อย่างน้อย 5 ตัว ประมาณ μ_α และ Ω แล้วเปรียบเทียบ equal weight กับ inverse-covariance combination พร้อม shrinkage และ correlation stress

Investment Lab: Lab 14D – Cost and Capacity

เพิ่ม spread, commission, slippage และ nonlinear market impact เข้า backtest แล้วสร้างกราฟ net alpha เทียบ AUM เพื่อประมาณ capacity

Investment Lab: Lab 14E – Quant Research Audit

สร้าง audit package ของ backtest ประกอบด้วย README, data dictionary, code version, environment, random seed, experiment registry, parameter-search log, final holdout, benchmark symmetry check, cost assumptions, limitations และ one-page model card

ผลส่งมอบของทุก Lab ควรแยก **research artifact** ออกจาก **decision artifact**: research artifact เก็บข้อมูล โค้ด พารามิเตอร์ และ diagnostics เพื่อทำซ้ำได้ ส่วน decision artifact สรุปว่ากลยุทธ์ผ่านหรือไม่ผ่าน gate ใด เพราะเหตุใด และเงื่อนไขใดทำให้ต้องทบทวนผล

14.17 บทสรุปท้ายบท

การลงทุนเชิงปริมาณไม่ใช่การค้นหาสูตรที่ให้ backtest สูงที่สุด แต่เป็นการออกแบบระบบตัดสินใจที่ข้อมูลและเวลาไม่รั่วไหล สัญญาณมีเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์ พอร์ตควบคุมความเสี่ยง ต้นทุนถูกนับอย่างสมจริง และผลลัพธ์ผ่านการตรวจสอบนอกตัวอย่าง

แกนทางคณิตศาสตร์ของระบบเริ่มจากการแปลงข้อมูลเป็น signal การ neutralize ด้วย projection การแปลง signal เป็นพอร์ตภายใต้ covariance และ constraints การรวม alpha หลายตัวผ่าน expected alpha กับ covariance ของ alpha returns และการหักต้นทุนในหน่วยที่สอดคล้องกับผลตอบแทน

ความซับซ้อนของ Machine Learning ไม่ลดความจำเป็นของทฤษฎีพอร์ต ตรงกันข้าม โมเดลพยากรณ์ต้องผ่าน prediction-to-portfolio mapping และถูกประเมินหลังต้นทุน ความเสี่ยง และข้อจำกัดการซื้อขาย

Robust validation ต้องแยก development ออกจาก evaluation ใช้ walk-forward หรือ rolling design ควบคุม multiple testing และตรวจ sensitivity ต่อ parameter, cost และ regime พร้อม benchmark ที่เปรียบเทียบอย่างสมมาตร

ท้ายที่สุด quantitative investing ที่ใช้งานได้จริงต้องมี governance, reproducibility, monitoring และ retirement rule ระบบที่ดีจึงไม่ใช่เพียง “โมเดลที่ทำนายได้” แต่เป็นวงจร

$$\text{Data} \longrightarrow \text{Signal} \longrightarrow \text{Portfolio} \longrightarrow \text{Execution} \longrightarrow \text{Validation} \longrightarrow \text{Governance} \longrightarrow \text{Learning}$$

คำศัพท์สำคัญ

Alpha Signal ตัวแปรหรือคะแนนที่สร้างก่อนลงทุนและคาดว่าจะมี predictive content
Point-in-Time Data ข้อมูลเวอร์ชันที่เข้าถึงได้จริง ณ เวลาตัดสินใจ
Neutralization การกำจัด exposure ที่ไม่ต้องการออกจาก signal
Information Coefficient สหสัมพันธ์ภาคตัดขวางระหว่าง signal กับ forward return
Turnover ปริมาณการเปลี่ยนน้ำหนักพอร์ตระหว่างรอบ
Market Impact ผลของคำสั่งซื้อขายต่อราคาที่สามารถดำเนินการได้
Capacity ขนาด AUM ที่กลยุทธ์ยังสร้างผลตอบแทนสุทธิที่คุ้มความเสี่ยง
Walk-Forward Validation การประเมินแบบเลื่อนเวลาโดยใช้เฉพาะอดีตสร้างโมเดล
Purging การตัด observations ที่มี information overlap ระหว่าง train และ validation

Data Snooping การค้นหาหลายแบบจนพบผลดีโดยบังเอิญ

Model Drift การเปลี่ยนแปลงของข้อมูลหรือความสัมพันธ์จนโมเดลเสื่อม

Model Card เอกสารสรุปวัตถุประสงค์ ข้อมูล สมมติฐาน validation ข้อจำกัด และ governance ของโมเดล

14.18 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. อธิบายความแตกต่างระหว่าง ex-ante alpha signal และ ex-post alpha
2. เขียน decision clock สำหรับกลยุทธ์ที่ใช้ราคาปิดสร้าง signal และซื้อที่ราคาเปิดวันถัดไป
3. ยกตัวอย่าง look-ahead bias ที่เกิดจากข้อมูลบัญชี
4. คำนวณ z-score ของข้อมูล $(2, 4, 6, 8, 10)$
5. map rank ของข้อมูลห้าค่าลงช่วง $[-1, 1]$
6. พิสูจน์ว่า neutralized signal ตั้งฉากกับ exposure matrix
7. อธิบายกรณีที่ rank transformation เหมาะกว่า z-score และกรณีที่ winsorization อาจเปลี่ยนลำดับข้อมูล
8. สร้าง composite score จาก Value, Momentum และ Quality พร้อมกำหนดน้ำหนัก
9. อธิบายผลของ volatility scaling ต่อ position size
10. ออกแบบ liquidity gate จาก ADV และ bid–ask spread
11. คำนวณ momentum 3 งวดจากผลตอบแทนที่กำหนดเอง และอธิบายว่าจะเปลี่ยนสูตรอย่างไรหากต้องการเว้นงวดล่าสุด
12. อธิบายความแตกต่างระหว่าง factor model และ factor strategy
13. คำนวณ EMA เมื่อ $n = 9$ และมีราคาต่อเนื่อง 5 ค่า
14. อธิบายเหตุผลที่ next-day-open execution ลด execution bias ในกรณี signal ใช้ราคาปิด
15. คำนวณ IC จาก signal และ forward return ของหุ้น 5 ตัว
16. อธิบายว่าทำไม IC บวกอาจให้ net return ติดลบ
17. แปลง signal $(2, 1, 0, -1, -2)$ เป็น dollar-neutral gross-normalized weights
18. คำนวณ one-way turnover จากน้ำหนักก่อนและหลัง rebalance
19. ตั้ง optimization ที่มี expected return, variance และ turnover penalty
20. พิสูจน์ว่า maximum-IR alpha combination มีทิศทาง $\Omega^{-1}\mu_\alpha$
21. อธิบายผลของ alpha correlation ต่อ diversification
22. สร้างตัวอย่าง alpha ใหม่ที่ Sharpe สูงแต่ไม่มี novelty เมื่อเทียบกับ alpha library
23. คำนวณ net return เมื่อ gross return เท่ากับ 1.2% และต้นทุนรวม 0.35%

24. อธิบายความแตกต่างระหว่างต้นทุนจำนวนเงิน $\mathcal{C}_t$ กับ cost rate c_t และระหว่าง linear cost กับ nonlinear market impact
25. ออกแบบการประมาณ capacity ของกลยุทธ์หนึ่งชุด
26. คำนวณความน่าจะเป็นพบ false positive อย่างน้อยหนึ่งครั้งเมื่อ $M = 20$ และ $\alpha = 0.05$ ภายใต้สมมติฐานอิสระ
27. เปรียบเทียบ expanding-window กับ rolling-window validation
28. อธิบายเหตุผลของ purging และ embargo
29. ออกแบบ benchmark-symmetry checklist
30. สร้าง Model Card สำหรับกลยุทธ์เชิงปริมาณหนึ่งกลยุทธ์ พร้อมกำหนด drift indicators และ kill/escalation criteria อย่างน้อยสามประเภท

คำถามชวนคิด

1. กลยุทธ์ที่ Sharpe สูงมากใน backtest แต่มี economic rationale อ่อนควรผ่าน research gate หรือไม่
2. หาก ML model มี RMSE ต่ำกว่าแต่สร้าง turnover สูงกว่า โมเดลใดควรถูกเลือกสำหรับการลงทุน
3. การเพิ่มข้อมูลจำนวนมากช่วยลด model risk เสมอหรืออาจเพิ่ม data-mining risk
4. Alpha ที่ correlation ต่ำกับ alpha library แต่มี capacity ต่ำมากยังมีคุณค่าต่อพอร์ตหรือไม่
5. ควรหยุดใช้โมเดลเมื่อ Sharpe ลดลงเท่าใด หรือควรใช้เกณฑ์หลายมิติร่วมกัน
6. ในยุค AI ความได้เปรียบที่ยั่งยืนควรอยู่ที่โมเดล ข้อมูล execution หรือ governance มากที่สุด เพราะเหตุใด

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 14

[2] Andrew Ang, Robert J. Hodrick, Yuhang Xing, and Xiaoyan Zhang. “The Cross-Section of Volatility and Expected Returns”. In: *The Journal of Finance* 61.1 (2006), pp. 259–299.

[10] Prachya Boonprasurt, Pipat Sampaokit, and Wichai Witayakiattilerd. “MACD Indicator with the Modified Signal Line and Trading Weight Inference in Fuzzy Environment”. In: *Thailand Statistician* 20.1 (2022), pp. 98–123.

[20] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds”. In: *Journal of Financial Economics* 33.1 (1993), pp. 3–56.

[26] Narasimhan Jegadeesh and Sheridan Titman. “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency”. In: *The Journal of Finance* 48.1 (1993), pp. 65–91.

[28] C. Kesamoon and W. Witayakiattilerd. “Hierarchy Analysis Process under Fuzzy Environment: A Positive Way of Selecting Stocks into Portfolio under Ambiguity in Stock Information”. In: *Science & Technology Asia* 25.4 (2020), pp. 1–11. DOI: 10.14456/scitechasia.2019.24.

[32] Marcos López de Prado. *Advances in Financial Machine Learning*. Wiley, 2018.

[37] Robert Novy-Marx. “The Other Side of Value: The Gross Profitability Premium”. In: *Journal of Financial Economics* 108.1 (2013), pp. 1–28.

[53] Ryan Sullivan, Allan Timmermann, and Halbert White. “Data-Snooping, Technical Trading Rule Performance, and the Bootstrap”. In: *The Journal of Finance* 54.5 (1999), pp. 1647–1691.

[60] Halbert White. “A Reality Check for Data Snooping”. In: *Econometrica* 68.5 (2000), pp. 1097–1126.

[63] Wichai Witayakiattilerd et al. “Advanced Forecasting of Non-Performing Loans: Revised Chronological and Decision-Aware Framework”. Revised project manuscript; cited for validation methodology. 2026.

[64] Wichai Witayakiattilerd. “QuantX TU Blueprint 2026–2029: Thammasat Quantitative Finance & AI Society”. Project blueprint, Thammasat University. 2026.

[65] Wichai Witayakiattilerd. “Thailand Capital Flow Intelligence Platform (Phase I): Mathematical Foundation and Prototype”. CMDF proposal framework under development. 2026.

[66] Wichai Witayakiattilerd. “การวิจัยอัลฟาและการสร้างพอร์ตการลงทุนเชิงระบบ: ทฤษฎี วิธีวิทยา และการประยุกต์ใช้กับแพลตฟอร์ม WorldQuant BRAIN”. Project textbook manuscript, draft dated 20 June 2026. 2026.

[67] Wichai Witayakiattilerd. “รายงานการพัฒนาแบบจำลอง Alpha เชิงระบบสำหรับการลงทุนเชิงปริมาณ: Systematic Alpha Portfolio Construction for Quantitative Trading Based on Mean Reversion, Volatility Scaling, and Liquidity Signals”. Project research report, Thammasat University. 2026.

[69] Wichai Witayakiattilerd and Wararit Panichkitkosolkul. “Robust Backtesting of Bollinger Bands with Alternative Moving Averages: An Empirical Study on SET50 Stocks”. In: *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science* 12 (2026), pp. 96–118. DOI: 10.58715/bangmodjmcs.2026.12.6.

Part VI

ภาคผนวก

บทที่ A เครื่อง มือ ทาง คณิตศาสตร์ สำหรับ การ ลงทุน และ การ บริหารพอร์ต

A.1 บทบาทของภาคผนวกนี้

ภาคผนวกนี้รวบรวมเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ซ้ำในหลายบทของตำรา เพื่อให้ผู้อ่านสามารถย้อนกลับมาทบทวนได้โดยไม่ต้องขยายรายละเอียดพื้นฐาน ในบทหลัก เนื้อหาจึงมีลักษณะเป็น *mathematical reference* มากกว่าบทเรียนคณิตศาสตร์แบบเต็มรายวิชา

A.2 สัญกรณ์ผลรวมและผลคูณ

สำหรับจำนวนจริง $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

หาก R_t คือผลตอบแทนแบบ simple return ในงวดที่ t แล้ว มูลค่าเงินลงทุนหลัง T งวดคือ

$$V_T = V_0 \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t).$$

A.3 ลอการิทึมและผลตอบแทนแบบลอการิทึม

นิยาม log return เป็น

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right).$$

จากสมบัติ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ จะได้

$$\sum_{t=1}^{T} r_t = \ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right).$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Simple return เหมาะกับการรวมผลตอบแทนของสินทรัพย์หลายชนิดภายในงวดเดียว ส่วน log return มีสมบัติ additive ตามเวลา จึงไม่ควรสลับใช้สองนิยามโดยไม่ระบุให้ชัดเจน

A.4 เวกเตอร์และเมทริกซ์

ให้เวกเตอร์น้ำหนักของพอร์ตเป็น

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1,$$

และเวกเตอร์ผลตอบแทนคาดหมายเป็น

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

ดังนั้นผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ตคือ

$$\mu_p = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mu.$$

A.5 Covariance Matrix และ Quadratic Form

ให้

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

โดย

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j).$$

ความแปรปรวนของพอร์ตคือ

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}.$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเป็น symmetric positive semidefinite ดังนั้น

$$\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} \geq 0$$

สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ ทุกเวกเตอร์

A.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพอร์ต

สำหรับ

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

เมื่อ Σ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

$$\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = 2\Sigma \mathbf{w}.$$

ผลลัพธ์นี้เป็นพื้นฐานของ minimum-variance optimization และการวิเคราะห์ marginal contribution to risk

A.7 ตัวคูณลากร็องจ์

พิจารณาปัญหา

$$\min_{\mathbf{w}} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

ภายใต้

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1.$$

กำหนด

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^\top \mathbf{w} - 1).$$

เงื่อนไขอันดับหนึ่งให้

$$\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

เมื่อ Σ ผกผันได้

$$\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

ใช้ข้อจำกัดน้ำหนักรวมเท่ากับหนึ่ง จะได้

Global Minimum-Variance Portfolio

$$\boxed{\mathbf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}}}$$

A.8 กรณีมีผลตอบแทนเป้าหมาย

หากเพิ่มข้อจำกัด

$$\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mu = \mu^{*}$$

ปัญหา Markowitz แบบมาตรฐานคือ

$$\min_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

ภายใต้

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} = 1, \qquad \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mu = \mu^{*}.$$

ภาคผนวกนี้ให้เพียงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ส่วนการตีความ efficient frontier และการใช้จริงอยู่ในบทหลักของตำรา

A.9 Convexity และเหตุผลที่สำคัญต่อ Portfolio Optimization

ถ้า $\Sigma \succeq 0$ แล้ว

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}$$

เป็นฟังก์ชัน convex ดังนั้น minimum-variance problem ภายใต้ข้อจำกัดเชิงเส้น เป็น convex optimization problem

ประเด็นที่ต้องระวัง

การที่ objective เป็น convex ไม่ได้หมายความว่า input data ถูกต้องเสมอ Covariance estimation error, ill-conditioning, constraints และ transaction costs ยังสามารถทำให้พอร์ตที่ได้ไม่เสถียรในทางปฏิบัติ

A.10 Matrix Identities ที่ใช้บ่อย

สำหรับเวกเตอร์และเมทริกซ์ที่มีมิติสอดคล้องกัน

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}, \qquad (A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1},$$

และถ้า Σ เป็น symmetric

$$\Sigma^{\mathsf{T}} = \Sigma.$$

A.11 สรุป

เครื่องมือในภาคผนวกนี้ครอบคลุมสัญกรณ์ เวกเตอร์ เมทริกซ์ quadratic form อนุพันธ์ Lagrange multiplier และ convexity ซึ่งเป็นฐานคณิตศาสตร์ของการวิเคราะห์พอร์ตตลอดทั้งเล่ม

บทที่ B ความน่าจะเป็นและสถิติสำหรับผลตอบแทนและความเสี่ยง

B.1 บทบาทของภาคผนวกนี้

ภาคผนวกนี้รวบรวมแนวคิดความน่าจะเป็นและสถิติ ที่ใช้เป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ผลตอบแทน ความเสี่ยง การกระจายความเสี่ยง การประมาณค่าพารามิเตอร์ และการวัด tail risk

B.2 ตัวแปรสุ่มและค่าคาดหมาย

ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มแทนผลตอบแทน ค่าคาดหมายคือ

$$\mathbb{E}(R) = \mu.$$

ถ้า a, b เป็นค่าคงที่

$$\mathbb{E}(a + bR) = a + b\mathbb{E}(R).$$

สำหรับผลตอบแทนหลายสินทรัพย์

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

จึงมี

$$\mathbb{E}(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(R_i).$$

B.3 Variance และ Standard Deviation

นิยาม

$$\mathrm{Var}(R) = \mathbb{E}[(R - \mu)^2]$$

และ

$$\mathrm{SD}(R) = \sqrt{\mathrm{Var}(R)}.$$

สำหรับค่าคงที่ a, b

$$\mathrm{Var}(a + bR) = b^2 \,\mathrm{Var}(R).$$

B.4 Covariance และ Correlation

นิยาม covariance เป็น

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \mathbb{E}[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)].$$

Correlation คือ

$$\mathrm{Corr}(R_i, R_j) = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}.$$

เมื่อ $\sigma_i, \sigma_j > 0$ จะมี

$$-1 \le \mathrm{Corr}(R_i, R_j) \le 1.$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

Correlation ต่ำช่วยสร้าง diversification ได้ แต่ correlation เป็นค่าที่ประมาณจากข้อมูลและสามารถเปลี่ยนแปลงอย่างมาก ในช่วงวิกฤต จึงไม่ควรถือว่าเป็นค่าคงที่ถาวร

B.5 ความแปรปรวนของพอร์ต

สำหรับพอร์ตสองสินทรัพย์

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}.$$

กรณี n สินทรัพย์

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathbf{w}.$$

B.6 Sample Mean, Sample Variance และ Sample Covariance

สำหรับข้อมูลผลตอบแทน $R_1, \dots, R_T$ sample mean คือ

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t.$$

sample variance คือ

$$s^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2.$$

sample covariance คือ

$$s_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j).$$

B.7 Normal Distribution

ถ้า

$$R \sim N(\mu, \sigma^2),$$

แล้ว

$$Z = \frac{R-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Normal distribution มีความสำคัญในฐานะแบบจำลองอ้างอิง แต่ผลตอบแทนจริงอาจมี skewness, fat tails และ volatility clustering

B.8 Lognormal Price Model

ถ้า log return เป็น normal

$$\ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) \sim N(m, s^2),$$

แล้ว P_T มี lognormal distribution และมีค่าเป็นบวกเสมอ

B.9 Skewness และ Kurtosis

Skewness ใช้วัดความไม่สมมาตรของการแจกแจง ส่วน kurtosis ใช้วัดความหนาของส่วนหางเมื่อเทียบกับการแจกแจงอ้างอิง

สำหรับข้อมูลการเงิน ค่าดังกล่าวมีประโยชน์ในการตรวจว่า mean–variance description เพียงอย่างเดียวอาจไม่เพียงพอหรือไม่

B.10 Quantile

ให้ F_L เป็น CDF ของตัวแปรขาดทุน L quantile ระดับ α นิยามเป็น

$$q_\alpha = \inf\{\ell : F_L(\ell) \geq \alpha\}.$$

แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของ Value at Risk

B.11 Value at Risk และ Expected Shortfall

สำหรับ loss variable L นิยาม

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha.$$

Expected Shortfall ในกรณีต่อเนื่องเขียนได้เป็น

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)].$$

อีกนิยามที่มีความทั่วไปมากกว่าใช้ quantile integral

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(L)\,du.$$

ประเด็นที่ต้องระวัง

ต้องตรวจ sign convention ทุกครั้งว่าแบบจำลองนิยาม “ผลตอบแทน” หรือ “ขาดทุน” เพราะ VaR ที่คำนวณจาก return distribution กับ VaR ที่คำนวณจาก loss distribution อาจใช้เครื่องหมายต่างกัน

B.12 Conditional Expectation

ถ้า $\mathcal{F}_t$ แทนข้อมูลที่ทราบ ณ เวลา t ค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขคือ

$$\mathbb{E}(R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t).$$

แนวคิดนี้เป็นสะพานไปสู่การพยากรณ์ factor models, volatility models และ quantitative strategies

B.13 Law of Large Numbers และ Sampling Error

เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น sample mean มีแนวโน้มเข้าใกล้ population mean ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม แต่ในข้อมูลตลาดการเงิน observations อาจไม่เป็นอิสระ และ distribution อาจเปลี่ยนตาม regime

ดังนั้นการเพิ่มจำนวนข้อมูลเพียงอย่างเดียว ไม่รับประกันว่าพารามิเตอร์ที่ประมาณจะเสถียรในอนาคต

B.14 สรุป

ภาคผนวกนี้ให้ภาษาความน่าจะเป็นและสถิติพื้นฐาน สำหรับ expected return, variance, covariance, distribution, quantile, VaR และ ES โดยรายละเอียดการประยุกต์ใช้ใน portfolio construction และ risk management อยู่ในบทหลัก

บทที่ C สูตรสำคัญสำหรับการลงทุนและการบริหารพอร์ต

C.1 แนวทางการใช้

ภาคผนวกนี้เป็น *formula reference* สำหรับค้นสูตรอย่างรวดเร็ว รายละเอียดสมมติฐาน การพิสูจน์ การตีความ และข้อจำกัดของแต่ละสูตรให้ย้อนกลับไปยังบทหลัก

C.2 ผลตอบแทน

Simple Return

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}$$

Cumulative Return

$$R_{0:T} = \prod_{t=1}^{T}(1 + R_t) - 1$$

Log Return

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Annualization

ถ้ามี m งวดต่อปี

$$\mu_{\text{ann}} \approx m\bar{R}, \qquad \sigma_{\text{ann}} \approx \sqrt{m}\,\sigma$$

ภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสม

C.3 พอร์ตการลงทุน

Portfolio Return

$$R_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mathsf{R}$$

Expected Portfolio Return

$$\mu_p = \mathsf{w}^\mathsf{T}\mu$$

Portfolio Variance

$$\sigma_p^2 = \mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}$$

Portfolio Volatility

$$\sigma_p = \sqrt{\mathsf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathsf{w}}$$

C.4 Markowitz Portfolio

Global Minimum-Variance Portfolio

$$\mathsf{w}_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1}\mathsf{1}}{\mathsf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mathsf{1}}$$

กำหนด

$$A = \mathsf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mathsf{1}, \qquad B = \mathsf{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mu, \qquad C = \mu^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\mu,$$

และ

$$D = AC - B^2$$

พอร์ต minimum variance ที่ให้ผลตอบแทนเป้าหมาย μ^* คือ

$$\mathsf{w}(\mu^*) = \Sigma^{-1}\left[\frac{C - B\mu^*}{D}\mathsf{1} + \frac{A\mu^* - B}{D}\mu\right]$$

C.5 Tangency Portfolio

เมื่อมี risk-free rate r_f และอนุญาตให้ใช้ unconstrained risky-asset weights

$$\mathbf{w}_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}$$

C.6 CAPM และ Beta

Beta

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$$

CAPM

$$\mathbb{E}(R_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(R_M) - r_f)$$

C.7 Performance Measures

Sharpe Ratio

$$\mathrm{SR}_p = \frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_p}$$

Treynor Ratio

$$T_p = \frac{\bar{R}_p - r_f}{\beta_p}$$

Jensen's Alpha

$$\alpha_p = \bar{R}_p - \left[r_f + \beta_p(\bar{R}_M - r_f)\right]$$

Information Ratio

$$IR = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_b}{\text{TE}}, \qquad \text{TE} = \text{SD}(R_p - R_b)$$

Sortino Ratio

$$\text{Sortino}_p = \frac{\bar{R}_p - R_{\text{MAR}}}{\text{DownsideDeviation}}$$

C.8 Drawdown

ถ้า

$$W_t$$

คือ wealth index แล้ว

$$DD_t = \frac{W_t - \max_{s \le t} W_s}{\max_{s \le t} W_s},$$

และ

$$\text{MDD} = \min_t DD_t$$

C.9 Risk Measures

Parametric Normal VaR

สำหรับ loss L ที่ประมาณเป็น normal

$$\text{VaR}_\alpha = \mu_L + z_\alpha \sigma_L$$

ถ้าใช้ return convention ต้องปรับเครื่องหมายให้สอดคล้องกับนิยาม loss

Normal Expected Shortfall

$$\text{ES}_\alpha = \mu_L + \sigma_L \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha}$$

C.10 EWMA Volatility

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) R_{t-1}^2$$

C.11 Fixed Income Reference

สำหรับ bond ที่มีกระแสเงินสด CF_t

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}$$

Macaulay duration

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\, PV(CF_t)}{P}$$

Modified duration

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1+y}$$

การประมาณการเปลี่ยนแปลงราคาอันดับหนึ่ง

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y$$

เมื่อเพิ่ม convexity

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta y + \frac{1}{2} \mathcal{C} (\Delta y)^2$$

C.12 Rebalancing และ Turnover

นิยามแบบหนึ่งของ turnover คือ

$$\text{Turnover}_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |w_{i,t}^{\text{target}} - w_{i,t}^{\text{pretrade}}|$$

ถ้า cost rate ของสินทรัพย์ i คือ c_i สามารถประมาณ transaction cost เป็น

$$\text{Cost}_t \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \left| w_{i,t}^{\text{target}} - w_{i,t}^{\text{pretrade}} \right|$$

C.13 สูตรตรวจสอบหน่วย

ประเด็นที่ต้องระวัง

ก่อนใช้สูตรใดให้ตรวจอย่างน้อย 4 เรื่อง: (1) return เป็น simple หรือ log, (2) อัตราเป็นรายวัน รายเดือน หรือรายปี, (3) ใช้ return หรือ loss convention, และ (4) covariance/volatility ถูก annualize ด้วยฐานเวลาเดียวกัน

บทที่ D อภิธานศัพท์ สัญลักษณ์ และคำย่อ

D.1 บทนำ

ภาคผนวกนี้รวบรวมสัญลักษณ์ คำย่อ และศัพท์สำคัญที่ปรากฏตลอดตำรา เพื่อช่วยให้ผู้อ่านตรวจสอบความหมายได้อย่างรวดเร็ว โดยไม่แทนที่นิยามอย่างเป็นทางการในบทหลัก

D.2 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และการเงิน

สัญลักษณ์	ความหมาย
P_t	ราคาสินทรัพย์ ณ เวลา t
D_t	เงินปันผลหรือ cash distribution ในงวด t
R_t	Simple return ในงวด t
r_t	Log return ในงวด t
μ_i	ผลตอบแทนคาดหมายของสินทรัพย์ i
μ_p	ผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ต
σ_i	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนสินทรัพย์ i
σ_p	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนพอร์ต
σ_{ij}	Covariance ระหว่างผลตอบแทนสินทรัพย์ i และ j
ρ_{ij}	Correlation ระหว่างผลตอบแทนสินทรัพย์ i และ j
$\mathbf{w}$	เวกเตอร์น้ำหนักพอร์ต
w_i	น้ำหนักของสินทรัพย์ i ในพอร์ต
$\boldsymbol{\mu}$	เวกเตอร์ผลตอบแทนคาดหมาย
$\boldsymbol{\Sigma}$	Covariance matrix
$\mathbf{1}$	เวกเตอร์ที่ทุกองค์ประกอบเท่ากับหนึ่ง
r_f	อัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยง
β_i	Beta ของสินทรัพย์ i เทียบกับตลาด
α_p	Jensen’s alpha หรือ intercept ตามบริบท

สัญลักษณ์	ความหมาย
R_M	ผลตอบแทนของ market portfolio หรือ market benchmark
R_b	ผลตอบแทน benchmark
VaR_α	Value at Risk ที่ระดับความเชื่อมั่น α
ES_α	Expected Shortfall ที่ระดับความเชื่อมั่น α
λ	Decay factor ใน EWMA หรือ multiplier ตามบริบท
y	Yield ของตราสารหนี้
D_{Mac}	Macaulay duration
D_{mod}	Modified duration
$\mathcal{C}$	Convexity ตามนิยามที่ใช้ในบทตราสารหนี้

D.3 คำย่อสำคัญ

คำย่อ	ความหมาย
APR	Annual Percentage Return หรือ Annualized Return ตามบริบท
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CML	Capital Market Line
CVaR	Conditional Value at Risk; ในหลายบริบทใช้ใกล้เคียง Expected Shortfall
ETF	Exchange-Traded Fund
ES	Expected Shortfall
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average
GMV	Global Minimum Variance
IR	Information Ratio
MDD	Maximum Drawdown
MPT	Modern Portfolio Theory
NAV	Net Asset Value
PSD	Positive Semidefinite
SML	Security Market Line
SR	Sharpe Ratio

คำย่อ	ความหมาย
TE	Tracking Error
VaR	Value at Risk

D.4 ศัพท์ไทย–อังกฤษที่ใช้ตลอดเล่ม

คำไทย	English term
การจัดสรรสินทรัพย์	Asset Allocation
การกระจายความเสี่ยง	Diversification
การปรับสมดุลพอร์ต	Rebalancing
การประเมินผลการบริหารพอร์ต	Portfolio Performance Evaluation
ผลตอบแทนคาดหมาย	Expected Return
ความแปรปรวน	Variance
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	Standard Deviation
ความแปรปรวนร่วม	Covariance
สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์	Correlation Coefficient
พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุด	Minimum-Variance Portfolio
พอร์ตสัมผัส	Tangency Portfolio
เส้นขอบเขตประสิทธิภาพ	Efficient Frontier
ความเสี่ยงเชิงระบบ	Systematic Risk
ความเสี่ยงเฉพาะตัว	Idiosyncratic Risk
อัตราส่วนชาร์ป	Sharpe Ratio
ค่าความเสี่ยง	Value at Risk
ค่าคาดหมายของความเสียหายส่วนหาง	Expected Shortfall
การลดลงจากจุดสูงสุด	Drawdown
ต้นทุนธุรกรรม	Transaction Cost
ความคลาดเคลื่อนจากดัชนีอ้างอิง	Tracking Error

D.5 หลักการใช้คำและสัญลักษณ์

ประเด็นที่ต้องระวัง

สัญลักษณ์เดียวกันอาจมีความหมายแตกต่างกันในตำราการเงินแต่ละเล่ม การใช้สูตรจากแหล่งภายนอกจึงควรตรวจนิยาม หน่วยเวลา sign convention และ normalization ก่อนนำมาใช้ร่วมกับสูตรในตำราเล่มนี้

D.6 หมายเหตุสำหรับการอ่านร่วมกับบทหลัก

อภิธานศัพท์นี้ตั้งใจให้เป็นจุดค้นหาอย่างรวดเร็ว หากต้องการนิยามทางคณิตศาสตร์ที่ครบถ้วน สมมติฐาน การพิสูจน์ ตัวอย่าง หรือข้อจำกัด ให้ย้อนกลับไปยังบทที่แนะนำแนวคิดนั้นเป็นครั้งแรก

บรรณานุกรม

[1] Yakov Amihud. “Illiquidity and Stock Returns: Cross-Section and Time-Series Effects”. In: *Journal of Financial Markets* 5.1 (2002), pp. 31–56. DOI: 10.1016/S1386-4181(01)00024-6.

[2] Andrew Ang, Robert J. Hodrick, Yuhang Xing, and Xiaoyan Zhang. “The Cross-Section of Volatility and Expected Returns”. In: *The Journal of Finance* 61.1 (2006), pp. 259–299.

[3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. “Coherent Measures of Risk”. In: *Mathematical Finance* 9.3 (1999), pp. 203–228.

[4] Carl R. Bacon. *Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution*. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

[5] Bank of Thailand. *Financial Markets and Thai Financial Market Structure*. See also Thai Financial Market Structure and Financial Market Statistics. 2026. URL: https://www.bot.or.th/en/our-roles/financial-markets.html (visited on 08/30/2026).

[6] Bank of Thailand. *Issuance of BOT Bonds/Bills and the BOT Bond Issuance Programme for 2026*. 2026. URL: https://www.bot.or.th/en/our-roles/monetary-policy/monetary-operations/OMOs/BOT-Bond.html (visited on 08/30/2026).

[7] Fischer Black and Robert Litterman. “Global Portfolio Optimization”. In: *Financial Analysts Journal* 48.5 (1992), pp. 28–43.

[8] Fischer Black and André F. Perold. “Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance”. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 16.3–4 (1992), pp. 403–426.

[9] Zvi Bodie, Alex Kane, and Alan J. Marcus. *Investments*. 12th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2021.

[10] Prachya Boonprasurt, Pipat Sampaokit, and Wichai Witayakiattilerd. “MACD Indicator with the Modified Signal Line and Trading Weight Inference in Fuzzy Environment”. In: *Thailand Statistician* 20.1 (2022), pp. 98–123.

[11] Gary P. Brinson, L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower. “Determinants of Portfolio Performance”. In: *Financial Analysts Journal* 42.4 (1986), pp. 39–44.

[12] Gary P. Brinson, Brian D. Singer, and Gilbert L. Beebower. “Determinants of Portfolio Performance II: An Update”. In: *Financial Analysts Journal* 47.3 (1991), pp. 40–48.

[13] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, and A. Craig MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

[14] CFA Institute. *2020 Global Investment Performance Standards (GIPS) for Firms*. CFA Institute. Charlottesville, VA, 2020.

[15] Peter F. Christoffersen. “Evaluating Interval Forecasts”. In: *International Economic Review* 39.4 (1998), pp. 841–862.

[16] K. J. Martijn Cremers and Antti Petajisto. “How Active Is Your Fund Manager? A New Measure That Predicts Performance”. In: *The Review of Financial Studies* 22.9 (2009), pp. 3329–3365.

[17] Aswath Damodaran. *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. 3rd ed. Wiley, 2012.

[18] Frank J. Fabozzi. *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8th ed. Pearson, 2012.

[19] Eugene F. Fama. “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work”. In: *The Journal of Finance* 25.2 (1970), pp. 383–417. DOI: 10.2307/2325486.

[20] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds”. In: *Journal of Financial Economics* 33.1 (1993), pp. 3–56.

[21] Myron J. Gordon and Eli Shapiro. “Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit”. In: *Management Science* 3.1 (1956), pp. 102–110.

[22] Larry Harris. *Trading and Exchanges: Market Microstructure for Practitioners*. New York: Oxford University Press, 2003.

[23] Joel Hasbrouck. *Empirical Market Microstructure: The Institutions, Economics, and Econometrics of Securities Trading*. New York: Oxford University Press, 2007.

[24] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10th ed. New York: Pearson, 2018.

[25] Roger G. Ibbotson and Paul D. Kaplan. “Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance?” In: *Financial Analysts Journal* 56.1 (2000), pp. 26–33.

[26] Narasimhan Jegadeesh and Sheridan Titman. “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency”. In: *The Journal of Finance* 48.1 (1993), pp. 65–91.

[27] Michael C. Jensen. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964”. In: *The Journal of Finance* 23.2 (1968), pp. 389–416.

[28] C. Kesamoon and W. Witayakiattilerd. “Hierarchy Analysis Process under Fuzzy Environment: A Positive Way of Selecting Stocks into Portfolio under Ambiguity in Stock Information”. In: *Science & Technology Asia* 25.4 (2020), pp. 1–11. DOI: 10.14456/scitechasia.2019.24.

[29] Paul H. Kupiec. “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”. In: *The Journal of Derivatives* 3.2 (1995), pp. 73–84.

[30] Olivier Ledoit and Michael Wolf. “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”. In: *Journal of Multivariate Analysis* 88.2 (2004), pp. 365–411.

[31] Andrew W. Lo. “The Statistics of Sharpe Ratios”. In: *Financial Analysts Journal* 58.4 (2002), pp. 36–52.

[32] Marcos López de Prado. *Advances in Financial Machine Learning*. Wiley, 2018.

[33] Harry Markowitz. “Portfolio Selection”. In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.

[34] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. 2nd ed. Princeton University Press, 2015.

[35] Frederic S. Mishkin and Stanley G. Eakins. *Financial Markets and Institutions*. 9th ed. Boston: Pearson, 2018.

[36] Franco Modigliani and Leah Modigliani. “Risk-Adjusted Performance”. In: *The Journal of Portfolio Management* 23.2 (1997), pp. 45–54.

[37] Robert Novy-Marx. “The Other Side of Value: The Gross Profitability Premium”. In: *Journal of Financial Economics* 108.1 (2013), pp. 1–28.

[38] James A. Ohlson. “Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation”. In: *Contemporary Accounting Research* 11.2 (1995), pp. 661–687.

[39] Stephen H. Penman. *Financial Statement Analysis and Security Valuation*. 5th ed. McGraw-Hill/Irwin, 2013.

[40] André F. Perold and William F. Sharpe. “Dynamic Strategies for Asset Allocation”. In: *Financial Analysts Journal* 44.1 (1988), pp. 16–27.

[41] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. “Optimization of Conditional Value-at-Risk”. In: *The Journal of Risk* 2.3 (2000), pp. 21–41.

[42] Stephen A. Ross. “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”. In: *Journal of Economic Theory* 13.3 (1976), pp. 341–360.

[43] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Digital Asset Business Operators: Rules and Regulations*. 2026. URL: https://www.sec.or.th/EN/Pages/LawandRegulations/DigitalAssetBusiness.aspx (visited on 08/30/2026).

[44] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Exchange Traded Fund: Establishment and Management Framework*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[45] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Mutual Fund Management Framework*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[46] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Net Asset Value and Unit Value Requirements for Mutual Funds*. Official SEC Thailand information source used in Chapter 13. 2026.

[47] Securities and Exchange Commission, Thailand. *Securities and Derivatives Businesses*. 2026. URL: https://www.sec.or.th/en/pages/marketdata/securitiesderivativesbusiness.aspx (visited on 08/30/2026).

[48] William F. Sharpe. “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”. In: *The Journal of Finance* 19.3 (1964), pp. 425–442.

[49] William F. Sharpe. “Mutual Fund Performance”. In: *The Journal of Business* 39.1 (1966), pp. 119–138.

[50] William F. Sharpe. “Integrated Asset Allocation”. In: *Financial Analysts Journal* 43.5 (1987), pp. 25–32.

[51] William F. Sharpe. “The Arithmetic of Active Management”. In: *Financial Analysts Journal* 47.1 (1991), pp. 7–9.

[52] Frank A. Sortino and Robert van der Meer. “Downside Risk”. In: *The Journal of Portfolio Management* 17.4 (1991), pp. 27–31.

[53] Ryan Sullivan, Allan Timmermann, and Halbert White. “Data-Snooping, Technical Trading Rule Performance, and the Bootstrap”. In: *The Journal of Finance* 54.5 (1999), pp. 1647–1691.

[54] Thai Bond Market Association. *Bond Market Overview*. 2026. URL: https://www.thaibma.or.th/EN/Education/Bond_Tutor/MarketOverview.aspx (visited on 08/30/2026).

[55] The Stock Exchange of Thailand. *ETF Overview*. Official SET information source used in Chapter 13. 2026.

[56] The Stock Exchange of Thailand. *Market Products: ETF and Depositary Receipts Overview*. SET market-product information, including ETF, DR and related listed products. 2026. URL: https://www.set.or.th/en/market/product/etf/overview (visited on 08/30/2026).

[57] The Stock Exchange of Thailand. *SET Group and Shareholding Structure*. 2026. URL: https://www.set.or.th/en/about/setgroup/subsidiaries (visited on 08/30/2026).

[58] Jack L. Treynor. “How to Rate Management of Investment Funds”. In: *Harvard Business Review* 43.1 (1965), pp. 63–75.

[59] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010.

[60] Halbert White. “A Reality Check for Data Snooping”. In: *Econometrica* 68.5 (2000), pp. 1097–1126.

[61] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การลงทุนในตลาดการเงิน: เอกสารประกอบการเรียนรายวิชา ส.247 ตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์*. ปทุมธานี, 2021.

[62] Wichai Witayakiattilerd. *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. ตำราภาษาไทย. 2025.

[63] Wichai Witayakiattilerd et al. “Advanced Forecasting of Non-Performing Loans: Revised Chronological and Decision-Aware Framework”. Revised project manuscript; cited for validation methodology. 2026.

[64] Wichai Witayakiattilerd. “QuantX TU Blueprint 2026–2029: Thammasat Quantitative Finance & AI Society”. Project blueprint, Thammasat University. 2026.

[65] Wichai Witayakiattilerd. “Thailand Capital Flow Intelligence Platform (Phase I): Mathematical Foundation and Prototype”. CMDF proposal framework under development. 2026.

[66] Wichai Witayakiattilerd. “การวิจัยอัลฟาและการสร้างพอร์ตการลงทุนเชิงระบบ: ทฤษฎี วิธีวิทยา และการประยุกต์ใช้กับแพลตฟอร์ม WorldQuant BRAIN”. Project textbook manuscript, draft dated 20 June 2026. 2026.

[67] Wichai Witayakiattilerd. “รายงานการพัฒนาแบบจำลอง Alpha เชิงระบบสำหรับการลงทุนเชิงปริมาณ: Systematic Alpha Portfolio Construction for Quantitative Trading Based on Mean Reversion, Volatility Scaling, and Liquidity Signals”. Project research report, Thammasat University. 2026.

[68] Wichai Witayakiattilerd, C. Neaimsri, T. Atthaphichan, C. Boontam, and P. Senarat. “Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory”. In: *Thailand Statistician* 23.4 (2025), pp. 875–892.

[69] Wichai Witayakiattilerd and Wararit Panichkitkosolkul. “Robust Backtesting of Bollinger Bands with Alternative Moving Averages: An Empirical Study on SET50 Stocks”. In: *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science* 12 (2026), pp. 96–118. DOI: 10.58715/bangmodjmcs.2026.12.6.

[70] Wichai Witayakiattilerd, Kammanai Phothong, Kanticha Sudtinont, and Panisara Bundasak. “Instant Exchange Analytics: A Compelling Mathematical Model for Real-Time Debt Instrument and Cash Conversion Rates”. In: *Thailand Statistician* 22.2 (2024), pp. 390–406.

[71] Wichai Witayakiattilerd, Natthaphon Reunprot, Wachirada Limpanawannakul, and Jirawan Phuphon. “Analyzing Stock Performance in the Banking Sector: Unveiling Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk Strategies”. In: *Thailand Statistician* 22.4 (2024), pp. 877–893.

[72] Yasuhiro Yamai and Toshinao Yoshiba. “Value-at-Risk versus Expected Shortfall: A Practical Perspective”. In: *Journal of Banking & Finance* 29.4 (2005), pp. 997–1015.

ประวัติผู้แต่ง

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์



รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ เป็นนักวิชาการด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และคณิตศาสตร์การเงิน ปฏิบัติหน้าที่ด้านการสอน การวิจัย การพัฒนาหลักสูตร และการบริการวิชาการ โดยมุ่งพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และเครื่องมือเชิงคำนวณเพื่อสนับสนุนการตัดสินใจด้านการเงิน การลงทุน ความเสี่ยง ธุรกิจ และสังคม รวมทั้งมีประสบการณ์ด้านการบริหารและการพัฒนาระบบเทคโนโลยีสารสนเทศของมหาวิทยาลัย

ตำแหน่งและหน้าที่

รองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ รับผิดชอบงานสอนและวิจัยระดับปริญญาตรีและบัณฑิตศึกษา งานพัฒนาหลักสูตร งานบริการวิชาการ ตลอดจนการประยุกต์การวิเคราะห์ข้อมูลและเทคโนโลยีดิจิทัลเพื่อสนับสนุนการบริหารและการตัดสินใจขององค์กร

ประวัติการศึกษา

B.Sc. (Mathematics) มหาวิทยาลัยศิลปากร; M.Sc. (Mathematics) และ Ph.D. (Mathematics) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความเชี่ยวชาญและความสนใจทางวิชาการ

คณิตศาสตร์ประยุกต์ คณิตศาสตร์การเงินและการประกันภัย การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน การจัดพอร์ตและกลยุทธ์การลงทุน การบริหารความเสี่ยง แบบจำลองฟัซซีและการตัดสินใจหลายเกณฑ์ การหาค่าเหมาะที่สุด การพยากรณ์ และปัญญาประดิษฐ์เพื่อการตัดสินใจที่ยึดมนุษย์เป็นศูนย์กลาง

ผลงานวิจัยคัดสรรในช่วง 5 ปีล่าสุด (พ.ศ. 2565–2569)

1. *A Multi-Criteria Decision-Making Approach for Transparency Assessment in Donation-Dependent Foundations Using TOPSIS*, *Science & Technology Asia*, 2026.
2. *Robust Backtesting of Bollinger Bands with Alternative Moving Averages: An Empirical Study on SET50 Stocks*, *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science*, 2026.
3. *The Computational Fuzzy Mathematics of Mind and Compassion: A Buddhist Framework for Human-Centered Artificial Intelligence*, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2026.
4. *Transfer Learning-Enhanced Transformer for Robust Solar Irradiance Forecasting in Tropical Renewable Energy Integration*, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2026.
5. *Optimizing Smart Pole Placement: A Strategic Set Covering Approach in Phra Nakhon Si Ayutthaya*, *Thailand Statistician*, 2026.
6. *Unleashing the Potential: Exploring Cashless Investment Strategies through Short-Selling Techniques and Modern Portfolio Theory*, *Thailand Statistician*, 2025.

ผลงานหนังสือสำคัญ

Financial Mathematics and Applications และ *Quantitative Analysis in Finance*

ดัชนี

M^2, 377

Accrued interest, 163
Active constraint, 291
Active Return, 377
Active Risk, 319
Active set, 231
Active Share, 403
Active Share และ Style Drift, 395
Active, Passive และ Smart Beta, 394
Adjusted price, 60
Alpha Signal, 428
Annualized return, 59
Appraisal Ratio, 377
Appraisal Ratio และ Information Ratio, 366
Arbitrage Pricing Theory, 257
Arbitrage Pricing Theory และ Factor Pricing, 249
Arbitrageur, 28
Arithmetic mean, 59
Asset Allocation, 319
Asset Allocation, Security Selection และ Market Timing, 296
Authorized Participant / Participating Dealer, 403

Bank Discount Yield, 43, 59
Basis Risk, 354
Basis Risk และ Hedge Effectiveness, 347
Benchmark, 28, 377
Benchmark, Active Return และ Tracking Error, 362
Beta, 94, 257
Beta Hedge, 354
Beta และความเสี่ยงเชิงระบบ, 75
Black–Litterman, 291
Black–Litterman: จาก Equilibrium สู่ Views, 280
Book value, 163
Book Value per Share และ P/BV, 107
Buy-and-Hold, 303, 319
BVPS, 133

Calendar Rebalancing, 308, 319
Calmar Ratio, 368, 377
Capacity, 397, 403, 428
Capital Allocation Line, 257
Capital Asset Pricing Model, 257
capital market, 28
Capital Market Line, 257
Capital Market Line กับ Security Market Line, 245
CAPM Required Return และการประเมินมูลค่า, 248
CAPM, Market Model, APT และ Empirical

Factor Models, 251
Characteristic line, 257
Christoffersen Test, 354
Clean price, 163
Clean-surplus accounting, 133
Common correlation, 198
Complementary slackness, 231
Component risk contribution, 291
Component VaR, 353
Concentration Risk, 334, 353
Condition Number, 279
Condition number, 291
Conditional Coverage, 354
Conditional Value-at-Risk, 94
Constant Mix, 303, 319
Constant-Growth FCFE, 121
Convex function, 291
Convex set, 291
Convexity, 153, 163
Convexity Condition, 157
Core–Satellite, 319
Core–Satellite Portfolio, 311
Corner portfolio, 231
Correlation, 94, 198
Correlation Stress, 354
Correlation stress, 198
Correlation Stress Testing, 190
Correlation Stress และ Diversification Breakdown, 341
Cost of equity, 133
Coupon rate, 163
Covariance, 94, 198
Covariance matrix, 94, 198
Covariance Matrix และความแปรปรวนของพอร์ต, 176
Covariance shrinkage, 198, 291
Covariance และ Correlation, 70
Covariance-Aware Diversification, 184
CPPI, 319
CS01, 163
Currency risk, 198
Cushion, 319

Data lineage, 28, 60
Data Risk, 90
Data risk, 94
Data Risk, Estimation Risk และ Model Risk, 90
Data Snooping, 428
Days to Liquidate, 354
DCA, 403
DCA, Share Cost Averaging และ Lump Sum, 398
DDM กับ FCFE ควรให้ผลสอดคล้องเมื่อใด, 122
Decision variable, 291
Delta Hedge, 354
derivative, 28
Dirty price, 163
Discount bond, 163
Discount factor, 163
Diversification, 198
Diversification Ratio, 191
Diversification ratio, 198, 291
Diversification: กลไกทางคณิตศาสตร์, 183

Dividend Discount Model, 112, 133
Dividend payout ratio, 133
Dominance, 231
Downside deviation, 94
Downside Risk และ Lower Partial Moments, 73
DPS, 133
DR, 28
DV01 / BPV, 163
Dynamic Asset Allocation, 319
Dynamic และ Insured Asset Allocation, 301

Earnings yield, 133
Effective annual rate, 59
Effective Annual Yield, 45, 59
Effective Positions, 353
Efficient frontier, 231
Efficient portfolio, 231
Embedded-option risk, 163
Enterprise Value, 133
EPS, 133
EPS, DPS, Payout Ratio และ Retention Ratio, 102
Equal-Weight/Common-Correlation Model, 184
Estimation error, 231
Estimation Error และความไม่เสถียรของ Optimal Weights, 220
Estimation Risk, 90
Estimation risk, 94, 198, 291
Estimation Risk และ Covariance Shrinkage, 189
Estimation Risk และ Error Maximization, 279
ETF, 28, 403
ETF: Creation/Redemption และ Arbitrage Band, 391
Euler Decomposition, 353
EV/EBITDA, 111, 133
EWMA, 94, 353
EWMA Covariance และ Conditional Risk, 330
EWMA Volatility และความเสี่ยงที่เปลี่ยนตามเวลา, 85
Exception, 94, 354
Exception Rate และ Violation Ratio, 336
Expected return, 94, 198
Expected Shortfall, 94, 328, 353
Expected Shortfall หรือ Conditional Value-at-Risk, 82

Face value, 163
Factor loading, 257
Factor Risk, 353
Factor Risk Decomposition, 333
Factor risk premium, 257
FCFE, 133
Feasible set, 231, 291
Feasible Set, Opportunity Set และ Dominance, 202
financial asset, 28
financial market, 28
Floor, 319
Forward rate, 163
Forward Rate และ Term Structure, 147
Frontier constants, 231

Fully invested, 198
Fundamental P/E และ P/BV, 119
FX return, 60

Gap Risk, 306, 319, 354
Geometric mean, 60
Global Minimum Variance Portfolio, 208, 231
Gordon Growth Model, 114, 133
Governance และ Policy Review, 314
Gross exposure, 198, 291
Gross Exposure และ Leverage, 274

Hedge Ratio, 354
Hedger, 28
Historical Simulation, 81, 94, 329, 353
Holding-Period Return, 40, 59
Holdings Similarity, 403
Hybrid Rebalancing, 308, 319

Idiosyncratic Risk, 353
Idiosyncratic risk, 94, 257
Immunization, 155, 163
Index Fund, 403
Information Coefficient, 428
Information Ratio, 377
Insured Asset Allocation, 319
Integrated Asset Allocation, 297, 319
Internal Rate of Return, 60
International diversification, 198
International Diversification และ Currency Risk, 187
Intrinsic value, 133
Investment Lab 1: NAV และ Total Return, 400
Investment Lab 1: สร้างแผนที่ตลาดและ IPS, 24
Investment Lab 3: ETF Premium/Discount, 401
Investment Lab 5: DCA vs Lump Sum, 401
Investment Lab: Asset Allocation และ Rebalancing, 315
Investment Lab: Efficient Frontier และ Robustness, 227
Investment Policy Statement, 28

Jensen's Alpha, 377
Jensen's alpha, 257
Jensen's Alpha และความหมายของ Regression Intercept, 247
Jensen's Alpha และความไม่แน่นอนของ Alpha, 364

Key-rate duration, 163
Key-Rate Duration และการเปลี่ยนรูปของ Yield Curve, 154
KKT Conditions, 218
KKT conditions, 231, 291
KKT Conditions และความหมายของ Active Constraints, 267
Kupiec Test, 354
Kupiec Unconditional Coverage Test, 337
Kurtosis, 94

Lagrange multiplier, 231
Leveraged และ Inverse ETF: Path Dependence, 392

Liability-Aware Allocation, 319
Liability-Aware Asset Allocation, 313
liquidity, 28
Liquidity constraint, 291
Liquidity Constraints, 277
Liquidity Risk, 342, 354
Log Return, 38
Log return, 59
Long-only, 198
Look-ahead bias, 28
Loss Variable, 353
Lower Partial Moment, 94

Macaulay Duration, 150
Macaulay duration, 163
Margin of Safety, 126
Margin of safety, 133
Marginal contribution to risk, 198
Marginal risk contribution, 291
Marginal Risk และ Risk Contribution, 185
Marginal VaR, 353
Marginal VaR และ Component VaR, 332
Market Drift, 319
Market Impact, 428
Market impact, 28
Market Maker, 403
Market model, 257
Market Model, Characteristic Line และการประมาณ Beta, 246
Market portfolio, 257
Market Portfolio และ Capital Market Line, 242
Market price, 133
Market risk premium, 257
Market-proxy problem, 257
Maximum diversification, 291
Maximum Diversification Portfolio, 271
Maximum Drawdown, 94, 354, 377
Maximum Drawdown และความเสี่ยงตามเส้นทาง, 77
Maximum Sharpe, 291
Maximum Sharpe ratio, 257
Mean–variance efficiency, 231
Mean–variance utility, 231
Minimum variance, 291
Minimum-Variance Frontier, 210
Minimum-variance frontier, 231
Minimum-Variance Hedge Ratio, 344
Model Card, 429
Model Drift, 429
Model Risk, 90, 354
Model risk, 94
Model Risk และ Data Governance, 349
Model validation, 257
Model Validation สำหรับ Asset Pricing, 252
Modified Dietz Return, 49, 60
Modified duration, 163
Modified Duration และ Price Sensitivity, 152
money market, 28
Money Market Yield, 44, 59
Money-Weighted Return, 60, 377
Money-Weighted Return และ IRR, 48
Money-Weighted Return, IRR และ Modified

Dietz, 48
Multi-Stage Dividend Discount Model, 117
Multiplier, 319

Naive Diversification, 183
Naive diversification, 198
NAV, 28, 133, 403
NAV per Unit, 403
NAV ผลตอบแทน และกระแสเงินสด, 386
Net exposure, 198
Neutralization, 428
Neutralization เป็น Orthogonal Projection, 411
No short-selling, 231
No Short-Selling และ Quadratic Programming, 217
No-Trade Region, 319
No-Trade Region และ Partial Rebalancing, 309
Nominal rate, 59
Normal Expected Shortfall, 83

Objective function, 291
Opportunity set, 231
organized exchange, 28
OTC, 28
Out-of-Sample Portfolio Optimization, 286
Out-of-sample validation, 231, 291

P/BV, 133
P/E, 133
P/E และ Earnings Yield, 109
Par bond, 163
Performance Appraisal, 377
Performance Attribution, 369, 377
Performance Measurement, 377
Point-in-Time Data, 428
Point-in-Time Data และ Decision Clock, 409
Policy Portfolio, 319
Policy Range, 299, 319
Policy Review, 319
Portfolio optimization, 291
Portfolio return, 198
Portfolio weight, 198
Position limit, 291
Positive definite matrix, 231
Positive semidefinite, 198
Premium bond, 163
Premium/Discount, 403
price discovery, 28
primary market, 28
Protective Put, 345, 354
Purging, 428

Quadratic programming, 231, 291

RAROC, 377
real asset, 28
Real return, 60
Rebalancing, 28
Redemption value, 163
Reinvestment risk, 163
Required return, 257
Resampling, 231
Residual Cash, 319

Residual income, 133
Residual Income Valuation, 122
Retention ratio, 133
Reverse Stress Testing, 340, 354
Risk Appetite, 353
Risk Appetite, Risk Capacity และ Risk Limits, 325
Risk aversion, 231
Risk budget, 291
Risk Capacity, 353
Risk capacity, 28
Risk contribution, 198
Risk Contribution และ Risk Parity, 272
Risk Dashboard, 354
Risk Dashboard และ Escalation, 348
Risk Limit, 353
Risk Map ของกองทุนและ ETF, 400
Risk parity, 291
Risk Tolerance, 353
Risk willingness, 28
Risk-free asset, 257
Robust Optimization, 281
Robust optimization, 291
ROE, 133
ROE และ Sustainable Growth, 103
Rolling beta, 257

Sample covariance, 198
Scenario Analysis, 125
Scenario analysis, 133
secondary market, 28
Security Market Line, 257
Sensitivity analysis, 133
Shadow price, 291
Sharpe Ratio, 377
Sharpe Ratio: ผลตอบแทนส่วนเกินต่อความเสี่ยงรวม, 363
Short position, 198
Shrinkage, 231
Simple return, 59
Simple Return และ Log Return, 38
Simple Return และ Wealth Relative, 38
Skewness, 94
Skewness และ Kurtosis, 70
Smart Beta, 403
Smart Beta ในฐานะสะพานระหว่าง Passive และ Active, 394
Solver tolerance, 291
Sortino Ratio, 377
Sortino Ratio และ Downside Risk, 367
Speculator, 28
Spot rate, 163
Spot Rate, Discount Factor และ Bootstrap, 146
Spread duration, 163
Standard deviation, 94
Strategic Asset Allocation, 298, 319
Stress Testing, 339, 354
Structural break, 257
Survivorship bias, 28
Sustainable growth, 133
Systematic risk, 94, 257
Systematic Risk และ Idiosyncratic Risk, 244

Tactical Asset Allocation, 300, 319
Tactical Tilt, 319
Tangency portfolio, 257
Tangency Portfolio และ Maximum Sharpe Ratio, 240
Target return, 291
Terminal value, 133
Threshold Rebalancing, 308, 319
Time-Weighted Return, 50, 60, 377
Total return, 59
Total-return index, 60
Tracking Difference, 403
Tracking Difference และ Tracking Error, 389
Tracking Error, 76, 94, 319, 377, 403
Tracking error, 291
Tracking Error Constraint, 275
Trade Ticket, 319
Transaction Cost, 319
Transaction cost, 291
Transaction Costs และการตัดสินใจจาก Holdings เดิม, 276
Transaction Costs, Market Impact และ Capacity, 417
Treynor Ratio, 377
Treynor Ratio: ผลตอบแทนต่อความเสี่ยงเชิงระบบ, 363
Turnover, 291, 319, 428
Turnover Constraint, 275
Turnover และ Transaction Costs, 309
Two-fund separation, 257
Two-Fund Separation และการเลือก Complete Portfolio, 241
Two-fund theorem, 231
Two-Fund Theorem สำหรับสินทรัพย์เสี่ยง, 214
Two-stage DDM, 133

Valuation Reconciliation, 127
Valuation reconciliation, 133
Value at Risk, 353
Value-at-Risk, 78, 94
Variance, 94, 198
Violation Ratio, 87, 94, 354
Volatility Drag, 47
Volatility drag, 60

Walk-Forward Validation, 420, 428
Wealth Index และ Total-Return Index, 54
Wealth relative, 59
Weight stability, 231

Yield curve, 163
Yield to Maturity, 144, 163

กรณี Correlation เท่ากับ -1 และพอร์ตความแปรปรวนศูนย์, 180
กรณี Correlation เท่ากับ 0, 180
กรณี Correlation เท่ากับ 1, 180
กรณีศึกษางานวิจัย: Beta และ Correlation ในหลักทรัพย์ SET50, 252
กรณีศึกษางานวิจัย: Correlation และการสร้างพอร์ตจากหลักทรัพย์ SET50, 192
กระบวนการลงทุนและ Investment Policy Statement, 20

กองทุนรวม ETF และผลิตภัณฑ์ที่ให้สิทธิในพอร์ตสินทรัพย์, 13
กองทุนเปิด กองทุนปิด และ ETF, 384
การค้นพบราคา, 28
การประมาณ Mean Vector และ Covariance Matrix จากข้อมูลจริง, 188
การเงินทางตรงและการเงินผ่านตัวกลาง, 7
การแลกเปลี่ยนระหว่างผลตอบแทนกับความเสี่ยง, 18
ข้อจำกัดของกรอบ Mean–Variance, 196
ข้อจำกัดเชิงปฏิบัติที่เปลี่ยน Efficient Frontier, 219
ความสามารถรับความเสี่ยงกับความเต็มใจรับความเสี่ยง, 22
จากตลาดสู่การลงทุนเชิงปริมาณ, 23
จำนวนพารามิเตอร์ของ Covariance Matrix, 183
ตราสารทุน, 12
ตราสารหนี้, 12
ตราสารอนุพันธ์, 12, 28
ตลาดการเงิน, 28
ตลาดที่จัดตั้งอย่างเป็นทางการ, 28
ตลาดที่จัดตั้งอย่างเป็นทางการและตลาดนอกระบบ, 9
ตลาดทุน, 28
ตลาดนอกระบบ, 28
ตลาดรอง, 28
ตลาดเงิน, 28
ตลาดเงินและตลาดทุน, 8
ตลาดแรก, 28
ตลาดแรกและตลาดรอง, 8
บทนำ: จาก Optimal Portfolio สู่ Policy Portfolio, 295
บทนำ: จากเงินออมสู่การตัดสินใจลงทุน, 3
บทบาทของ Hedger, Speculator และ Arbitrageur, 15
ประเภทของสินทรัพย์ทางการเงิน, 10
ประเภทความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนควรรู้ก่อนสร้างพอร์ต, 19
ผลตอบแทน ความเสี่ยง และสภาพคล่อง: สามแกนของการลงทุน, 17
ผลตอบแทนจากข้อมูลราคา: Corporate Actions และ Total Return, 53
ผลตอบแทนสะสม Holding-Period Return และการทำให้เป็นรายปี, 40
ผู้มีส่วนร่วมในตลาดและโครงสร้างพื้นฐาน, 14
พอร์ตสองสินทรัพย์และบทบาทของ Correlation, 178
ภาพรวมระบบตลาดการเงินไทย, 16
ราคาและ Yield: Monotonicity และ Convexity, 145
วงจรการบริหารพอร์ต: จากนโยบายสู่การประเมินผล, 22
สภาพคล่อง, 28
สภาพคล่องของ ETF มีหลายชั้น, 391
สภาพคล่องและต้นทุนการซื้อขาย, 18
สินทรัพย์จริง, 28
สินทรัพย์จริงและสินทรัพย์ทางการเงิน, 5
สินทรัพย์ดิจิทัลและสินทรัพย์ทางเลือก, 14
สินทรัพย์ทางการเงิน, 28
สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและ Capital Allocation Line, 238
หน้าที่ทางเศรษฐกิจของตลาดการเงิน, 6

องค์ประกอบหลักของ IPS, 21
เงินสดและตราสารตลาดเงิน, 11
เปรียบเทียบ Buy-and-Hold, Constant Mix และ CPPI, 307
เหตุใด Covariance Matrix ต้องเป็น Positive Semidefinite, 177
แนวทางอ่านข้อมูลตลาดอย่างรับผิดชอบ, 25
แผนที่เนื้อหาจากบทนี้สู่บทถัดไป, 26
โครงสร้างของ Portfolio Optimization Problem, 265
โครงสร้างตลาดการเงิน, 7

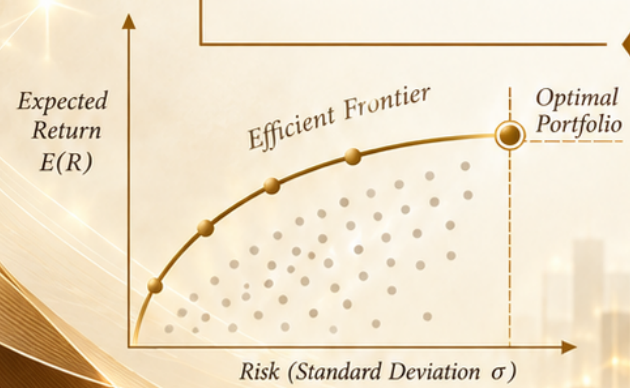
$$E(R_p) = w^T \mu$$

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

Portfolio Theory
Asset Allocation
Risk Management
Quantitative Investing

Markets
Assets
Risk
Returns
Diversification
Performance

หนังสือเล่มนี้เป็นตำราระดับอุดมศึกษา ว่าด้วยคณิตศาสตร์การลงทุนและทฤษฎีการจัดพอร์ต ครอบคลุมแนวคิดความเสี่ยง การจัดสรรสินทรัพย์ การประเมินผลการลงทุน และการลงทุนเชิงปริมาณ



A Better Investment Tomorrow

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์